HALMAZMŰVELETEK

Halmazműveletek: „benne van-e?” (`isMem`) és „ha új, tedd bele” (`newMem`)

- `isMem` igaz értéket ad eredményül, ha a keresett elem benne van a listában.

```
(* isMem : ''a * ''a list -> bool
   isMem(x, ys) = x eleme-e ys-nek
*)
fun op isMem (_, []) = false
  | op isMem (x, y::ys) = x = y orelse op isMem(x, ys)
infix isMem
```

Megjegyzés: az `op` operátor nélkül az infix deklarációt követően a függvénydefiníciót nem lehetne újrafordítani.

- `newMem` egy új elemet rak be egy listába, ha még nincs benne.

```
(* newMem : ''a * ''a list -> ''a list
   newMem(x, xs) = [x] és xs listaként ábrázolt uniója
*)
fun newMem (x, xs) = if x isMem xs
                     then xs
                     else x::xs
```

`newMem`, ha a sorrendtől eltekintünk, halmazt hoz létre.

Halmazműveletek: „listából halmaz” (`setof`)

- `setof` halmazt készít egy listából úgy, hogy kiszedi belőle az ismétlődő elemeket. Rossz hatékonyságú.

```
(* setof : ''a list -> ''a list
   setof xs = xs elemeinek listaként ábrázolt halmaza
*)
fun setof []      = []
  | setof (x::xs) = newMem(x, setof xs)
```

- Öt halmazműveletet definiálunk:
  - unió (`union`, $S \cup T$),
  - metszet (`inter`, $S \cap T$),
  - részhalmaza-e (`isSubset`, $T \subseteq S$),
  - egyenlők-e (`isSetEq`, $S = T$),
  - hatványhalmaz (`powerSet`, pS).
- Rendezetlen listával ábrázoljuk most a halmazokat.
- Gyakorlófeladatnak meghagyjuk a halmazműveletek megvalósítását rendezett listákkal és rendezett fákkal. (A vizsgán is kaphatnak ilyen feladatokat.)

Halmazműveletek: „unió” (union) és „metszet” (inter)

- Két halmaz uniója

```
(* union : ''a list * ''a list -> ''a list
   union(xs, ys) = az xs és ys elemeiből álló halmazok uniója
*)
fun union ([], ys)    = ys
  | union (x::xs, ys) = newMem(x, union(xs, ys))
```

- Két halmaz metszete

```
(* inter : ''a list * ''a list -> ''a list
   inter(xs, ys) = az xs és ys elemeiből álló halmazok metszete
*)
fun inter ([], _)     = []
  | inter (x::xs, ys) = let val zs = inter(xs, ys)
                        in
                           if x isMem ys then x::zs else zs
                        end
```

Halmazműveletek: „részhalmaza-e” (`isSubset`) és „egyenlők-e” (`isSetEq`)

- Részhalmaza-e egy halmaz egy másiknak?

```
(* isSubset : ''a list * ''a list -> bool
   isSubset (xs, ys) = az xs elemeiből álló halmaz részhalmaza-e
                       az ys elemeiből álló halmaznak
*)
fun op isSubset ([], _)     = true
  | op isSubset (x::xs, ys) = x isMem ys andalso
                              op isSubset(xs, ys)
infix isSubset
```

- Két halmaz egyenlősége (a listák egyenlőségvizsgálata beépített művelet az SML-ben, halmazokra mégsem használható, mert pl. `[3, 4]` és `[4, 3]` listaként ugyan különböznek, de halmazként egyenlők)

```
(* isSetEq : ''a list * ''a list -> bool
   isSetEq(xs, ys) = az xs elemeiből álló halmaz egyenlő-e
                     az ys elemeiből álló halmazzal
*)
fun isSetEq (xs, ys) = (xs isSubset ys) andalso (ys isSubset xs)
```

Halmazműveletek: „halmaz hatványhalmaza” (`powerSet`)

