KIÍRÁS AZ SML-BEN

Kiírás

- `{TextIO.}print : string -> unit`

  `print s` = kiírja az `s` értékét a standard kimenetre, és azonnal kiüríti a puffert.

- `{General.}makestring : numtxt-> string` (Csak mosml!)

  `makestring v` = eredménye a `v` érték *ábrázolása.*

- `{Meta.}printVal : 'a -> 'a` (Csak mosml! Az Alice-ben: `'a -> unit`)

  `printVal e` = kiírja az `e` kifejezés értékét a standard kimenetre pontosan úgy, ahogyan az értelmező írja ki a „legfelső szinten”, és azonnal kiüríti a puffert. Eredményül visszaadja az `e` kifejezés értékét. *Csak interaktív módban használható.*

  1. megjegyzés. A `{` és `}` kapcsos zárójelek között opcionális modulnév áll. Pl. `{TextIO.}print` azt jelenti, hogy a függvény a `TextIO` modulban van definiálva, de az SML-értelmező a `print` nevet rövid alakban is felismeri.

  2. megjegyzés. *numtxt* = `int | real | word | word8 | char | string`

- Különböző típusú egyszerű értékeket alakítanak át füzérré a `toString` függvények:

```
Bool.toString : bool -> string        String.toString : string -> string
Char.toString : char -> string        Time.toString   : time -> string
Date.toString : date -> string        Word.toString   : word -> string
Int.toString  : int -> string         Word8.toString  : word8 -> string
Real.toString : real -> string
```

Kiírás (folyt.)

- Példák:

```
print("alma"^"Korte\n");
almaKorte
> val it = () : unit

makestring ~5.8e~3;
> val it = "~0.0058" : string

printVal("alma"^"Korte\n");
"almaKorte\n"> val it = "almaKorte\n" : string

makestring("alma"^"Korte\n");
> val it = "\"almaKorte\\n\"" : string
```

- `printVal`-lal tetszőleges típusú érték írható ki, például ennes, rekord vagy lista:

```
printVal (3, 5.0);
(3, 5.0)> val it = (3, 5.0) : int * real

printVal {m2 = 3, m1 = 5.0};
{m1 = 5.0, m2 = 3}> val it = {m1 = 5.0, m2 = 3} : {m1 : real, m2 : int}

printVal [#"A",#"Z",#":"];
[#"A", #"Z", #":"]> val it = [#"A", #"Z", #":"] : char list
```

Kiírás (folyt.)

- Hosszú lista, ill. egymásba skatulyázott adatszerkezetek esetén `printVal` (és maga az mosml-értelmező is) alapesetben csak az első 200 listaelemet, ill. legfeljebb 20 szintet ír ki. A hosszat a `printLength`, a szintek számát a `printDepth` *frissíthető változó* szabályozza. Mindkét érték felülírható.

```
printLength : int ref        printLength := 7;   !printLength;
printDepth  : int ref        printDepth  := 3;   !printDepth;
```

- Példák:

```
printLength := 6; printVal [1,2,3,4,5,6,7,8] before print "\n";
[1, 2, 3, 4, 5, 6, ...]
> val it = [1, 2, 3, 4, 5, 6, ...] : int list

printDepth := 4; printVal fa before print "\n";
B(B(#, #), B(#, #))
> val it = B(B(#, #), B(#, #)) : t
```

- Figyelem: a `printLength` és a `!printLength` kifejezések különböznek!

```
printLength;                  | !printLength;
> val it = ref 7 : int ref    | > val it = 7 : int
```

ABSZTRAKCIÓ FÜGGVÉNYEKKEL (ELJÁRÁSOKKAL)

Elágazó rekurzió

- Korábban lineáris-rekurzív, ill. lineáris-iteratív folyamatokra láttunk példákat (faktoriális kiszámítása kétféleképpen).
- Most *elágazó rekurzióra* nézzünk példát: állítsuk elő a Fibonacci-számok sorozatát.
- Egy Fibonacci-számot az előző két Fibonacci-szám összege adja:

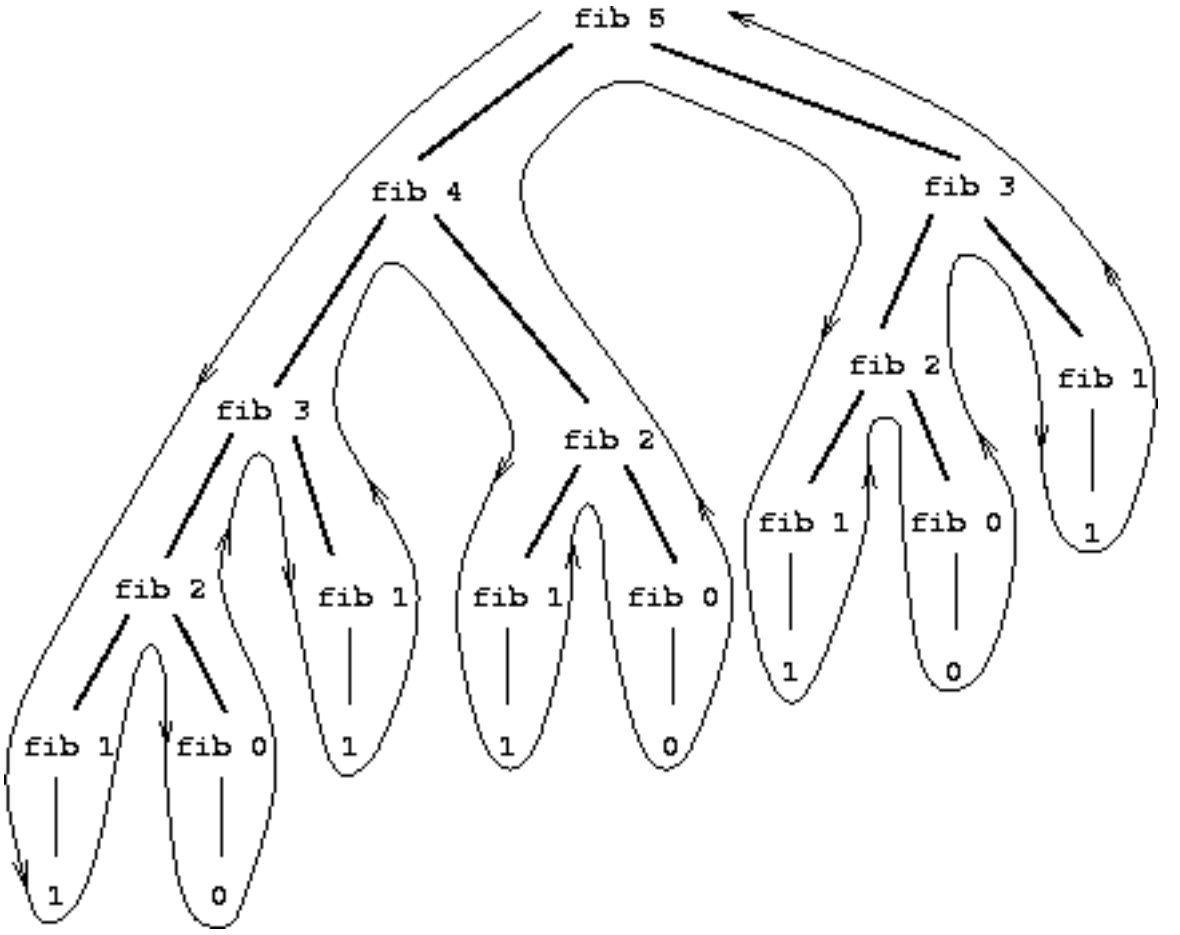
```
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...
```

- A Fibonacci-számok matematikai definíciója könnyen átírható SML-függvénnyé:

$F(0) = 0$	`fun fib 0 = 0`
$F(1) = 1$	`  | fib 1 = 1`
$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$, ha $n > 1$	`  | fib n = fib(n-1) + fib(n-2)`

  Emlékeztetőül: a `fib` függvény definíciójában a 3. klóznak az utolsónak kell lennie, mert az `n` minta minden argumentumra illeszkedik.
- A következő lapon látható ábra illusztrálja az elágazóan rekurzív folyamatot `fib 5` kiszámítása esetén.

Elágazó rekurzió (folyt.)



- `fib 5`-öt `fib 4` és `fib 3`, `fib 4`-et `fib 3` és `fib 2` kiszámításával stb. kapjuk.

Elágazó rekurzió (folyt.)

- Az előző program alkalmas az elágazó rekurzió lényegének bemutatására, de szinte alkalmatlan a Fibonacci-számok előállítására!
- Vegyük észre, hogy pl. `fib 3`-at kétszer is kiszámítjuk, azaz a munkának ezt a részét kb. a harmadát) feleslegesen végezzük el.
- Belátható, hogy $F(n)$ meghatározásához pontosan $F(n+1)$ levélből álló fát kell bejárni, azaz ennyiszer kell meghatározni $F(0)$-t vagy $F(1)$-et.
- $F(n)$ exponenciálisan nő n-nel.

  Pontosabban, $F(n)$ a $\Phi^n/\sqrt{5}$-höz közel eső egész, ahol $\Phi = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1.61803$, az ún. *aranymetszés* arányszáma. Φ kielégíti a $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$ egyenletet.
- A megteendő lépések száma tehát $F(n)$-nel együtt exponenciálisan nő n-nel. Ugyanakkor a tárigény csak lineárisan nő n-nel, mert csak azt kell nyilvántartani, hogy hányadik szinten járunk a fában.
- Általában is igaz, hogy elágazó rekurzió esetén a lépések száma a fa csomópontjainak a számával, a tárigény viszont a fa maximális mélységével arányos.

Elágazó rekurzió (folyt.)

- A Fibonacci-számok lineáris-iteratív folyamattal is előállíthatók.

  Ha az a és b változók kezdőértéke rendre $F(1) = 1$ és $F(0) = 0$, és ismétlődően alkalmazzuk az $a \leftarrow a + b$, $b \leftarrow a$ transzformációkat, akkor n lépés után $a = F(n + 1)$ és $b = F(n)$ lesz. Az iteratív folyamatot létrehozó SML-függvény egy változata:

```
fun fib n = let fun fibIter (i, b, a) =
                  if i = n then b
                  else fibIter(i+1, a, a+b)
            in
                fibIter(0, 0, 1)
            end
```

- *Mintaillesztést* használhatunk, ha `i`-t nem növeljük, hanem `n`-től 0-ig csökkentjük.

  Figyelem: a klózok sorrendje, mivel nem egymást kizáróak a minták, lényeges!

```
fun fib n = let fun fibIter (0, b, a) = b
                  | fibIter (i, b, a) = fibIter(i-1, a, a+b)
            in
                fibIter(n, 0, 1)
            end
```

Elágazó rekurzió (folyt.)

