FUNKCIONÁLIS PROGRAMOZÁS

Történeti áttekintés

A λ-kalkulus rövid története

- 1910: Russel & Whitehead: Principia Mathematica
- 1935: Gödel: nem létezhet erős axióma- és tételrendszer, amely teljes
- 1930-40-es évek: *Alonzo Church: λ-kalkulus*

A Russel paradoxon

- R: az önmagukat nem tartalmazó halmazok halmaza
- R tartalmazza-e önmagát? $\Rightarrow$ ellentmondás

A Russel paradoxon a λ-kalkulusban

- $R = \lambda x.\neg(x\ x)$
- $R\ R = \neg(R\ R) \Rightarrow$ ellentmondás

Típusos λ-kalkulus

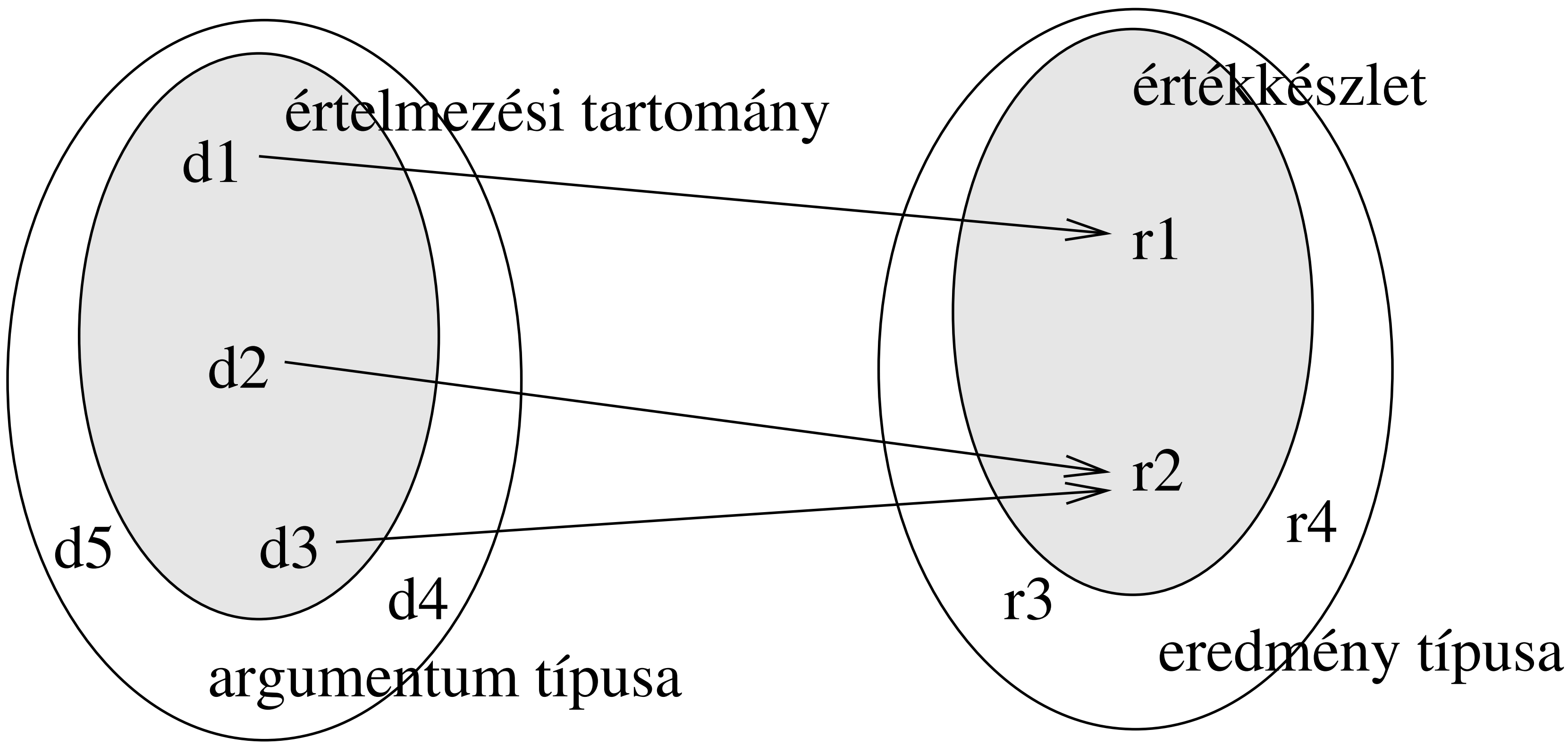
- minden kifejezésnek van egy típusa
- f csak akkor alkalmazható e-re, ha a típusaik „passzolnak”
- R nem írható le