- Az S halmaz hatványhalmaza *összes* részhalmazának a halmaza, az S-t és a $\{\}$-t is beleértve.
- S hatványhalmaza úgy állítható elő, hogy kivesszük S-ből az x elemet, majd *rekurzív módon* előállítjuk az $S - \{x\}$ hatványhalmazát.
- Ha tetszőleges T halmazra $T \subseteq S - \{x\}$, akkor $T \subseteq S$ és $T \cup \{x\} \subseteq S$, így mind T, mind $T \cup \{x\}$ eleme S hatványhalmazának.
- Miközben a fenti elvet rekurzív módon alkalmazzuk, tehát fölsoroltatjuk az $S - \{x\}$ stb. részhalmazait, gyűjtjük a *már kiválasztott* elemeket. Egy-egy rekurzív lépésben a gyűjtő vagy változatlan (T), vagy kiegészül az x elemmel ($T \cup \{x\}$).
- A `pws` függvényben a `base` argumentumban gyűjtjük a halmaz *már kiválasztott* elemeit; kezdetben üres.
- pws(xs, base) = $\{S \cup$ `base` $\mid S \subseteq$ `xs`$\}$, azaz `xs` $\cup$ `base` azon részhalmazainak a listája, amelyek teljes egészében tartalmazzák a base halmazt.

Halmazműveletek: „halmaz hatványhalmaza” (folyt.)

- Ezzel a `pws` függvény:

```
(* pws : 'a list * 'a list -> 'a list list
   pws(xs, base) = mindazon halmazok listája, amelyek előállnak xs egy
                   részhalmazának és a base halmaznak az uniójaként    *)
fun pws ([], base) = [base]
  | pws (x::xs, base) = pws(xs, base) @ pws(xs, x::base)
```

- `pws(xs, base)` valósítja meg az $S - \{x\}$ rekurzív hívást (hiszen `x::xs` felel meg S-nek), azaz állítja elő az összes olyan halmazt, amelyekben `x` nincs benne.
- `pws(xs, x::base)` rekurzív módon `base`-ben gyűjti az `x` elemeket, vagyis előállítja az összes olyan halmazt, amelyben `x` benne van.
- `powerSet`-nek már csak megfelelő módon hívnia kell `pws`-t:

```
(* powerSet : 'a list -> 'a list list
   powerSet xs = az xs halmaz hatványhalmaza *)
fun powerSet xs = pws(xs, [])
```

- Példa:

```
powerSet [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,19,20];
```

Halmazműveletek: „halmaz hatványhalmaza”, hatékonyabban

- `pws` rossz hatékonyságú a kétfelé ágazó rekurzió miatt; 20 egész szám hatványhalmazának előállítása már a verem túlcsordulását okozza. Írjunk valamivel hatékonyabb változatot.
- Az `insAll` segédfüggvény egy elemet szúr be egy listákból álló lista minden eleme elé.

```
(* insAll : 'a * 'a list list * 'a list list -> 'a list list
   insAll(x, yss, zss) = az yss lista ys elemeinek zss elé fűzött
                         listája, amelyben minden ys elem elé x van beszúrva *)
fun insAll (x, [], zss) = zss
  | insAll (x, ys::yss, zss) = insAll(x, yss, (x::ys)::zss)
```

- `powerSet` `insAll`-t használó rekurzív változata

```
fun powerSet [] = [[]]
  | powerSet (x::xs) = let val pws = powerSet xs
                       in  pws @ insAll(x, pws, []) end
```

- `powerSet` `insAll`-t használó iteratív változata

```
fun powerSet [] = [[]]
  | powerSet (x::xs) = let val pws = powerSet xs
                       in insAll(x, pws, pws) end

powerSet [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,19,20,21,22];
```

LISTÁK RENDEZÉSE

Listák rendezése

- **`inssort` (beszúró rendezés),**
- **`selsort` (kiválasztó rendezés),**
- **`quicksort` (gyorsrendezés),**
- **`tmsort` (felülről lefelé haladó összefésülő rendezés),**
- `bmsort` (alulról felfelé haladó összefésülő rendezés),
- `smsort` (simarendezés).