- A Fibonacci-példában a lépések száma elágazó rekurziónál tehát n-nel exponenciálisan, lineáris rekurziónál n-nel arányosan nőtt, kis n-ekre is hatalmas a nyereség!
- Téves lenne azonban azt a következtetést levonni, hogy az elágazó rekurzió használhatatlan. Amikor hierarchikusan strukturált adatokon kell műveleteket végezni, pl. egy fát kell bejárni, akkor az elágazó rekurzió (angolul: *tree recursion)* nagyon is természetes és hasznos eszköz.
- Az elágazó rekurzió numerikus számításoknál az algoritmus első megfogalmazásakor is hasznos lehet: gondoljunk csak arra, hogy milyen könnyű volt átírni a Fibonacci-számok matematikai definícióját programmá.
- Ha már értjük a feladatot, az első, rossz hatékonyságú változatot könnyebb átírni jó, hatékony programmá. Az elágazó rekurzió segíthet a feladat megértésében.

Az iteratív Fibonacci-algoritmushoz csak egy aprócska ötlet kellett. A következő feladatra azonban nem lenne könnyű iteratív algoritmust írni.

- Hányféleképpen lehet felváltani *egy* dollárt 50, 25, 10, 5 és 1 centesekre?
- Általánosabban: adott összeget adott érmékkel hányféleképpen lehet felváltani?

Elágazó rekurzió (folyt.): pénzváltás

Tegyük föl, hogy n darab érme áll a rendelkezésünkre valamilyen (pl. nagyság szerint csökkenő) sorrendben. Ekkor az a összeg lehetséges felváltásainak számát úgy kapjuk meg, hogy

- kiszámoljuk, hogy az a összeg hányféleképpen váltható fel az első (d értékű) érmét kivéve a többi érmével, és ehhez
- hozzáadjuk, hogy az $a - d$ összeg hányféleképpen váltható fel az összes érmével, az elsőt is beleértve – más szóval azt, hogy az a összeget hányféleképpen tudjuk úgy felváltani, hogy a d érmét legalább egyszer felhasználjuk.

A feladat tehát rekurzióval megoldható, hiszen redukálható úgy, hogy kisebb összegeket kevesebb érmével kell felváltanunk. A következő alapeseteket különböztessük meg:

- Ha $a = 0$, a felváltások száma 1.

  (Ha az összeg 0, csak egyféleképpen, 0 db érmével lehet „felváltani”.)
- Ha $a < 0$, a felváltások száma 0.
- Ha $n = 0$, a felváltások száma 0.

A példában a `firstDenomination` (magyarul *első címlet)* függvényt felsorolással valósítottuk meg. Tömörebb és rugalmasabb lenne a megvalósítása lista alkalmazásával.

Elágazó rekurzió (folyt.): pénzváltás

```
fun countChange amount =
  let (* cC amount kindsOfCoins = az amount összes felváltásainak száma
                                  kindsOfCoins db érmével *)
      fun cC (amount, kindsOfCoins) =
            if amount < 0 orelse kindsOfCoins = 0 then 0
            else if amount = 0 then 1
            else cC (amount, kindsOfCoins - 1) +
                 cC (amount - firstDenomination kindsOfCoins, kindsOfCoins)
      and firstDenomination 1 = 1
        | firstDenomination 2 = 5
        | firstDenomination 3 = 10
        | firstDenomination 4 = 25
        | firstDenomination 5 = 50
  in
     cC(amount, 5)
  end;

countChange 10 = 4; countChange 100 = 292;
```

Gyakorló feladatok.

- Írja át a `firstDenomination` függvényt úgy, hogy a címleteket egy lista tartalmazza.
- Írja meg a `cC` függvény mintaillesztést használó változatát!

Hatványozás

- Az eddig látott folyamatokban a kiértékelési (végrehajtási) lépések száma az adatok n számával lineárisan, ill. exponenciálisan nőtt. Most olyan példa következik, amelyben a lépések száma az n logaritmusával arányos.
- A b szám n-edik hatványának definícióját ugyancsak könnyű átrakni SML-be.

$$b^0 = 1$$
$$b^n = b \cdot b^{n-1}$$

```
fun expt (b, 0) = 1
  | expt (b, n) = b * expt(b, n-1)
```

- A létrejövő folyamat lineáris-rekurzív. $O(n)$ lépés és $O(n)$ méretű tár kell a végrehajtásához.
- A faktoriálisszámításhoz hasonlóan könnyű felírni lineáris-iteratív változatát.

```
fun expt (b, n) =
      let fun exptIter (0, product) = product
            | exptIter (counter, product) =
                                  exptIter (counter-1, b * product)
      in
          exptIter(n, 1)
      end
```

- $O(n)$ lépés és $O(1)$ – azaz konstans – méretű tár kell a végrehajtásához.

Hatványozás (folyt.)

- Kevesebb lépés is elég, ha kihasználjuk az alábbi egyenlőségeket:

$b^0 = 1$

$b^n = (b^{n/2})^2$, ha n páros
$b^n = b \cdot b^{n-1}$, ha n páratlan

```
fun expt (b, n) =
  let fun exptFast 0 = 1
        | exptFast n =
            if even n
            then square(exptFast(n div 2))
            else b * exptFast(n-1)
      and even i = i mod 2 = 0
      and square x = x * x
  in  exptFast n  end
```

- A lépések száma és a tár mérete $O(\lg n)$-nel arányos. Konstans tárigényű iteratív változata:

```
fun expt (b, 0) = 1   (* Nem hagyható el! Miért nem? *)
  | expt (b, n) = let fun exptFast (1, r) = r
                        | exptFast (n, r) =
                            if even n then exptFast(n div 2, r*r)
                            else           exptFast(n-1, r*b)
                      and even i = i mod 2 = 0
                  in  exptFast(n, b)  end
```

LISTÁK

Adott számú elem egy lista elejéről és végéről (`take`, `drop`)

- Legyen $xs = [x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}]$, akkor `take(xs, i)` $= [x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}]$ és `drop(xs, i)` $= [x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}]$.
- `take` egy megvalósítása (jobbrekurzív-e? jobbrekurzívvá tehető-e? robosztus-e?)

```
(* take : 'a list * int -> 'a list
   take (xs, i) = ha i < 0, xs; ha i >= 0,
                  az xs első i db eleméből álló lista *)
fun take (_, 0)      = []
  | take ([], _)     = []
  | take (x::xs, i) = x :: take(xs, i-1)
```

- `drop` egy megvalósítása (jobbrekurzív-e? jobbrekurzívvá tehető-e? robosztus-e?)

```
(* drop : 'a list * int -> 'a list
   drop(xs, i) = ha i < 0, xs; ha i >= 0,
                 az xs első i db elemének eldobásával előálló lista *)
fun drop ([], _)     = []
  | drop (x::xs, i) = if i > 0 then drop (xs, i-1) else x::xs
```

- Könyvtári változatuk – `List.take`, ill. `List.drop` – ha az `xs` listára alkalmazzuk, $i < 0$ vagy $i >$ `length xs` esetén `Subscript` néven kivételt jelez.

Lista redukciója kétoperandusú művelettel

Idézzük föl az egészlista maximális értékét megkereső `maxl` függvény két változatát:

- `maxl` jobbról balra egyszerűsítő (nem jobbrekurzív) változata

```
(* maxl : int list -> int
   maxl ns = az ns egészlista legnagyobb eleme
*)
fun maxl [] = raise Empty
  | maxl [n] = n
  | maxl (n::ns) = Int.max(n, maxl ns)
```

- `maxl` balról jobbra egyszerűsítő (jobbrekurzív) változata:

```
(* maxl' : int list -> int
   maxl' ns = az ns egészlista legnagyobb eleme
*)
fun maxl' [] = raise Empty
  | maxl' [n] = n
  | maxl' (n::m::ns) = maxl'(Int.max(n,m)::ns)
```

- Amint ez a példa is mutatja, vissza-visszatérő feladat egy lista redukciója kétoperandusú művelettel.
- Közös bennük, hogy n db értékből egyetlen értéket kell előállítani, ezért is beszélünk *redukcióról*.

Lista redukciója kétoperandusú művelettel (`foldr`, `foldl`)

- `foldr` jobbról balra, `foldl` balról jobbra haladva egy kétoperandusú műveletet (pontosabban egy *párra alkalmazható, prefix* pozíciójú *függvényt*) alkalmaz egy listára. Példák szorzat és összeg kiszámítására:

```
foldr op* 1.0 [] = 1.0;                          foldl op+ 0 [] = 0;
foldr op* 1.0 [4.0] = 4.0;                       foldl op+ 0 [4] = 4;
foldr op* 1.0 [1.0, 2.0, 3.0, 4.0] = 24.0;       foldl op+ 0 [1, 2, 3, 4] = 10;
```

- Jelöljön $\oplus$ tetszőleges kétoperandusú infix operátort. Akkor

$$\texttt{foldr op}\oplus\texttt{ e [}x_1\texttt{, }x_2\texttt{, ..., }x_n\texttt{] = (}x_1 \oplus \texttt{(}x_2 \oplus \texttt{ ... } \oplus \texttt{(}x_n \oplus \texttt{e) ...))}$$

$$\texttt{foldr op}\oplus\texttt{ e [] = e}$$

$$\texttt{foldl op}\oplus\texttt{ e [}x_1\texttt{, }x_2\texttt{, ..., }x_n\texttt{] = (}x_n \oplus \texttt{ ... } \oplus \texttt{(}x_2 \oplus \texttt{(}x_1 \oplus \texttt{e)) ...)}$$

$$\texttt{foldl op}\oplus\texttt{ e [] = e}$$

- A $\oplus$ művelet `e` operandusa néhány gyakori műveletben – összeadás, szorzás, konjunkció (logikai „és”), alternáció (logikai „vagy”) – a (jobb oldali) *egységelem* szerepét tölti be.
- Ha a művelet asszociatív és kommutatív, `foldr` és `foldl` eredménye azonos.