TÍPUS ÉS FÜGGVÉNY

A típus és a függvény fogalma

- A típus fogalma
  - A típus értékek egy halmaza (pl. egész típus ~ az egész számok egy (rész)halmaza)
  - Tetszőleges típus jelölése az ún. *típuselméletben:* α, β ...
  - Típusállandó (azaz konkrét típus) jelölése az SML-ben: `int`, `real`, `char`, `string` ...
  - Típusváltozó jelölése az SML-ben α, β ... helyett: `'a`, `'b` ...
- A függvény fogalma
  - A függvény valamely D halmaznak valamely R halmazba való olyan *egyértelmű* leképzése, amelyet a (d, r) rendezett párok halmaza ad meg, ahol $d \in D$ és $r \in R$.
  - A d a függvény argumentuma (paramétere), az r az eredménye
  - A D a függvény értelmezési tartománya, az R az értékkészlete
  - A típusos nyelvekben d is, r is *meghatározott* típusú
  - A függvény értelmezési tartománya $\subseteq$ az argumentum típusa
  - A függvény értékkészlete $\subseteq$ az eredmény típusa

A függvény mint leképzés



A függvény mint érték

- A függvény „teljes jogú”*(first-class)* érték a funkcionális programozási nyelvekben
  - A függvény típusa általában: $\alpha \to \beta$, ahol az α az argumentum, a β az eredmény típusát jelöli
  - A függvény maga is: érték. *Függvényérték.*
  - Fontos: a függvényérték *nem* a függvény egy *alkalmazásának* az eredménye!
  - Példák függvényértékre
    - $\sin$ (a típusa: *valós* $\to$ *valós*)
    - round (a típusa: *valós* $\to$ *egész*)
    - $\circ$ (függvénykompozíció; a típusa: $((\beta \to \gamma) * (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \gamma))$
  - Példák függvényalkalmazásra
    - $\mathrm{round}\ 5.4 = 5$, azaz egy *egész* típusú érték az eredménye ennek a függvényalkalmazásnak
    - $\mathrm{round} \circ \sin$ (a típusa: *valós* $\to$ *egész*)
    - $(\mathrm{round} \circ \sin)1.0 = 1$ (a típusa: *egész*)

Függvények osztályozása, ill. alkalmazása

- Függvények osztályozása
  - Parciális függvény: értelmezési tartomány $\subset$ argumentum típusa
    (figyelem: hibák forrása lehet!)
  - Teljes függvény: értelmezési tartomány $=$ argumentum típusa
  - Szürjektív függvény: értékkészlet $=$ eredmény típusa
  - Nemszürjektív függvény: értékkészlet $\subset$ eredmény típusa
  - Injektív függvény: a leképzés kölcsönösen egyértelmű
  - Az $f : \alpha \rightarrow \beta$ injektív függvény inverze: $f^{-1} : \beta \rightarrow \alpha$
  - Bijektív = injektív + szürjektív, azaz f bijektív, ha f^{-1} teljes függvény
- Függvények alkalmazása
  - *Függvényalkalmazást* jelöl az f és e jelek egymás mellé írása („*juxtapozicionálása*”): $f\ e$ azt jelenti, hogy az f-et alkalmazzuk az e-re.
  - Általánosabban: az $f e$ kifejezésben az e tetszőleges olyan kifejezés, amelynek az értéke az f értelmezési tartományába esik.
  - Még általánosabban: az $f e$ kifejezésben az f függvényértéket adó tetszőleges kifejezés, e pedig tetszőleges olyan kifejezés, amelynek értéke az f értelmezési tartományába esik.

Két- vagy többargumentumú függvények

- Függvény alkalmazása két- vagy több argumentumra
  1. Az argumentumokat *összetett adatnak* – párnak, rekordnak, listának stb. – tekintjük
     - pl. $f(1,2)$ az f függvény alkalmazását jelenti az $(1,2)$ *párra,*
     - pl. $f[1,2,3]$ az f függvény alkalmazását jelenti az $[1,2,3]$ *listára.*
  2. A függvényt több egymás utáni lépésben alkalmazzuk az argumentumokra, pl. $f\ 1\ 2 \equiv (f\ 1)\ 2$ azt jelenti, hogy
     - az első lépésben az f függvény alkalmazzuk az 1 értékre, ami egy *függvényt ad eredményül,*
     - a második lépésben az első lépésben kapott függvényt alkalmazzuk a 2 értékre, így kapjuk meg az $f\ 1\ 2$ függvényalkalmazás (vég)eredményét.
- Az $f\ 1\ 2$ esetben az f függvényt *részlegesen alkalmazható* függvénynek nevezzük.
- A programozó szabadon dönthet, hogy a függvényt részlegesen alkalmazható vagy pl. egy párra alkalmazható formában írja meg. A különbség *csak* a szintaxisban van. A részlegesen alkalmazható változat, mint látni fogjuk, rugalmasabban használható.
- Infix jelölés: $x \oplus y \equiv$ a $\oplus$ függvény alkalmazása az (x,y) párra mint argumentumra