Beszúró rendezés

- Az `ins` segédfüggvény az `x` elemet a megfelelő helyre rakja be az `ys` listában:

```
(* ins : real * real list -> real list
   ins (x, ys) = ys kibővítve x-szel a <= reláció szerint
   PRE: ys a <= reláció szerint rendezve van *)
fun ins (x, y::ys) = if x <= y then x::y::ys else y::ins(x, ys)
  | ins (x : real, []) = [x]
```

- `inssort`-tal rekurzívan rendezzük a lista maradékát; végrehajtási ideje $O(n^2)$:

```
(* inssort : ('a * 'b list -> 'b list) -> 'a list -> 'b list
   inssort f xs = az xs elemeiből álló, az f felhasználásával
                  rendezett lista *)
fun inssort f (x::xs) = f(x, inssort f xs)
  | inssort _  [] = [];
```

- Példa `inssort` alkalmazására:

```
inssort ins [4.24, 4.1, 5.67, 1.12, 4.1, 0.33, 8.0] =
                      [0.33, 1.12, 4.1, 4.1, 4.24, 5.67, 8.0];
```

Beszúró rendezés, generikus változat

- Az `ins` függvényt generikussá tesszük:

```
(* ins : ('a * 'a -> bool) -> 'a * 'a list -> 'a list
   ins cmp (x, ys) = ys kibővítve x-szel a cmp reláció szerint
   PRE: ys a cmp reláció szerint rendezve van *)
fun ins cmp (x, ys) =
      let fun ins0 (y::ys) =
                 if cmp(x, y) then x::y::ys else y::ins0 ys
            | ins0 [] = [x]
      in  ins0 ys
      end
```

- Ezzel `inssort` egy újabb változata:

```
(* inssort : ('a * 'a -> bool) -> 'a list -> 'a list
   inssort cmp xs = az xs elemeiből álló, a cmp reláció
                    szerint rendezett lista *)
fun inssort cmp (x::xs) = ins cmp (x, inssort cmp xs)
  | inssort _ [] = []
```

Beszúró rendezés, generikus változat (folyt.)

- `inssort` eddigi változatai előbb elemeire szedik szét a rendezendő listát, majd hátulról visszafelé haladva, rendezés közben építik fel az újat.
- A jobbrekurziót és akkumulátort használó változatnak (`inssort2`) kisebb veremre van szüksége, mivel a listáról leválasztott elemeket balról jobbra haladva azonnal berakja a helyükre az eredménylistában. (A két megoldás futási idejét később összehasonlítjuk).

```
(* inssort2 : ('a * 'a -> bool) -> 'a list -> 'a list
   inssort2 cmp xs = az xs elemeiből álló, a cmp reláció
                     szerint rendezett lista *)
fun inssort2 cmp xs =
      let (* sort :  'a list -> 'a list -> 'a list
             sort xs zs = zs kibővítve az xs-nek a cmp reláció
                          szerint rendezett elemeivel
             PRE: zs cmp szerint rendezve van *)
          fun sort (x::xs) zs = sort xs (ins cmp (x, zs))
            | sort [] zs = zs
      in
          sort xs []
      end
```

Beszúró rendezés `foldr`-rel és `foldl`-lel

- A második argumentumát akkumulátorként használó `foldl` kisebb vermet használ `foldr`-nél, ezért `inssortL` hosszabb listákat tud rendezni:

```
fun inssortR cmp = foldr (ins cmp) [];
fun inssortL cmp = foldl (ins cmp) [];
```

- Példák `insort`-tal és `insort2`-vel:

```
inssort op<= [4.24, 4.1, 5.67, 1.12, 4.1, 0.33, 8.0] =
                          [0.33, 1.12, 4.1, 4.1, 4.24, 5.67, 8.0];
inssort2 op>= [4, 4, 5, 1, 0, 8] = [8, 5, 4, 4, 1, 0];
inssort op< (explode "qwer") = [#"e", #"q", #"r", #"w"];
```

- Példák `foldr` és `foldl` felhasználásával:

```
fun inssortRi cmp = foldr (ins cmp)[];
fun inssortLr cmp = foldl (ins cmp)([] : real list);

inssortRi op>= [4, 4, 5, 1, 0, 8] = [8, 5, 4, 4, 1, 0];
inssortLr op<= [4.24, 4.1, 5.67, 1.12, 4.1, 0.33, 8.0] =
                          [0.33, 1.12, 4.1, 4.1, 4.24, 5.67, 8.0];
```

A futási idők mérése, összehasonlítása

- 5000 elemet tartalmazó, véletlenszerű és növekvő sorrendű listák rendezéséhez szükséges futási időt mérünk.
  - Véletlen eloszlású egészlistát állít elő a `Random` könyvtárbeli `rangelist` függvény:

```
val xs5000R =
      Random.rangelist (1, 100000) (5000, Random.newgen());
```

  - Növekvő sorrendű egészlistát állít elő a `---` operátor:

```
infix ---;
fun fm --- to =
      let fun upto to zs =
                if to < fm then zs else upto (to-1) (to::zs)
      in
          upto to []
      end;

val xs5000N = 1 --- 5000;
```

A futási idők mérése, összehasonlítása (folyt.)