Példák `foldr` és `foldl` alkalmazására

- `isum` egy egészlista elemeinek összegét, `rprod` egy valóslista elemeinek szorzatát adja eredményül.

```
val isum = foldr op+ 0;
val isum = foldl op+ 0;
```

```
val rprod = foldr op* 1.0;
val rprod = foldl op* 1.0;
```

- A `length` függvény is definiálható `foldl`-lel vagy `foldr`-rel. Kétoperandusú műveletként olyan segédfüggvényt (`inc`) alkalmazunk, amelyik *nem használja* az első paraméterét.

```
(* inc : 'a * int -> int
   inc (_, n) = n + 1 *)
fun inc (_, n) = n + 1;

(* lengthr, lengthl : 'a list -> int *)
val lengthr = fn ls => foldr inc 0 ls;
fun lengthr ls = foldr inc 0 ls;
val lengthr = foldr inc 0;
val lengthr = foldr (fn (_,n) => n+1) 0;

lengthr (explode "hajdu sogor");
```

```
val lengthl = fn ls => foldl inc 0
fun lengthl ls = foldl inc 0 ls;
val lengthl = foldl inc 0;
val lengthl = foldl (fn (_,n) => n+

lengthl (explode "tengertanc");
```

Lista: `foldr` és `foldl` definíciója

- `foldr op⊕ e [`x_1`, `x_2`, ..., `x_n`] = (`x_1 ⊕ (`$x_2$ ⊕ ... ⊕ (`x_n ⊕ e) ...))`

  `foldr op⊕ e [] = e`

```
(* foldr f e xs = az xs elemeire jobbról balra haladva
                  alkalmazott, kétoperandusú, e egységelemű
                  f művelet eredménye
   foldr : ('a * 'b -> 'b) -> 'b -> 'a list -> 'b *)
fun foldr f e (x::xs) = f(x, foldr f e xs)
  | foldr f e [] = e;
```

- `foldl op⊕ e [`x_1`, `x_2`, ..., `x_n`] = (`x_n ⊕ ... ⊕ (`$x_2$ ⊕ (`x_1 ⊕ e)) ...)`

  `foldl op⊕ e [] = e`

```
(* foldl f e xs = az xs elemeire balról jobbra haladva
                  alkalmazott, kétoperandusú, e egységelemű
                  f művelet eredménye
   foldl : ('a * 'b -> 'b) -> 'b -> 'a list -> 'b *)
fun foldl f e (x::xs) = foldl f (f(x, e)) xs
  | foldl f e [] = e;
```

További példák `foldr` és `foldl` alkalmazására

- Egy lista elemeit egy másik lista elé fűzi `foldr` és `foldl`, ha kétoperandusú műveletként a *cons* konstruktorfüggvényt – azaz az `op::`-ot – alkalmazzuk.

  foldr op:: ys [x_1, x_2, x_3] = (x_1 :: (x_2 :: (x_3 :: ys)))

  foldl op:: ys [x_1, x_2, x_3] = (x_3 :: (x_2 :: (x_1 :: ys)))

- A `::` nem asszociatív és kommutatív, ezért `foldl` és `foldr` eredménye különböző!

```
(* append : 'a list -> 'a list -> 'a list
   append xs ys = az xs ys elé fűzésével előálló lista *)
fun append xs ys = foldr op:: ys xs;

(* revApp : 'a list -> 'a list -> 'a list
   revApp xs ys = a megfordított xs ys elé fűzésével
                  előálló lista *)
fun revApp xs ys = foldl op:: ys xs;
```

`append [1, 2, 3] [4, 5, 6] = [1, 2, 3, 4, 5, 6];` (vö. Prolog: `append`)

`revApp [1, 2, 3] [4, 5, 6] = [3, 2, 1, 4, 5, 6];` (vö. Prolog: `revapp`)

További példák `foldr` és `foldl` alkalmazására

- `maxl` két megvalósítása

```
(* maxl : ('a * 'a -> 'a) -> 'a list -> 'a
   maxl max ns = az ns lista max szerinti legnagyobb eleme
*)

(* nem jobbrekurzív *)

fun maxl max []       = raise Empty
  | maxl max (n::ns) = foldr max n ns

(* jobbrekurzív *)

fun maxl' max []       = raise Empty
  | maxl' max (n::ns) = foldl max n ns
```

Példa listák használatára: futamok előállítása

- A futam egy olyan lista, amelynek szomszédos elemei egy adott feltételnek megfelelnek.
- Az adott feltételt az előző és az aktuális elemre alkalmazandó *predikátumként* adjuk át a futamot előállító fügvénynek.
- A feladat: írjunk olyan SML függvényt, amely (az elemek eredeti sorrendjének megőrzésével) egy lista egymás utáni elemeiből képzett futamok listáját adja eredményül.
- Az első változatban egy-egy segédfüggvényt írunk egy lista első (prefix) futamának, valamint a maradéklistának az előállítására.
- A `futam` segédfüggvénynek két argumentuma van: az első egy predikátum, amely a kívánt feltételt megvalósítja, a második pedig egy pár. A pár első tagja az előző elem, a második tagja pedig az a lista, amelynek az előző elemmel induló futamát kell `futam`-nak előállítania.
- A `maradek` segédfüggvény két argumentuma azonos `futam` argumentumaival. Eredményül azt a listát kell visszaadnia, amelyet az első futam leválasztásával állít elő a pár második tagjaként átadott listából.
- A következő diákon a `futam` és a `maradek` segédfüggvények, valamint a `futamok` függvény különböző változatai láthatók.

Példa listák használatára: futamok előállítása (folyt.)

- Első változat: futam és maradék előállítása két függvénnyel

```
(* futam : ('a * 'a -> bool)  -> ('a * 'a list) -> 'a list
   futam p (x, ys) = az x::ys p-t kielégítő első (prefix) futama *)
fun futam p (x, [])     = [x]
  | futam p (x, y::ys) = if p(x, y) then x :: futam p (y, ys) else [x]

(* maradek : ('a * 'a -> bool) ->  ('a * 'a list) -> 'a list
   maradek p (x, ys) = az x::ys p-t kielegítő futama utáni maradéka *)
fun maradek p (x, [])            = []
  | maradek p (x, yys as y::ys) =
                     if p(x ,y) then maradek p (y, ys) else yys

(* futamok1 : ('a * 'a -> bool) -> 'a list -> 'a list list
   futamok1 p xs = az xs p-t kielégítő futamaiból álló lista *)
fun futamok1 p []       = []
  | futamok1 p (x::xs) =
      let val fs = futam p (x, xs)
          val ms = maradek p (x, xs)
      in
          if null ms then [fs] else fs :: futamok1 p ms
      end
```

Példa listák használatára: futamok előállítása (folyt.)

- Hatékonyságot rontó tényezők
  1. `futamok1` kétszer megy végig a listán: először `futam`, azután `maradek`,
  2. `p`-t, bár sohasem változik, paraméterként adjuk át `futam`-nak és `maradek`-nak,
  3. egyik függvény sem használ akkumulátort.
- Javítási lehetőségek
  1. `futam` egy párt adjon eredményül, ennek első tagja legyen a futam, második tagja pedig a maradék; a futam elemeinek gyűjtésére használjunk akkumulátort,
  2. `futam` legyen lokális `futamok2`-n belül,
  3. az `if null ms then [fs] else` szövegrész törölhető: a rekurzió egy hívással később mindenképpen leáll.

Példa listák használatára: futamok előállítása (folyt.)

- Második változat: futam és maradék előállítása egy lokális függvénnyel

```
(* futamok2 : ('a * 'a -> bool) -> 'a list -> 'a list list
   futamok2 p xs = az xs p-t kielégítő futamaiból álló lista
*)
fun futamok2 p []       = []
  | futamok2 p (x::xs) =
      let (* futam : ('a * 'a list) -> 'a list * 'a list
             futam (x, ys) zs = olyan pár, amelynek első tagja az x::ys p-t
                                kielégítő első (prefix) futama a zs elé
                                fűzve, második tagja pedig az x::ys maradéka
          *)
          fun futam (x, []) zs           = (rev(x::zs), [])
            | futam (x, yys as y::ys) zs = if p(x, y)
                                               then futam (y, ys) (x::zs)
                                             else (rev(x::zs), yys);
          val (fs, ms) = futam (x, xs) []
      in
          fs :: futamok2 p ms
      end
```

Példa listák használatára: futamok előállítása (folyt.)

- Harmadik változat: az egyes futamokat és a futamok listáját is gyűjtjük

```
(* futamok3 : ('a * 'a -> bool) -> 'a list -> 'a list list
   futamok3 p xs = az xs p-t kielégítő futamaiból álló lista
*)
fun futamok3 p []       = []
  | futamok3 p (x::xs) =
      let (* futamok : ('a * 'a list) -> 'a list -> 'a list * 'a list
             futamok (x, ys) zs zss = az x::ys p-t kielégítő futamaiból
                                      álló lista zss elé fűzve
          *)
          fun futamok (x, []) zs zss           = rev(rev(x::zs)::zss)
            | futamok (x, yys as y::ys) zs zss =
                if p(x, y)
                    then futamok (y, ys) (x::zs) zss
                else futamok (y, ys) [] (rev(x::zs)::zss)
      in
          futamok (x, xs) [] []
      end;
```

Példa listák használatára: futamok előállítása (folyt.)

- Példák a függvények alkalmazására:

```
futam   op<= (1, [9,19,3,4,24,34,4,11,45,66,13,45,66,99]) =
    [1,9,19];

maradek  op<= (1, [9,19,3,4,24,34,4,11,45,66,13,45,66,99]) =
    [3,4,24,34,4,11,45,66,13,45,66,99];

futamok1 op<= [1,9,19,3,4,24,34,4,11,45,66,13,45,66,99] =
    [[1,9,19], [3,4,24,34], [4,11,45,66], [13,45,66,99]];

futamok1 op<= [99,1] = [[99], [1]];

futamok1 op<= [99] = [[99]];

futamok1 op<= [] = [];
```

ABSZTRAKCIÓ ADATOKKAL

Adatabsztrakció: racionális számok

- A következő előadásokon összetett adatokkal és adatabsztrakcióval foglalkozunk.
- Az adatabsztrakció lényege: összetett adatokkal dolgozó programjainkat úgy építjük föl, hogy
  - az adatokat felhasználó programrészek az adatok szerkezetéről ne tételezzenek fel semmit, csak az előre definiált műveleteket használják,
  - az adatokat definiáló programrészek az adatokat felhasználó programrészektől függetlenek legyenek.
  - A program e két része közötti interfész *konstruktorokból* és *szelektorokból* áll.
- Az összetett adatok közül eddig ennesekkel, rekordokkal és listákkal találkoztunk.
- Első nagyobb példánkban a racionális számok és a rajtuk végezhető műveletek megvalósítását mutatjuk be.
- A racionális számot ábrázolhatjuk egy olyan párral, amelynek az első tagja a számláló *(numerator)* és a második a nevező *(denominator)*.
- Megvalósítjuk a négy aritmetikai alapműveletet: `addRat`, `subRat`, `mulRat`, `divRat`, továbbá az egyenlőségvizsgálatot: `equRat`.

Adatabsztrakció: racionális számok (folyt.)