FÜGGVÉNYEK AZ SML-BEN

Függvények alkalmazása az SML-ben

- Az SML-ben az `f` és az `e` tetszőleges *név* lehet, amelyeket megfelelően *szeparálni* kell egymástól: `f e`, vagy `f(e)`, vagy `(f)e`
- Szeparátor: nulla, egy vagy több *formázó* karakter (␣, \t, \n stb.). Nulla db formázó karakter elegendő pl. a (előtt és a) után.
- FONTOS! A szeparátor a legerősebb balra kötő infix operátor az SML-ben.
- Példák:

```
Math.sin 1.00  (Math.cos)Math.pi   round(3.17)
2 + 3          (real) (3 + 2 * 5)
```

- Függvények egy csoportosítása az SML-ben
  - Beépített függvények, pl. `+`, `*` (mindkettő infix), `real`, `round` (mindkettő prefix)
  - Könyvtári függvények, pl. `Math.sin`, `Math.cos`, `Math.pi` (0 argumentumú!)
  - Felhasználó által definiálható függvények, pl. `terulet`, `/\`, `head`

SML-példa: Egyszeres Hamming-távolságú ciklikus kód

- A függvényt pl. *táblázattal* adhatjuk meg:

00	01
01	11
11	10
10	00

```
fn 00 => 01
 | 01 => 11
 | 11 => 10
 | 10 => 00
```

- Változatok („klózok”): minden lehetséges esetre egy változat.
- Az `fn` (olvasd: *lambda*) névtelen függvényt, *függvénykifejezést* vezet be.
- A függvény néhány alkalmazása:
  - `(fn 00 => 01 | 01 => 11 | 11 => 10 | 10 => 00) 10`
  - `(fn 00 => 01 | 01 => 11 | 11 => 10 | 10 => 00) 11`
  - `(fn 00 => 01 | 01 => 11 | 11 => 10 | 10 => 00) 111`
- Mintaillesztés, egyesítés
- Érthető, de nem robosztus (vö. parciális a függvény!).

SML-példa: modulo n alapú inkrementálás

- A függvényt általában *algoritmussal* adjuk meg (nem táblázattal), egyébként
  - az argumentum nem lehetne változó,
  - túl sok változatot kellene felírni stb.
- `fn i => (i + 1) mod n`
  - az `i` ún. *kötött változó,* a névtelen függvény argumentuma
  - az `n` ebben a kifejezésben *szabad változó,* és nincs értéke (!)
  - az `n`-et is *le kell kötni* mint a függvény argumentumát
- `fn n => fn i => (i + 1) mod n`
- A függvény néhány alkalmazása:
  - `(fn n => (fn i => (i + 1) mod n)) 128 111`
  - `(fn n => (fn i => (i + 1) mod n)) 4 ~7`
  - `(fn n => (fn i => (i + 1) mod n)) 128 6.0` – Hiba!

Értékdeklaráció SML-ben: függvényérték deklarálása

- Név kötése függvényértékhez
  - `val kovKod = fn 00 => 01 | 01 => 11 | 11 => 10 | 10 => 00`
  - `val incMod = fn n => fn i => (i + 1) mod n`
- Szintaktikus édesítőszerrel (`fun`)
  - ```
    fun kovKod 00 = 01
      | kovKod 01 = 11
      | kovKod 11 = 10
      | kovKod 10 = 00
    ```
  - `fun incMod n i = (i + 1) mod n`
- Alkalmazásuk argumentumra
  - `kovKod 01`
  - `incMod 128 111`
    ```

Fejkomment

Írjunk *deklaratív fejkommentet* minden (függvény)érték-deklarációhoz!