- A futási időt az alábbi függvénnyel mérhetjük:

```
app load ["Timer","Time","Int"];

fun futIdo (sort, sortFn) (cmp, cmpFn) (xs, kind) =
      let val starttime = Timer.startCPUTimer()
          val zs = sort cmp xs
          val usr=tim,... = Timer.checkCPUTimer starttime
      in
          "Int sort with " ^ sortFn ^ ", " ^ cmpFn ^
          ", length = " ^ Int.toString(length xs) ^ " (" ^
          kind ^ "), time = " ^ Time.fmt 2 tim ^ " sec\n"
      end;

futIdo (inssort,  "inssort, recursive") (op<=, "op<=") (xs5000N, "incr");
futIdo (inssort2, "inssort, iterative") (op<=, "op<=") (xs5000N, "incr");
futIdo (inssort,  "inssort, recursive") (op>=, "op>=") (xs5000N, "incr");
futIdo (inssort2, "inssort, iterative") (op>=, "op>=") (xs5000N, "incr");
futIdo (inssort,  "inssort, recursive") (op<=, "op<=") (xs5000R, "rand");
futIdo (inssort2, "inssort, iterative") (op<=, "op<=") (xs5000R, "rand");
futIdo (inssort,  "inssort, recursive") (op>=, "op>=") (xs5000R, "rand");
futIdo (inssort2, "inssort, iterative") (op>=, "op>=") (xs5000R, "rand");
```

A futási idők mérése, összehasonlítása (folyt.)

- Egy Intel Pentium M 1.4 GHz CPU-n, linux operációs rendszer alatt a következő időket mértük:

```
Int sort with inssort, recursive, op<=, length = 5000 (incr), time = 0.00 sec
Int sort with inssort, iterative, op<=, length = 5000 (incr), time = 4.24 sec
Int sort with inssort, recursive, op>=, length = 5000 (incr), time = 4.65 sec
Int sort with inssort, iterative, op>=, length = 5000 (incr), time = 0.00 sec
Int sort with inssort, recursive, op<=, length = 5000 (rand), time = 1.96 sec
Int sort with inssort, iterative, op<=, length = 5000 (rand), time = 1.78 sec
Int sort with inssort, recursive, op>=, length = 5000 (rand), time = 1.95 sec
Int sort with inssort, iterative, op>=, length = 5000 (rand), time = 1.77 sec
```

- Jól látszik, hogy az akkumulátort nem használó (rekurzív) és az akkumulátort használó (iteratív) változatok futási ideje csak kismértékben különbözik egymástól.
- A rekurzív és az iteratív változat között lényeges különbség a veremhasználatban van.
  - A rekurzív változat már egy 500 ezer elemű listát sem tud kezelni:

```
inssort op< (1---500000);
! Uncaught exception:
! Out_of_memory
```

A futási idők mérése, összehasonlítása (folyt.)

- Az iteratív változatnak egy 5 millió elemű listával sincs még gondja:

```
inssort2 op< (rev(1---5000000));
> val it = [1, 2, ...] : int list
```

- A futási idő rendezett lista esetén attól függ, hogy mi a listaelemek sorrendje a lista bejárási irányához képest:
  - ha a lista kezdetben megfelelő sorrendű és jobbról balra járjuk be (első rekurzív eset), akkor hátulról visszafelé haladva a már addig létrehozott eredménylista elejére kell befűzni a következő elemet, ami gyorsan megy;
  - ha a lista kezdetben megfelelő sorrendű és balról jobbra járjuk be (első iteratív eset), akkor elölről hátrafelé haladva a következő elemet a már addig létrehozott lista végére kell befűzni, ami lassan megy;
  - ha a lista kezdetben fordított sorrendű és jobbról balra járjuk be (második rekurzív eset), akkor hátulról visszafelé haladva a már addig létrehozott eredménylista végére kell befűzni a következő elemet, ami lassan megy;
  - ha a lista kezdetben fordított sorrendű és balról jobbra járjuk be (második iteratív eset), akkor elölről hátrafelé haladva a következő elemet a már addig létrehozott lista elé kell befűzni, ami gyorsan megy.