- Tegyük föl, hogy
  - van olyan *konstruktorműveletünk,* amely egy `n` számlálóból és egy `d` nevezőből létrehozza a racionális számot: `makeRat(n,d)`, továbbá
  - van egy-egy olyan *szelektorműveletünk*, amelyek egy `q` racionális szám számlálóját, ill. nevezőjét előállítják: `num q`, `den q`.
- A jól ismert műveleteket írjuk át SML-programmá:

  $n_1/d_1 + n_2/d_2 = (n_1d_2 + n_2d_1)/(d_1d_2)$, $n_1/d_1 - n_2/d_2 = (n_1d_2 - n_2d_1)/(d_1d_2)$,
  $(n_1/d_1)(n_2/d_2) = (n_1n_2)/(d_1d_2)$, $(n_1/d_1)/(n_2/d_2) = (n_1d_2)/(d_1n_2)$,
  $n_1/d_1 = n_2/d_2$ akkor és csak akkor, ha $n_1d_2 = n_2d_1$.

```
fun addRat(x, y) =
   makeRat(num x * den y + num y * den x, den x * den y)
fun subRat(x, y) =
   makeRat(num x * den y - num y * den x, den x * den y)
fun mulRat(x, y) = makeRat(num x * num y, den x * den y)
fun divRat(x, y) = makeRat(num x * den y, den x * num y)
fun equRat(x, y) = num x * den y = den x * num y
```

Adatabsztrakció: racionális számok (folyt.)

- Az SML-ben az *ennes* létrehozására van *konstruktorműveletünk:* a tagokat kerek zárójelek között, vesszővel elválasztva felsoroljuk, és
- van az *ennes* egy-egy tagját kiválasztó *szelektorműveletünk:* `# i`, ahol `i` az i-edik tag *pozicionális címkéje,* 1-től kezdve.
- Példák: `(3, 4); #1(3, 4); #2(3, 4);`
- Az *ennes* tagjai *mintaillesztéssel* is köthetők névhez, pl. `val (n, d) = (3, 4)`.
- *Gyenge* absztrakcióval valósítjuk meg a típust, a konstruktort és szelektorokat:

```
type rat = int * int;
fun makeRat (n, d) = (n, d) : rat;
fun num (q : rat) = #1 q;
fun den q = #2 (q : rat);
```

- A *gyenge absztrakció* nevet ad egy objektumnak, de *nem rejti el* a megvalósítás részleteit.
- Szükségünk lesz kiíróműveletre is az `n/d` alakú racionális szám kiírásához.

```
fun printRat q =
      print(makestring(num q) ^ "/" ^ makestring(den q) ^ "\n");
```

Adatabsztrakció: racionális számok (folyt.)

- Ezzel racionális számokat megvalósító programunk első változata kész is van. A teljes program:

```
type rat = int * int;
fun makeRat (n, d) = (n, d) : rat;
fun num (q : rat) = #1 q;
fun den q = #2 (q : rat);

fun addRat(x, y) =
   makeRat(num x * den y + num y * den x, den x * den y)
fun subRat(x, y) =
   makeRat(num x * den y - num y * den x, den x * den y)
fun mulRat(x, y) = makeRat(num x * num y, den x * den y)
fun divRat(x, y) = makeRat(num x * den y, den x * num y)
fun equRat(x, y) = num x * den y = den x * num y

fun printRat q =
      print(makestring(num q) ^ "/" ^ makestring(den q) ^ "\n");
```

Adatabsztrakció: racionális számok (folyt.)

- Néhány példa a program használatára:

```
val oneHalf  = makeRat(1,2);
val oneThird = makeRat(1,3);
val twoThird = makeRat(2,3);

printRat oneHalf;
printRat(addRat(oneHalf, oneThird));
printRat(mulRat(oneHalf, oneThird));
printRat(addRat(oneThird, oneThird));

equRat(addRat(oneThird, oneThird), twoThird);

oneThird = oneThird;
addRat(oneThird, oneThird) = twoThird;
```

Adatabsztrakció: racionális számok (folyt.)

- Az utolsó példából, ha kipróbáljuk, láthatjuk, hogy programunk nem *normalizálja*, azaz nem a lehető legegyszerűbb alakban tárolja, ill. írja ki a racionális számokat.
- Segíthetünk a dolgon, ha a konstruktorműveletben a számlálót és a nevezőt a legnagyobb közös osztójukkal elosztjuk; a szelektorműveleteken nem változtatunk:

```
(* gcd : int * int -> int
   gcd (a, b) = a és b legnagyobb közös osztója
*)
fun gcd (a, 0) = a
  | gcd (a, b) = gcd(b, a mod b)

fun makeRat (n, d) =
      let val g = gcd(n, d) in (n div g, d div g) : rat end;
```

- A racionális számokat normalizált alakjukban tároljuk, ezért nemcsak a kiírás, hanem az egyenlőségvizsgálat is helyes eredményt ad:

```
printRat(addRat(oneThird, oneThird));
addRat(oneThird, oneThird) = twoThird;
```

- A normalizáláshoz csak egyetlen helyen kellett változtatni a programon!

Adatabsztrakció: racionális számok (folyt.)

Adatabsztrakciós korlátok a racionális számok csomagban

```
          ---------------------------------------------
---------      Racionális számot használó programok       ---------
          ---------------------------------------------
                   Racionális szám a feladattérben
          ---------------------------------------------
---------       addRat subRat mulRat divRat equRat        ---------
          ---------------------------------------------
              Racionális szám mint számláló és nevező
          ---------------------------------------------
--------- konstruktor: makeRat; szelektorok: num, den ---------
          ---------------------------------------------
                         Racionális szám mint pár
          ---------------------------------------------
---------     konstruktor: ( , ) ; szelektorok:  #1, #2   ---------
          ---------------------------------------------
                   A pár megvalósítása SML-ben
```

Adatabsztrakció: racionális számok (folyt.)

- Az absztrakciós korlátok elszigetelik egymástól a program egyes részeit.
- Előnye, hogy a programokat egyszerűbb karbantartani és módosítani, pl. az adatok ábrázolását megváltoztatni.
- Pl. a racionális szám normalizálható a létrehozása helyett akkor, amikor a számlálójára vagy a nevezőjére van szükségünk. Ha gyakran hozunk létre racionális számokat, de csak ritkán használjuk a számlálóját vagy a nevezőjét, akkor az utóbbi megoldás a hatékonyabb.

```
fun num (q : rat) =
       let val (n, d) = q; val g = gcd(n, d) in n div g end;
fun den (q : rat) =
       let val (n, d) = q; val g = gcd(n, d) in d div g end;
```

- A `makeRat` függvény nem normalizáló változatát használjuk; a program többi része nem változik.

```
printRat(addRat(oneThird, oneThird));
addRat(oneThird, oneThird) = twoThird;
equRat(addRat(oneThird, oneThird), twoThird) = true;
```

Adatabsztrakció: racionális számok (folyt.)

- *Adatokról* szólva nem elég annyit mondanunk, hogy „adat az, amit az adott konstruktorok és szelektorok megvalósítanak”.
- Nyilvánvaló, hogy konstruktorok és szelektorok csak bizonyos halmaza alkalmas pl. a racionális számok megvalósítására.
- Racionális számok esetén a konstruktornak és a szelektoroknak garantálniuk kell az alábbi feltételek (axiómák) teljesülését:

```
(* PRE : d > 0 *)
 x = makeRat(n, d);
 n = num x
 d = den x
```

- Eggyel alacsonyabb absztrakciós szinten a pár-ábrázolásnak is ki kell elégítenie a következő feltételeket:

```
q = (x, y)
x = #1 q
y = #2 q
```

Adatabsztrakció: racionális számok (folyt.)

- Bármely megvalósítás, amely ezeket a feltételeket kielégíti, megfelel, például a következő is:

```
exception Cons of string;
fun cons (x, y) =
      let fun dispatch 0 = x
            | dispatch 1 = y
            | dispatch _ = raise Cons "argument not 0 or 1"
      in  dispatch
      end;
fun fst z = z 0;
fun snd z = z 1;
```

- A tulajdonságleíró egyenletek

```
q = cons(n, d)
n = fst q
d = snd q
```

- Vegyük észre, hogy a racionális számot megvalósító `cons` objektum: *függvény!* `fst` és `snd` *üzenetet küld* az objektumnak. Ennek a programozási stílusnak ezért *üzenetküldés* a neve.

Adatabsztrakció: racionális számok (folyt.)

- Példa:

```
val q = cons(1, 2);
fst q = 1; snd q = 2;
```

- A racionális számok konstruktorának és a szelektorainak megvalósítása üzenetküldéssel:

```
fun makeRat (n, d) =
      let val g = gcd(n, d) in cons(n div g, d div g) end;
fun num q = fst q;
fun den q = snd q;
```

- Racionális számokat megvalósító csomagunk nagy hibája, hogy *gyenge absztrakciót* valósít meg, azaz nem rejti el a megvalósítás részleteit; a programozóra bízza, hogy az absztrakciós korlátokat milyen mértékben tartja be. Ez hibák forrása.
- A megvalósítás részleteit *erős absztrakcióval,* modulok segítségével rejthetjük el a külvilág elől. Az „implementációs” modul neve az SML-ben: `structure`, az (opcionális) „interfészmodul” neve pedig: `signature`.

```
structure name = struct ... end
signature name = sig ... end
```

ABSZTRAKCIÓ ADATOKKAL

Felhasználói adattípusok: ismét a `datatype` deklarációról

- `person` néven új összetett típust hozunk létre:

```
datatype person = King
                | Peer of string * string * int
                | Knight of string
                | Peasant of string
```

- Az új típusnak négy *adatkonstruktora* (röviden: *konstruktora)* van: `King`, `Peer`, `Knight` és `Peasant`.
- `King` ún. *adatkonstruktorállandó*, a többi ún. *adatkonstruktorfüggvény.*
- Az adatkonstruktoroknak is van típusuk:

```
King :    person
Peer :    string * string * int -> person
Knight :  string -> person
Peasant : string -> person
```

A `datatype` deklaráció (folyt.)

```
King :    person
Peer :    string * string * int -> person
Knight :  string -> person
Peasant : string -> person
```

- `King` (király) csak egy van, ezért definiálhattuk konstruktorállandóként.
- A `Peer`-t (főnemest) nemesi címe (`string`), birtokának neve (`string`) és sorszáma (`int`) azonosítja.
- A `Knight`-ot (lovagot) és a `Peasant`-ot (parasztot) csupán a neve (`string`) azonosítja.
- Példa a `person` adattípus alkalmazására:

```
val persons = [King, Peasant "Jack Cade", Knight "Gawain",
               Peer("Duke", "Norfolk", 9)];

> val persons = [King, Peasant "Jack Cade", ...] : person list
```

- Az egyes esetek mintaillesztéssel választhatók szét.
- Minden esetet le kell fedni mintával; ha nem, figyelmeztetést kapunk.
- A minták tetszőlegesen összetettek lehetnek.

A `datatype` deklaráció (folyt.)

- Az alábbi példában a négy közül az egyik a `Peasant name` *minta*, és benne `name` a *mintaazonosító*.

```
(* title : person -> string
   title p = p megszólítása *)
fun title King = "His Majesty the King "
  | title (Peer (deg, ter, _)) = "The " ^ deg ^ " of " ^ ter
  | title (Knight name) = "Sir " ^ name
  | title (Peasant name) = name
```

- A `sirs` függvény az összes `Knight` nevét összegyűjti a `person` típusú személyek egy listájából (a változatok sorrendje *fontos* az _ miatt!):

```
(* sirs : person list -> string list
   sirs ps = az összes Knight nevének listája *)
fun sirs [] = []
  | sirs ((Knight s)::ps) = s::sirs ps
  | sirs (_::ps) = sirs ps
```

A `datatype` deklaráció (folyt.)

- Ha más lenne a változatok sorrendje, a `_::ps` minta nemcsak a `King`-re, a `Peer`-re és a `Peasant`-ra illeszkedne (ti. ezek helyett áll a példában), hanem a `Knight`-ra is.
- Az összes diszjunkt eset fölsorolása segíti az algoritmus helyességének belátását, bizonyítását.
- Azért vontunk össze három esetet egyetlen változatban, mert a részletezésük hosszabbá tenné a program szövegét is, végrehajtását is.
- A bizonyítás nem okoz gondot, ha a függvény harmadik sorát (`sirs (_::ps) = sirs ps`) *feltételes egyenletnek* tekintjük:

$$\texttt{sirs(p::ps) = sirs ps}\ \textbf{if}\ \forall \texttt{s}\cdot\texttt{p}\neq\texttt{Knight s}.$$

A `datatype` deklaráció (folyt.)

- A sorrend még fontosabb a következő példában, amelyben személyek hierarchiáját vizsgáljuk. Itt 16 helyett csak 7 esetet kell megkülönböztetnünk: azokat, amelyek *igaz* eredményt adnak.

```
(* superior : person * person -> bool
   superior (p, r)= igaz, ha p magasabb rangú r-nél *)
fun superior (King, Peer _) = true
  | superior (King, Knight _) = true
  | superior (King, Peasant _) = true
  | superior (Peer _, Knight _) = true
  | superior (Peer _, Peasant _) = true
  | superior (Knight _, Peasant _) = true
  | superior _ = false
```

Felsorolásos típus `datatype` deklarációval

- Gyakori, hogy egy név csak néhány különböző értéket vehet fel (azaz a név által felvehető értékek halmaza kis számosságú), ilyen esetben érdemes *felsorolásos típust* létrehozni a `datatype` deklarációval. Pl.

```
datatype degree = Duke | Marquis | Earl | Viscount | Baron
```

- A felsorolásos típusnak csak *konstruktorállandói* vannak. Az új típus alkalmazásához a `person` típust újra deklarálnunk kell:

```
datatype person = King
                | Pear of degree * string * int
                | Knight of string
                | Peasant of string
```

Felsorolásos típus `datatype` deklarációval (folyt.)

- A `degree` típusú adatok feldolgozásakor külön-külön elemezzük az előforduló eseteket, pl.

```
(* lady : degree -> string
   lady p = p főnemes hitvesének rangja *)
fun lady Duke     = "Duchess "
  | lady Marquis  = "Marchioness"
  | lady Earl     = "Countess"
  | lady Viscount = "Viscountess"
  | lady Baron    = "Baroness"
```

- A belső `bool` típushoz hasonló `Bool` típust és hozzá a `Not` függvényt például így is deklarálhatnánk, ill. definiálhatnánk:

```
datatype Bool = True | False
(* Not : Bool -> Bool
   Not b = b negáltja *)
fun Not True = False | Not False = True
```

Polimorf adattípusok

- Láttuk, hogy a `list` *postfix* pozíciójú *típusoperátor,* nem típus: a `datatype` deklaráció az adatkonstruktorok mellett *típuskonstruktort* is létrehoz.
- A belső `'a list` típushoz hasonló `'a List` listát és vele együtt a `Nil` és a `Cons` *adatkonstruktorokat* például így definiálhatjuk:

```
datatype 'a List = Nil | Cons of 'a * 'a List;
```

- A `Cons` *adatkonstruktorfüggvény* alkalmazásával elég körülményes a listák létrehozása. Az 1, 2, 3, 4 sorozatot például így kell megadni:

```
Cons(1, Cons(2, Cons(3, Cons(4, Nil))));
```

- Bevezethetjük az *infix* pozíciójú `:::` adatkonstruktoroperátort:

```
infixr 5 ::: ; val op ::: = Cons
```

- A *hatospont* infix helyzetét magában a típusdeklarációban is definiálhatjuk:

```
infixr 5 ::: ; datatype 'a List = Nil | ::: of 'a * 'a List
```

Polimorf adattípusok: megkülönböztetett egyesítés

- Következő példánk két típus *megkülönböztetett egyesítése,* más néven diszjunkt uniója:

```
datatype ('a, 'b) disun = In1 of 'a | In2 of 'b
```

- Itt három dolgot definiáltunk:

  1. a kétargumentumú `disun` típusoperátort,
  2. az `In1 : 'a -> ('a, 'b) disun` és
  3. az `In2 : 'b -> ('a, 'b) disun` adatkonstruktorfüggvényeket.

- `('a, 'b) disun` az `'a` és `'b` típusok megkülönböztetett egyesítése. *Megkülönböztetettnek* nevezzük az egyesítést, mert később is bármikor meg tudjuk mondani, hogy egy `('a, 'b) disun` típusú pár egyik vagy másik eleme melyik alaptípusból származik. Az új típusba tartozó értékek `In1 x` alakúak, ha `x` `'a` típusú, és `In2 y` alakúak, ha `y` `'b` típusú.

- Az `In1` és `In2` konstruktorfüggvények olyan *címkének* tekinthetők, amelyek az `'a` típust megkülönböztetik a `'b` típustól.

Megkülönböztetett egyesítés (folyt.)

- A megkülönböztetett egyesítés lehetővé teszi, hogy különböző típusokat használjunk ott, ahol egyébként csak egyetlen típust használhatnánk (vö. objektum-orientált programozás, ahol pl. egy *alakzat* osztálynak *téglalap, háromszög* vagy *kör* nevű leszármazottai lehetnek).
- Az SML-ben megkülönböztetett egyesítéssel tudunk létrehozni *különböző típusú elemekből* álló listát:

```
[In2 King, In1 "Skócia"] : ((string, person) disun) list;
[In1 "zsarnok", In2 1040] : ((string, int) disun) list
```

- A lehetséges eseteket most is *mintaillesztéssel* elemezhetjük, pl.

```
(* concat : (string, 'a) disun list -> string
   concat d = a d diszjunkt unió In1 címkéjű
              elemeinek konkatenációja        *)
fun concat [] = ""
  | concat (In1 s :: ls) = s ^ concat ls
  | concat (In2 _ :: ls) = concat ls;
```

Megkülönböztetett egyesítés (folyt.)

- Egy példa `concat` alkalmazására:

```
concat [In1 "Ó! ", In2 King, In1 "Skócia"];

> val it = "Ó! Skócia" : string
```

- Az `In1` konstruktorfüggvény típusa `'a -> ('a, 'b) disun`, ezért a `string` típusú `"Ó!"` argumentumra alkalmazva `(string, 'b) disun` típusú érték az eredmény.
- Az `In2` konstruktorfüggvény típusa `'b -> ('a, 'b) disun`, ezért a `person` típusú `King` kifejezésre alkalmazva `('a, person) disun` típusú érték az eredmény.
- Az `[In1 "Ó!", In2 King, In1 "Skócia"]` kifejezésben mindkét alaptípust lekötjük, ezért ennek a listának a típusa: `((string, person) disun) list`.
- Az `[In2 "Ó", In2 King, In1 "Skócia"]` kifejezés kiértékelése hibajelzést eredményez, mert a `'b` típusváltozót nem lehet ugyanabban a kifejezésben egyszer így, másszor úgy lekötni.

LOKÁLIS ÉRVÉNYŰ DEKLARÁCIÓ, EGYIDEJŰ DEKLARÁCIÓ

Deklaráció lokális érvényű deklarációval: `local`-deklaráció

- Már megismertük a lokális deklarációt használó *kifejezést,* az ún. `let`-kifejezést.
- Lokális deklarációt használó *deklarációt* használunk, ha egyes deklarációkat fel akarunk használni más deklarációkban, miközben *el akarjuk rejteni* őket a program többi része elől.
- Szintaxisa: `local` *d1* `in` *d2* `end` ahol *d1* egy nemüres deklarációsorozat, *d2* egy másik nemüres deklarációsorozat.
- Példa:

```
(* length : 'a list -> int
   length zs = a zs lista hossza *)
local
      (* len : 'a list * int -> int
         len (zs, n) = az n és a zs lista hosszának összege *)
      fun len ([], n)     = n
        | len (_::zs, n) = len(zs, n+1)
in
   fun length zs = len(zs, 0)
end
```

Deklaráció lokális érvényű deklarációval: `local`-deklaráció (folyt.)

- Láttuk, hogy a `let`-kifejezést milyen jól lehet használni lokális értékek létrehozására, többek között lokális függvények definiálására.
- Amikor egy függvényt egy másik függvény *belsejében* egy `let`-kifejezésben definiálunk, akkor a lokális függvény törzse az őt felhasználó függvény *hatókörében* van, ezért a lokális függvény törzsében az utóbbi paramétere látszik, használható.
- Ha ellenben `local`-deklarációt használunk, akkor a lokális függvény törzse *nincs* az őt felhasználó függvény hatókörében, ezért a lokális függvény törzsében az utóbbi paramétere nem látszik, nem használható.
- Milyen esetben kell mégis `local`-deklarációt alkalmaznunk? Akkor, ha a lokális függvényt az őt felhasználó függvény *egynél több klózában* akarjuk alkalmazni. Példa:

```
local fun g x = ... x ...
in
   fun f 0 y = ... g y ...
     | f _ y = ... g y ...
end
```

- Ha ilyen esetekben `let`-kifejezést használnánk, akkor a lokális függényt minden klózban újra kellene definiálnunk.