Kiválasztó rendezés

```
(* selsort : ('a * 'a -> order) -> 'a list -> 'a list
   selsort cmp xs = az xs elemei cmp szerint növekvő sorrendben
*)
fun selsort cmp xs =
      let
          (* max : 'a * 'a -> 'a
             max (x, y) = x és y közül cmp szerint a nagyobb
          *)
          fun max (x, y) = if cmp(x, y) = GREATER then x else y

          (* min : 'a * 'a -> 'a
             min (x, y) = x és y közül cmp szerint a kisebb
          *)
          fun min (x, y) = if cmp(x, y) = LESS then x else y

          (* maxSelect : 'a * 'a list * 'a list -> 'a * 'a list
             maxSelect (x, ys, zs) = pár, amelynek első tagja az
                (x::ys) cmp szerinti legnagyobb eleme, második
                tagja az x::ys többi eleméből és a zs
                elemeiből álló lista                              *)
          fun maxSelect (x, [], zs) = (x, zs)
            | maxSelect (x, y::ys, zs) =
                          maxSelect(max(x, y), ys, min(x,y)::zs);
```

Kiválasztó rendezés (folyt.)

```
        (* sSort : 'a list * 'a list -> 'a list
           sSort (xs, ws) = az xs elemei cmp szerint növekvő
                            sorrendben a ws elé fűzve          *)
        fun sSort ([], ws) = ws
          | sSort (x::xs, ws) =
              let val (z, zs) = maxSelect(x, xs, [])
              in
                 sSort (zs, z::ws)
              end
    in
        sSort (xs, [])
    end;

app load ["Int","Char","Real"];

selsort Int.compare [1,2,3,4,5,6,7,8,9];
selsort Int.compare [9,8,7,6,5,4,3,2,1];
selsort Real.compare [4.5,6.7,3.6,4.3,1.2,0.9,8.9,9.8,2.0];
selsort Char.compare (explode "Ej mi a ko tyukanyo");
```

Gyorsrendezés akkumulátor nélkül

```
(* quicksort1 cmp xs = az xs elemeinek cmp szerint rendezett listája
   quicksort1 : ('a * 'a -> order) -> 'a list -> 'a list              *)
fun quicksort1 cmp xs =
      let (* qs : 'a list -> 'a list
             qs ys = ys elemeinek cmp szerint rendezett listája
          *)
          fun qs (m::ys) =
                let (* partition : 'a list * 'a list * 'a list -> 'a list
                       partition (xs, ls, rs) = olyan pár, amelynek első tagja
                         az xs m-nél kisebb elemeinek a listája ls elé fűzve,
                         második tagja pedig az xs többi eleme rs elé fűzve *)
                    fun partition (x::xs, ls, rs) =
                          if cmp(x, m) = LESS then partition(xs, x::ls, rs)
                                              else partition(xs, ls, x::rs)
                      | partition ([], ls, rs) = qs ls @ (m::qs rs)
                in
                    partition (ys, [], [])
                end
            | qs [] = []
      in
          qs xs
      end;
```

Gyorsrendezés akkumulátorral

```
(* quicksort2 cmp xs = az xs elemeinek cmp szerint rendezett listája
   quicksort2 : ('a * 'a -> order) -> 'a list -> 'a list              *)
fun quicksort2 cmp xs =
      let (* qs : 'a list -> 'a list -> 'a list
             qs ys zs = ys elemeinek cmp szerint rendezett listája zs elé fűzve
           *)
          fun qs (m::ys) zs =
                let (* partition : 'a list * 'a list * 'a list -> 'a list
                       partition (xs, ls, rs) = olyan pár, amelynek első tagja
                         az xs m-nél kisebb elemeinek a listája ls elé fűzve,
                         második tagja pedig az xs többi eleme rs elé fűzve *)
                    fun partition (x::xs, ls, rs) =
                          if cmp(x, m) = LESS then partition(xs, x::ls, rs)
                                              else partition(xs, ls, x::rs)
                      | partition ([], ls, rs) = qs ls (m :: qs rs zs)
                in
                    partition (ys, [], [])
                end
            | qs [] zs = zs
      in
          qs xs [] end;
```

- A `List.partition` függvény használható egy lista két rész részre bontására.