Egyidejű deklaráció, újra

- Egyidejű deklarációt kell használni kölcsönösen rekurzív függvények definiálására. Példa:

```
fun even 0 = true | even n = odd(n-1)
and odd 0 = false | odd n = even(n-1);
```

- Egyidejű deklarációt használhatunk két vagy több kötés egyidejű felcserélésére. Példa:

```
val v1 = "a"; val v2 = "z"; val v1 = v2 and v2 = v1;
```

- Egyidejű deklarációt használunk, ha fölülről lefelé haladva akarunk programot írni. Példa:

```
fun length zs = len zs 0
and len [] i = i | len (_ :: xs) i = len xs (i+1);
```

- A polimorf függvényeket a szekvenciális és az egyidejű deklaráció eltérően kezeli, mivel a típuslevezetést az SML-értelmező a teljes kifejezésre alkalmazza. Példa:

```
fun id x = x; fun hi () = id 3; fun nr () = id 4.0;
```

```
fun id x = x  and hi () = id 3  and nr () = id 4.0;
```

Az első sor kiértékelésekor `id 'a -> 'a` típusú. A második sor kiértékelésekor `id int -> int` és `real -> real` típusú lenne egyszerre, ami lehetetlen.

ESETSZÉTVÁLASZTÁS, OPCIONÁLIS ÉRTÉK

Esetszétválasztás (case)

```
case E of P1 => E1 | P2 => E2 |  ···  | Pn => En
```

Az SML-értelmező – balról jobbra és fölülről lefelé haladva – megpróbálja `E`-t `P1`-re illeszteni, ha nem sikerül, `P2`-re s.í.t. A `case`-kifejezés eredménye az `E` kifejezésre illeszkedő első `Pi` mintához tartozó `Ei` kifejezés lesz.

A `case` is csak szintaktikus édesítőszer, ui. helyettesíthető `fn`-jelöléssel:

```
(fn P1 => E1 | P2 => E2 |  ···  | Pn => En) E
```

Például a `lady` függvényt így is definiálhattuk volna:

```
datatype degree = Duke | Marquis | Earl | Viscount | Baron
```

```
(* lady : degree -> string
   lady p = p főnemes
            hitvesének rangja *)
fun lady p =
      case p of
        Duke     => "Duchess "
      | Marquis  => "Marchioness"
      | Earl     => "Countess"
      | Viscount => "Viscountess"
      | Baron    => "Baroness"
```

```
(* lady : degree -> string
   lady p = p főnemes
            hitvesének rangja *)
fun lady p =
      (fn
        Duke     => "Duchess "
      | Marquis  => "Marchioness"
      | Earl     => "Countess"
      | Viscount => "Viscountess"
      | Baron    => "Baroness"
      ) p
```

Opcionális érték kezelése (`'a option`)

```
datatype 'a option = NONE | SOME of 'a
```

Függvények az `Option` könyvtárból:

```
val getOpt        : 'a option * 'a -> 'a
val isSome        : 'a option -> bool
val valOf         : 'a option -> 'a
val filter        : ('a -> bool) -> 'a -> 'a option
val map           : ('a -> 'b) -> 'a option -> 'b option
val mapPartial    : ('a -> 'b option) -> ('a option -> 'b option)
```

getOpt (xopt, d) = x if xopt is SOME x, d otherwise.

isSome xopt = true if xopt is SOME x, false otherwise.

valOf xopt = x if xopt is SOME x, raises Option otherwise.

filter p x = SOME x if p x is true, NONE otherwise.

map f xopt = SOME(f x) if xopt is SOME x, NONE otherwise.

mapPartial f xopt = f x if xopt is SOME x, NONE otherwise.

Példák opcionális értékek kezelésére

- Egészlista legnagyobb elemének kiválasztása

  Üres listának nincs legnagyobb eleme; egyelemű lista egyetlen eleme a „legnagyobb”; legalább kételemű lista legnagyobb eleme az első elem és a maradéklista elemei közül a legnagyobb.

```
(* maxl : int list -> int option
   maxl ns = az ns egészlista legnagyobb eleme *)
fun maxl []       = NONE    (* üres *)
  | maxl [n]      = SOME n  (* egyelemű *)
  | maxl (n::ns) =          (* legalább kételemű *)
                SOME(Int.max(n, valOf(maxl ns)))
```

- Füzér elején álló karaktersorozat átalakítása egész számmá

```
val Int.fromString : string -> int option (* Overflow *)

Int.fromString s = SOME i if a decimal integer numeral can be scanned
          from a prefix of string s, ignoring any initial whitespace;
          NONE otherwise.  A decimal integer numeral, after any initial
          whitespace, must have the form: [+~-]?[0-9]+

Int.fromString "1234"; Int.fromString "-1234"; Int.fromString "~1234";
Int.fromString "+1234"; Int.fromString "+007"; Int.fromString "alma"
```

AZ ORDER TÍPUS

Az order típus

Az order típus definíciója (ld. General.sig)

```
datatype order = LESS | EQUAL | GREATER
```

```
[order] is used as the return type of comparison functions.
```

Példák az SML-alapkönyvtárból (SML Basis Library)

```
Int.compare      : int * int -> order
Char.compare     : char * char -> order
Real.compare     : real * real -> order
String.compare   : string * string -> order
Time.compare     : time * time -> order
```

KIVÉTELKEZELÉS

Kivételkezelés

- Kivételt az `exception` kulcsszóval deklarálunk, a `raise` kulcsszóval jelzünk, a `handle` kulcsszóval bevezetett kifejezésben kezelünk.
- A kivételt általában hibák jelzésére használjuk, de használhatjuk visszalépés kezelésére is (az utóbbira példa a `valtas` függvényben látható a következő fóliák egyikén).
- A kivételdeklaráció az adattípus-deklarációra (`datatype`-deklarációra) emélkeztet: `exception` *`name`*`;` `exception` *`name`* `of` *`ty`*.
- Példák kivétel deklarálására: `exception Valt; exception Hiba of char * int.`
- A kivételkonstruktor állandó vagy függvény lehet.
  Példák: `Valt : exn, Hiba : char * int -> exn.`
- A kivételdeklaráció speciális adattípus-deklaráció, ui. az utóbbival ellentétben dinamikusan *bővíti* a kivételkonstruktorok halmazát.
- Kivétel jelzésére a `raise` kulcsszóval kezdődő speciális kifejezést kell használunk.
- Példák kivétel jelzésére: `raise Valt, raise Hiba(#"N", 4).`
- `raise` (hipotetikus) típusa: `exn -> 'a`. (A `raise` nem függvény!)

Kivételkezelés (folyt.)

- `raise` alkalmazásának eredménye az ún. *kivételcsomag*. Mivel a kivételcsomag polimorf típusú, bármely más típussal kompatíbilis.
- A kivétel kezelése a `case`-szerkezetre emlékeztet: `E handle P1 => E1 | ··· | Pn => En`
- Ha `E` „közönséges” értéket ad eredményül, a kivételkezelő egyszerűen továbbadja az eredményt.
- Ha `E` eredménye *kivételcsomag*, az SML megpróbálja illeszteni a `P1, ···, Pn` mintákra.
  - Ha `Pi` (`1 <= i <= n`) az első illeszkedő minta, akkor `Ei` a kivételkezelő eredménye.
  - Ha egyetlen minta sem illeszkedik a kivételcsomagra, a kivételkezelő továbbpasszolja.
- Példák kivétel kezelésére:
  - ```
    erme :: valtas (erme::ermelista) (osszeg-erme)
                handle Valt => valtas ermelista osszeg
    ```
  - `(fn i => kivKez i handle Hiba(c, i) => (print(str c); i-1)) 0`
- `handle` (hipotetikus) típusa: `exn -> 'a`. (A `handle` nem függvény!)
- Legyen `Ex` `exn` típusú kivétel, `e` pedig tetszőleges kifejezés; ekkor az `e handle Ex => c` (kivételkezelőt tartalmazó) kifejezésben `c`-nek `e`-vel azonos típusúnak kell lennie.
    ```

Kivételkezelés (folyt.)

- A következő programrészletek példák kivétel deklarálására, jelzésére és kezelésére

```
exception Ex of string;

(raise Ex "ex") handle Ex t => t^"ption";
(raise Div) handle Ex t => t^"ption";

exception Hiba of char * int;

fun kivKez  0 = raise Hiba(#"N", 4)
  | kivKez ~9 = raise Hiba(#"M", 9)
  | kivKez  n = n;

fun kivKezel i =
        kivKez i handle Hiba(#"N", i) => (print "N"; i)
                      | Hiba(#"M", i) => (print "M"; i-1);

kivKezel 0  = 4;
kivKezel ~9 = 8;
kivKezel 7  = 7;
```

Kivételkezelés (folyt.)

- Példa visszalépés programozására kivételkezeléssel

```
exception Valt;

(* valtas : int list -> int -> int list
   valtas ermelista osszeg = a lehető legkevesebb érmét tartalmazó olyan
                             érmelista, amely elemeinek összege osszeg
   PRE : ermelista = a váltásra használható érmék csökkenő értéksorrendben
         osszeg >= 0
*)
fun valtas _ 0  = []
  | valtas [] _ = raise Valt
  | valtas (erme::ermelista) osszeg =
      if (* ha az adott érme túl nagy, a következővel próbálkozunk *)
         erme > osszeg then valtas ermelista osszeg
         (* ha az adott érmétől kezdve sikerül felváltani, készen vagyunk;
            ha nem, a következő érmével kezdjük újra az adott ponttól *)
      else erme :: valtas (erme::ermelista) (osszeg-erme)
                                handle Valt => valtas ermelista osszeg;

valtas [50, 20, 10, 5, 2] 197 = [50, 50, 50, 20, 20, 5, 2];
```

Kivételkezelés (folyt.)

- A leggyakoribb belső kivételek

Név	*Művelet, amely a kivételt kiválthatja*
`Bind`	Értékdeklarációban a jobb oldali kifejezés nem illeszkedik a bal oldali mintára.
`Chr`	`chr pred succ`
`Div`	`/ div mod`
`Domain`	Az érték kilóg az értelmezési tartományból.
`Empty`	`hd tl last`
`Fail`	`compile load loadOne  Fail : string -> exn`
`Interrupt`	Megszakítás ctrl/c-vel.
`Io`	Ki/beviteli hiba. `Io : {cause : exn, function : string, name : string}`
`Match`	Mintaillesztési hiba `case` és `handle` kifejezésben, vagy függvényalkalmazásban.
`Option`	Hiba egy `Option` könyvtárbeli függvény alkalmazásakor.
`Overflow`	`~ + - * / div mod abs ceil floor round trunc`
`Size`	`^ array concat fromList implode tabulate translate vector`
`Subscript`	`copy drop extract nth sub substring take update`

- `Fail` és `Io` kivételkonstruktorfüggvények, a többi `exn` típusú kivételkonstruktorállandó.
- `Option` csak `Option.Option` néven használható, ha nem nyitjuk meg az `Option` könyvtárat.

Kivételkezelés (folyt.)

- Példák belső kivételek jelzésére