A futási idők mérése, összehasonlítása

```
app load ["Listsort","Int"];
futIdo (inssort2, "inssort2") (op>=, "op>=") (xs5000R, "rand");
                                                (* ~ 12.5 M összehasonlítás! *)
futIdo (quicksort2, "quicksort2")
               (Int.compare, "Int.compare") (xs5000R, "rand");
futIdo (Listsort.sort, "Listsort.sort")
               (Int.compare, "Int.compare") (xs5000R, "rand");
                                                  (* ~ 60 E összehasonlítás *)

Int sort with inssort2, op>=, length = 5000 (random), time = 2.34 sec
Int sort with quicksort2, Int.compare, length = 5000 (rand), time = 0.04 sec
Int sort with Listsort.sort, Int.compare, length = 5000 (rand), time = 0.04 sec

futIdo (quicksort2, "quicksort2") (Int.compare, "Int.compare")
        (Random.rangelist (1, 100000) (200000, Random.newgen()), "rand");

Int sort with quicksort2, Int.compare, length = 200000 (rand), time = 2.53 sec

futIdo (Listsort.sort, "Listsort.sort") (Int.compare, "Int.compare")
        (Random.rangelist (1, 100000) (200000, Random.newgen()), "rand");
! Uncaught exception:
! Out_of_memory
```

Összefésülő rendezések

- Az összefésülő rendezéshez kell egy olyan függvény, amely két listát növekvő sorrendben egyesít.

```
(* merge(xs, ys) = xs és ys elemeinek <= szerint
                   egyesített listája
   merge : int list * int list -> int list
*)
fun merge (xxs as x::xs, yys as y::ys)=
      if x <= y
      then x::merge(xs, yys)
      else y::merge(xxs, ys)
  | merge ([], ys) = ys
  | merge (xs, []) = xs;
```

- Korlátot jelent, ha a részeredményeket a veremben tároljuk.
- Akkumulátor használata esetén meg kell fordítani az eredménylistát.

Fölülről lefelé haladó összefésülő rendezés

- A fölülről lefelé haladó összefésülő rendezés *(top-down merge sort)* akkor hatékony, ha közel azonos hosszúságú az a két lista, amelyekre a rendezendő listát szétszedjük.

```
(* tmsort xs = az xs elemeinek a <= reláció szerint
               rendezett listája
   tmsort : int list -> int list
*)
fun tmsort xs = let val h = length xs
                    val k = h div 2
                in
                   if h > 1
                   then merge(tmsort(List.take(xs, k)),
                              tmsort(List.drop(xs, k)))
                   else xs
                end;
```

- A legrosszabb esetben $O(n \cdot log\, n)$ lépésre van szükség.

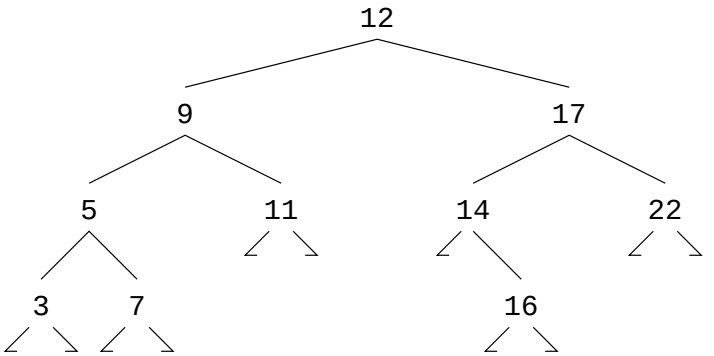
BINÁRIS FÁK

Bináris fák `datatype` deklarációval

- A listához hasonlóan rekurzív adatszerkezet a *fa*.
- Először olyan bináris fát deklarálunk, amelynek a levelei üresek, a csomópontjaiban pedig előbb a bal részfát, majd az `'a` típusú értéket, és végül a jobb részfát adjuk meg:

```
datatype 'a tree = L | B of 'a tree * 'a * 'a tree;
```

- Tekintsük például az alábbi fát:

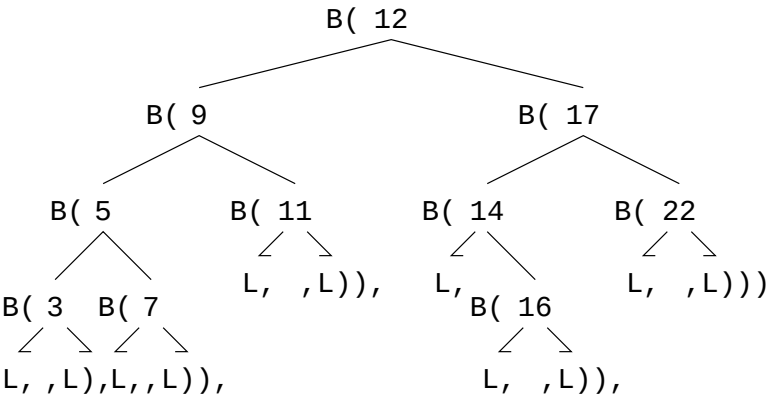


- Az `'a tree` adattípus `L` és `B` adatkonstruktoraival ez a fa pl. a következő lapon látható módon írható le.

Bináris fák `datatype` deklarációval (folyt.)

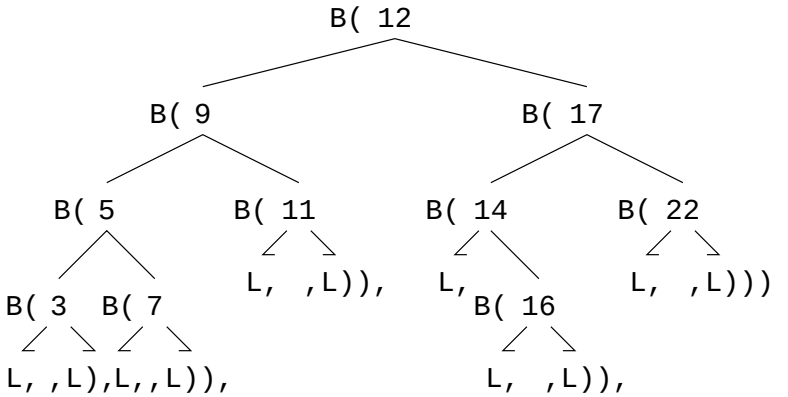
```
B(B(B(B(L,3,L),
        5,
        B(L,7,L)
       ),
      9,
      B(L,11,L)
     ),
   12,
   B(B(L,
       14,
       B(L,16,L)
      ),
     17,
     B(L,22,L)
    )
 );
```

A bal oldali kifejezést elég nehéz átlátni. A fastruktúra szöveges leírását megkönnyíti, ha az ábrába beírjuk a megfelelő adatkonstruktorokat.



Bináris fák `datatype` deklarációval (folyt.)

- A fastruktúra szöveges leírása átláthatóbb, ha az egyes részfáknak nevet adunk, és a részfákból építjük fel a teljes fát:




```
val tr3  = B(L,3,L);          val tr7  = B(L,7,L);
val tr5  = B(tr3,5,tr7);      val tr11 = B(L,11,L);
val tr9  = B(tr5,9,tr11);     val tr16 = B(L,16,L);
val tr14 = B(L,14,tr16);      val tr22 = B(L,22,L);
val tr17 = B(tr14,17,tr22);   val tr12 = B(tr9,12,tr17);
```

Bináris fák `datatype` deklarációval (folyt.)

- Másféle fastruktúrákat is deklarálhatunk, pl.
  - kezdhetjük az `'a` típusú értékkel, majd folytathatjuk előbb a bal, azután a jobb részfa megadásával,
  - felhasználhatjuk a levelet is értékek tárolására,
  - az értéket nem tároló üres csonkokat pedig `E`-vel jelölhetjük.
- A leírtak szerinti bináris fát hoz létre a következő deklaráció:

```
datatype 'a tree = E | L of 'a | B of 'a * 'a tree * 'a tree
```

- A rekurzív függvényekhez hasonlóan a rekurzív adattípusok deklarációjában is kell lennie nemrekurzív ágnak (ún. triviális esetnek).
- A nemrekurzív ág hiánya miatt az alábbi, szintaktikailag helyes deklarációk használhatatlanok:

```
datatype 'a badtree = B of 'a badtree * 'a * 'a badtree
datatype 'a badtree = L of 'a badtree
                    | B of 'a badtree * 'a * 'a badtree
```