```
- val (x::xs) = [];
! Uncaught exception:
! Bind
- chr 256;
! Uncaught exception:
! Chr
- Math.sqrt(~1.0);
! Uncaught exception:
! Domain
- fun f 0 = "igaz" | f 1 = "hamis"; f 2;
...
! Uncaught exception:
! Match
- String.sub("alma",4);
! Uncaught exception:
! Subscript
```

VISSZALÉPÉSES PROGRAMOZÁS

n vezér a sakktáblán

Hányféleképpen rakható n vezér egy $n * n$ méretű sakktáblára úgy, hogy ne üssék egymást?

- A sakktáblát egy olyan `n` hosszúságú sorvektorral írjuk le, amelynek egy-egy mezőjébe írt `s` szám a sakktábla egy-egy oszlopába lerakott vezér sorának a sorszáma (`0<=s<n`).
- Példa `n=4` esetén:

```
   +---+---+---+---+
   | 2 | 0 | 3 | 1 |
   +---+---+---+---+
     0   ---->  n-1

   +---+---+---+---+
 0 |   | q |   |   |
   +---+---+---+---+
 | |   |   |   | q |
 | +---+---+---+---+
 V | q |   |   |   |
   +---+---+---+---+
n-1|   |   | q |   |
   +---+---+---+---+
```

- A sorvektort listával valósítjuk meg.
- Egy listához *balról könnyű* új elemeket fűzni, ezért a táblát és a vezérek helyzetét leíró listát függőlegesen tükrözzük.

```
   ...-+---+---+---+
       | 3 | 0 | 2 |
   ...-+---+---+---+
    n-1  <----   0

   ...-+---+---+---+
 0     |   | q |   |
   ...-+---+---+---+
 |     |   |   |   |
 | ...-+---+---+---+
 V     |   |   | q |
   ...-+---+---+---+
n-1    | q |   |   |
   ...-+---+---+---+
```

- Egy `n` hosszúságú sorvektor `i`-edik eleme az `n-(i+1)`-edik elem a listában.

n vezér a sakktáblán (folyt.)

Azt, hogy az új vezért ütik-e más vezérek a táblán, a *sorvektor* vizsgálatával dönthetjük el: az egyes elemek sorszáma által meghatározott oszlopban az értékük által meghatározott sorban vezér van. A lerakás feltételei a következők:

1. Az új vezér nem kerülhet egy sorba egyetlen más vezérrel sem, azaz az új listalem *értéke* nem fordulhat elő a lista már felépített részében.
2. Az új vezér átlós irányban sem lehet egy vonalban más vezérrel. Ez azt jelenti, hogy ha a lista elejére (a 0. elemébe!) az `s` sorindexet akarjuk írni, akkor az `i`-edik listaelem értéke, feltéve, hogy van ilyen elem, nem lehet `s-i`, sem `s+i`.

   A következő példa megvilágítja az esetet.

Ha a tábla 1. sorába akarjuk lerakni az új vezért, akkor az `x`-szel megjelölt mezőket kell megvizsgálnunk. Az új mezővel együtt a listának már három eleme van. Az 1-es indexű elem nem lehet s+1, sem s-1, a 2-es indexű elem pedig nem lehet s+2, sem s-2.

```
          ...-+---+---+---+
                1 |   |   |
          ...-+---+---+---+

            n-1 <--- 1   0
          ...-+---+---+---+
      0       |   | x |   |
          ...-+---+---+---+
      1       | q |   |   |
          ...-+---+---+---+
      |       |   | x |   |
      V   ...-+---+---+---+
    n-1       |   |   | x |
          ...-+---+---+---+
```

A lista rekurzív algoritmussal dolgozható fel.

n vezér a sakktáblán: „ütésben van”-vizsgálat

```
(* utesbenVan : int list -> bool
   utesbenVan zs = igaz, ha a (hd zs) vezért legalább egy
                   (tl zs)-beli vezér üti
 *)
fun utesbenVan [] = false
  | utesbenVan (z::zs) =
      let
          (* uV : int -> int -> int list -> bool
             uV s1 s2 rs = igaz, ha a z vezért legalább egy
                           rs-beli vezér üti
          *)
          fun uV _ _ [] = false
            | uV s1 s2 (r::rs) = z = r orelse
                                 s1 = r orelse
                                 s2 = r orelse
                                 uV (s1-1) (s2+1) rs
      in
          uV (z-1) (z+1) zs
      end
```

n vezér a sakktáblán: egy megoldás előállítása

```
exception Zsakutca

(* vezerek0 : int -> int list
   vezerek0 n = a feladvány egy megoldása n vezér esetén
*)
fun vezerek0 n =
  let (* vez : int -> int list -> int list
         vez z zs = egy megoldás n vezér esetén *)
      fun vez z zs =
            if   (* vissza kell lépni, ha z=0 és ütésben van, ... *)
               z = 0 andalso utesbenVan zs orelse
                 (* ... vagy ha már minden sort megpróbált *)
               z = n
            then raise Zsakutca
            else if length zs = n
            then rev zs (* megvan egy megoldás *)
            else   (* folytatja a 0. sortól a következő vezér lerakásával,
                      és ha elakad, visszalép a következő sorra *)
                 vez 0 (z::zs) handle Zsakutca => vez (z+1) zs
  in
       (* a 0. sorral kezd: ilyenkor nem lehet ütésben *)
      vez 0 []
  end
```

n vezér a sakktáblán: több megoldás előállítása visszalépéssel

```
(* vezerek1 : int -> int list list
   vezerek1 n = a feladvány összes megoldásának listája n vezér esetén
*)
fun vezerek1 n =
  let (* vez: int -> int list -> int list list
         vez z zs: az összes megoldás listája n vezér esetén
      *)
      fun vez z zs =
            if   (* vissza kell lépni, ha z=0 és ütésben van,
                    vagy ha már minden sort megpróbált *)
               z = 0 andalso utesbenVan zs orelse z = n
            then raise Zsakutca
            else if length zs = n
            then [rev zs] (* megvan egy megoldás, listában adja vissza *)
            else   (* folytatja a következő sorral, majd hozzáfűzi ... *)
                 (vez (z+1) zs handle Zsakutca => []) @
                   (* ... a 0. sortól kezdve a következő vezér lerakásával
                      kapott megoldásokat *)
                 (vez 0 (z::zs) handle Zsakutca => [])
  in
       (* a 0. sorral kezd: ilyenkor nem lehet ütésben *)
      vez 0 []
  end
```

n vezér a sakktáblán: több megoldás előállítása listák listájával

Az előző megoldás sémája sokszor használható, de ebben az egyszerű esetben felesleges: a kivétel jelzése helyett üres listát adhatunk eredményül, hiszen a kivételkezelők is csak ezt teszik.

```
(* vezerek2 : int -> int list list
   vezerek2 n = a feladvány összes megoldásának listája n vezér esetén
*)
fun vezerek2 n =
  let (* vez: int -> int list -> int list list
         vez z zs: az összes megoldás listája n vezér esetén
      *)
      fun vez z zs =
            if z = 0 andalso utesbenVan zs orelse z = n
            then []
            else if length zs = n
            then [rev zs]
            else vez (z+1) zs @ vez 0 (z::zs)
  in
      vez 0 []
  end
```

n vezér a sakktáblán: több megoldás előállítása listák listájával (folyt.)

Akkumulátor alkalmazásával:

```
(* vezerek3 : int -> int list list
   vezerek3 n = a feladvány összes megoldásának listája
                n vezér esetén
*)
fun vezerek3 n =
  let (* vez: int -> int list -> int list list -> int list list
         vez z zs: az összes megoldás listája n vezér esetén
      *)
      fun vez z zs zss =
            if z = 0 andalso utesbenVan zs orelse z = n
            then zss
            else if length zs = n
            then rev zs :: zss
            else vez 0 (z::zs) (vez (z+1) zs zss)
  in
     vez 0 [] []
  end
```

HALMAZMŰVELETEK

Halmazműveletek: „benne van-e?” (isMem) és „ha új, tedd bele” (newMem)

- isMem igaz értéket ad eredményül, ha a keresett elem benne van a listában.

```
(* isMem : ''a * ''a list -> bool
   isMem(x, ys) = x eleme-e ys-nek
*)
fun op isMem (_, []) = false
  | op isMem (x, y::ys) = x = y orelse op isMem(x, ys)
infix isMem
```

Megjegyzés: az op operátor nélkül az infix deklarációt követően a függvénydefiníciót nem lehetne újrafordítani.

- newMem egy új elemet rak be egy listába, ha még nincs benne.

```
(* newMem : ''a * ''a list -> ''a list
   newMem(x, xs) = [x] és xs listaként ábrázolt uniója
*)
fun newMem (x, xs) = if x isMem xs
                     then xs
                     else x::xs
```

newMem, ha a sorrendtől eltekintünk, halmazt hoz létre.

Halmazműveletek: „listából halmaz” (`setof`)

- `setof` halmazt készít egy listából úgy, hogy kiszedi belőle az ismétlődő elemeket. Rossz hatékonyságú.

```
(* setof : ''a list -> ''a list
   setof xs = xs elemeinek listaként ábrázolt halmaza
*)
fun setof []       = []
  | setof (x::xs) = newMem(x, setof xs)
```

- Öt halmazműveletet definiálunk:
  - unió (`union`, $S \cup T$),
  - metszet (`inter`, $S \cap T$),
  - részhalmaza-e (`isSubset`, $T \subseteq S$),
  - egyenlők-e (`isSetEq`, $S = T$),
  - hatványhalmaz (`powerSet`, pS).
- Rendezetlen listával ábrázoljuk most a halmazokat.
- Gyakorlófeladatnak meghagyjuk a halmazműveletek megvalósítását rendezett listákkal és rendezett fákkal. (A vizsgán is kaphatnak ilyen feladatokat.)

Halmazműveletek: „unió” (union) és „metszet” (inter)

- Két halmaz uniója

```
(* union : ''a list * ''a list -> ''a list
   union(xs, ys) = az xs és ys elemeiből álló halmazok uniója
*)
fun union ([], ys)     = ys
  | union (x::xs, ys) = newMem(x, union(xs, ys))
```

- Két halmaz metszete

```
(* inter : ''a list * ''a list -> ''a list
   inter(xs, ys) = az xs és ys elemeiből álló halmazok metszete
*)
fun inter ([], _)      = []
  | inter (x::xs, ys) = let val zs = inter(xs, ys)
                        in
                           if x isMem ys then x::zs else zs
                        end
```

Halmazműveletek: „részhalmaza-e” (`isSubset`) és „egyenlők-e” (`isSetEq`)

- Részhalmaza-e egy halmaz egy másiknak?

```
(* isSubset : ''a list * ''a list -> bool
   isSubset (xs, ys) = az xs elemeiből álló halmaz részhalmaza-e
                       az ys elemeiből álló halmaznak
*)
fun op isSubset ([], _)      = true
  | op isSubset (x::xs, ys) = x isMem ys andalso
                                         op isSubset(xs, ys)
infix isSubset
```

- Két halmaz egyenlősége (a listák egyenlőségvizsgálata beépített művelet az SML-ben, halmazokra mégsem használható, mert pl. `[3, 4]` és `[4, 3]` listaként ugyan különböznek, de halmazként egyenlők)

```
(* isSetEq : ''a list * ''a list -> bool
   isSetEq(xs, ys) = az xs elemeiből álló halmaz egyenlő-e
                     az ys elemeiből álló halmazzal
*)
fun isSetEq (xs, ys) = (xs isSubset ys) andalso (ys isSubset xs)
```

LISTÁK RENDEZÉSE

Listák rendezése

- **`inssort` (beszúró rendezés),**
- `selsort` (kiválasztó rendezés),
- `quicksort` (gyorsrendezés),
- `tmsort` (fölülről lefelé haladó összefésülő rendezés),
- `bmsort` (alulról fölfelé haladó összefésülő rendezés),
- `smsort` (simarendezés).

Beszúró rendezés

- Az `ins` segédfüggvény az `x` elemet a megfelelő helyre rakja be az `ys` listában:

```
(* ins : real * real list -> real list
   ins (x, ys) = ys kibővítve x-szel a <= reláció szerint
   PRE: ys a <= reláció szerint rendezve van *)
fun ins (x, y::ys) = if x <= y then x::y::ys else y::ins(x, ys)
  | ins (x : real, []) = [x]
```

- `inssort`-tal rekurzívan rendezzük a lista maradékát; végrehajtási ideje $O(n^2)$:

```
(* inssort : ('a * 'b list -> 'b list) -> 'a list -> 'b list
   inssort f xs = az xs elemeiből álló, az f felhasználásával
                  rendezett lista *)
fun inssort f (x::xs) = f(x, inssort f xs)
  | inssort _  [] = [];
```

- Példa `inssort` alkalmazására:

```
inssort ins [4.24, 4.1, 5.67, 1.12, 4.1, 0.33, 8.0] =
                        [0.33, 1.12, 4.1, 4.1, 4.24, 5.67, 8.0];
```

Beszúró rendezés, generikus változat

- Az `ins` függvényt generikussá tesszük:

```
(* ins : ('a * 'a -> bool) -> 'a * 'a list -> 'a list
   ins cmp (x, ys) = ys kibővítve x-szel a cmp reláció szerint
   PRE: ys a cmp reláció szerint rendezve van *)
fun ins cmp (x, ys) =
      let fun ins0 (y::ys) =
                 if cmp(x, y) then x::y::ys else y::ins0 ys
            | ins0 [] = [x]
      in  ins0 ys
      end
```

- Ezzel `inssort` egy újabb változata:

```
(* inssort : ('a * 'a -> bool) -> 'a list -> 'a list
   inssort cmp xs = az xs elemeiből álló, a cmp reláció
                    szerint rendezett lista *)
fun inssort cmp (x::xs) = ins cmp (x, inssort cmp xs)
  | inssort _ [] = []
```

Beszúró rendezés, generikus változat (folyt.)

- `inssort` eddigi változatai előbb elemeire szedik szét a rendezendő listát, majd hátulról visszafelé haladva, rendezés közben építik fel az újat.
- A jobbrekurziót és akkumulátort használó változatnak (`inssort2`) kisebb veremre van szüksége, mivel a listáról leválasztott elemeket balról jobbra haladva azonnal berakja a helyükre az eredménylistában. (A két megoldás futási idejét később összehasonlítjuk).

```
(* inssort2 : ('a * 'a -> bool) -> 'a list -> 'a list
   inssort2 cmp xs = az xs elemeiből álló, a cmp reláció
                     szerint rendezett lista *)
fun inssort2 cmp xs =
      let (* sort :  'a list -> 'a list -> 'a list
             sort xs zs = zs kibővítve az xs-nek a cmp reláció
                          szerint rendezett elemeivel
             PRE: zs cmp szerint rendezve van *)
          fun sort (x::xs) zs = sort xs (ins cmp (x, zs))
            | sort [] zs = zs
      in
          sort xs []
      end
```

Beszúró rendezés `foldr`-rel és `foldl`-lel

- A második argumentumát akkumulátorként használó `foldl` kisebb vermet használ `foldr`-nél, ezért `inssortL` hosszabb listákat tud rendezni:

```
fun inssortR cmp = foldr (ins cmp) [];
fun inssortL cmp = foldl (ins cmp) [];
```

- Példák `insort`-tal és `insort2`-vel:

```
inssort op<= [4.24, 4.1, 5.67, 1.12, 4.1, 0.33, 8.0] =
                        [0.33, 1.12, 4.1, 4.1, 4.24, 5.67, 8.0];
inssort2 op>= [4, 4, 5, 1, 0, 8] = [8, 5, 4, 4, 1, 0];
inssort op< (explode "qwer") = [#"e", #"q", #"r", #"w"];
```

- Példák `foldr` és `foldl` felhasználásával:

```
fun inssortRi cmp = foldr (ins cmp)[];
fun inssortLr cmp = foldl (ins cmp)([] : real list);

inssortRi op>= [4, 4, 5, 1, 0, 8] = [8, 5, 4, 4, 1, 0];
inssortLr op<= [4.24, 4.1, 5.67, 1.12, 4.1, 0.33, 8.0] =
                        [0.33, 1.12, 4.1, 4.1, 4.24, 5.67, 8.0];
```

A futási idők mérése, összehasonlítása

- 5000 elemet tartalmazó, véletlenszerű és növekvő sorrendű listák rendezéséhez szükséges futási időt mérünk.
  - Véletlen eloszlású egészlistát állít elő a `Random` könyvtárbeli `rangelist` függvény:

```
val xs5000R =
      Random.rangelist (1, 100000) (5000, Random.newgen());
```

  - Növekvő sorrendű egészlistát állít elő a `---` operátor:

```
infix ---;
fun fm --- to =
      let fun upto to zs =
                if to < fm then zs else upto (to-1) (to::zs)
      in
          upto to []
      end;

val xs5000N = 1 --- 5000;
```

A futási idők mérése, összehasonlítása (folyt.)

- A futási időt az alábbi függvénnyel mérhetjük:

```
app load ["Timer","Time","Int"];

fun futIdo (sort, sortFn) (cmp, cmpFn) (xs, kind) =
      let val starttime = Timer.startCPUTimer()
          val zs = sort cmp xs
          val {usr=tim,...} = Timer.checkCPUTimer starttime
      in
          print("Int sort with " ^ sortFn ^ ", " ^ cmpFn ^
                ", length = " ^ Int.toString(length xs) ^ " (" ^
                kind ^ "), time = " ^ Time.fmt 2 tim ^ "s\n")
      end;

futIdo (inssort,  "inssort, recursive") (op<=, "op<=") (xs5000N, "incr");
futIdo (inssort2, "inssort, iterative") (op<=, "op<=") (xs5000N, "incr");
futIdo (inssort,  "inssort, recursive") (op>=, "op>=") (xs5000N, "incr");
futIdo (inssort2, "inssort, iterative") (op>=, "op>=") (xs5000N, "incr");
futIdo (inssort,  "inssort, recursive") (op<=, "op<=") (xs5000R, "rand");
futIdo (inssort2, "inssort, iterative") (op<=, "op<=") (xs5000R, "rand");
futIdo (inssort,  "inssort, recursive") (op>=, "op>=") (xs5000R, "rand");
futIdo (inssort2, "inssort, iterative") (op>=, "op>=") (xs5000R, "rand");
```

A futási idők mérése, összehasonlítása (folyt.)

- Egy Intel Pentium M 1.4 GHz CPU-n, linux operációs rendszer alatt a következő időket mértük:

```
Int sort with inssort, recursive, op<=, length = 5000 (incr), time = 0.00s
Int sort with inssort, iterative, op<=, length = 5000 (incr), time = 4.24s
Int sort with inssort, recursive, op>=, length = 5000 (incr), time = 4.65s
Int sort with inssort, iterative, op>=, length = 5000 (incr), time = 0.00s
Int sort with inssort, recursive, op<=, length = 5000 (rand), time = 1.96s
Int sort with inssort, iterative, op<=, length = 5000 (rand), time = 1.78s
Int sort with inssort, recursive, op>=, length = 5000 (rand), time = 1.95s
Int sort with inssort, iterative, op>=, length = 5000 (rand), time = 1.77s
```

- Jól látszik, hogy az akkumulátort nem használó (rekurzív) és az akkumulátort használó (iteratív) változatok futási ideje csak kismértékben különbözik egymástól.
- A rekurzív és az iteratív változat között lényeges különbség a veremhasználatban van.
  - A rekurzív változat már egy 500 ezer elemű listát sem tud kezelni:

```
inssort op< (1---500000);
! Uncaught exception:
! Out_of_memory
```

A futási idők mérése, összehasonlítása (folyt.)

- Az iteratív változatnak egy 5 millió elemű listával sincs még gondja:

```
inssort2 op< (rev(1---5000000));
> val it = [1, 2, ...] : int list
```

- A futási idő rendezett lista esetén attól függ, hogy mi a listaelemek sorrendje a lista bejárási irányához képest:
  - ha a lista kezdetben megfelelő sorrendű és jobbról balra járjuk be (első rekurzív eset), akkor hátulról visszafelé haladva a már addig létrehozott eredménylista elejére kell befűzni a következő elemet, ami gyorsan megy;
  - ha a lista kezdetben megfelelő sorrendű és balról jobbra járjuk be (első iteratív eset), akkor elölről hátrafelé haladva a következő elemet a már addig létrehozott lista végére kell befűzni, ami lassan megy;
  - ha a lista kezdetben fordított sorrendű és jobbról balra járjuk be (második rekurzív eset), akkor hátulról visszafelé haladva a már addig létrehozott eredménylista végére kell befűzni a következő elemet, ami lassan megy;
  - ha a lista kezdetben fordított sorrendű és balról jobbra járjuk be (második iteratív eset), akkor elölről hátrafelé haladva a következő elemet a már addig létrehozott lista elé kell befűzni, ami gyorsan megy.