- ```
  (* kovKod cc = az egyszeres Hamming-távolságú, kétbites,
                 ciklikus kódkészlet cc-t követő eleme
     PRE: cc ∈ {00, 01, 11, 10}
  *)
  fun kovKod 00 = 01
    | kovKod 01 = 11
    | kovKod 11 = 10
    | kovKod 10 = 00
  ```
- `PRE` = *pre*condition, előfeltétel
- `PRE: cc ∈ {00, 01, 11, 10}` jelentése: a `kovKod` függvény `cc` argumentumának a `{00, 01, 11, 10}` halmazbeli értéknek kell lennie, ellenkező esetben a függvény eredménye nincs definiálva.
- ```
  (* incMod n i = (i+1) modulo n szerint
     PRE: n > i >= 0
  *)
  fun incMod n i = (i+1) mod n
  ```

LISTÁK

Lista: definíciók, adat- és típuskonstruktorok

- Definíciók
  1. A *lista* azonos típusú elemek véges (de nem korlátos!) sorozata.
  2. A lista olyan *rekurzív* lineáris adatszerkezet, amely azonos típusú elemekből áll, és
     - vagy üres,
     - vagy egy elemből és az elemet követő listából áll.
- Konstruktorok
  - Az üres lista jele a `nil` *adatkonstruktorállandó*.
  - A `nil` helyett általában a `[]` jelet használjuk (szintaktikus édesítőszer).
  - A `nil` típusa: `'a list`.
  - Az `'a` *típusváltozót* jelöl, a `list`-et *típuskonstruktornak* nevezzük.
  - A `::` *adatkonstruktorfüggvény* új listát hoz létre egy elemből és egy (esetleg üres) listából.
  - A `::` típusa `'a * 'a list -> 'a list`, infix pozíciójú, 5-ös precedenciájú, jobbra köt. Infix pozíciója miatt *adatkonstruktoroperátornak* is nevezzük.
  - A `::`-ot *négyespontnak* vagy *cons*-nak olvassuk (vö. *constructor,* ami ennek az adatkonstruktorfüggvénynek a hagyományos neve a λ-kalkulusban és egyes funkcionális nyelvekben).

Lista: jelölések, minták

- Példák
  - Lista létrehozása adatkonstruktorokkal

```
[]            nil            #"" :: nil
3 :: 5 :: 9 :: nil      = 3 :: (5 :: (9 :: nil))
```

  - Szintaktikus édesítőszer lista jelölésére

```
[3, 5, 9]               =  3 :: 5 :: 9 :: nil
```

  - Vigyázat! A Prolog listajelölése hasonló, de vannak lényeges különbségek:

SML	Prolog		SML	Prolog	
`[]`	`[]`	azonos	`(x::xs)`	`[X|Xs]`	különböző
`[1,2,3]`	`[1,2,3]`	azonos	`(x::y::ys)`	`[X,Y|Ys]`	különböző

- Minták

  A `[]`, `nil` adatkonstruktorállandóval és a `::` adatkonstruktoroperátorral felépített kifejezések, valamint a `[x1, x2, ..., xn]` listajelölés mintában is alkalmazhatók.

Lista: fej (hd), farok (tl)

- A nemüres lista első eleme a lista *feje*.

```
(* hd : 'a list -> 'a
   hd xs = a nemüres xs első eleme (az xs feje)
*)
fun hd (x :: _) = x;
```

- A nemüres lista első utáni elemeiből áll a lista *farka*.

```
(* tl : 'a list -> 'a list
   tl xs = a nemüres xs első utáni elemeinek az eredetivel
           azonos sorrendű listája (az xs farka)
*)
fun tl (_ :: xs) = xs;
```

- `hd` és `tl` *parciális* függvények. Ha könyvtárbeli megfelelőiket (`List.hd`, `List.tl`) üres listára alkalmazzuk, `Empty` néven *kivételt* jeleznek.
- Az _ (aláhúzás) az ún. *mindenesjel*, azaz a mindenre illeszkedő minta. Figyelem: a mindenesjel kifejezésben – pl. egyenlőségjel jobb oldalán – nem használható!

Lista: hossz (`length`), elemek összege (`isum`), szorzata (`rprod`)

- Egy lista hosszát adja eredményül a `length` függvény (vö. `List.length`).

```
(* length : 'a list -> int
   length zs = a zs lista elemeinek száma *)
fun length []        = 0
  | length (_ :: zs) = 1 + length zs
```

- Egy egész számokból álló lista elemeinek összegét adja eredményül `isum`.

```
(* isum : int list -> int
   isum ns = az ns egészlista elemeinek összege *)
fun isum []        = 0
  | isum (n :: ns) = n + isum ns
```

- Egy valós számokból álló lista elemeinek szorzatát adja eredményül `rprod`.

```
(* rprod : real list -> real
   rprod xs = az xs valós lista elemeinek szorzata *)
fun rprod []        = 1.0
  | rprod (x :: xs) = x * rprod xs
```

Példák: hd, tl, length, isum, rprod

- hd, tl

A kifejezés	Az mosml válasza
`List.hd [1, 2, 3];`	`> val it = 1 : int`
`List.hd [];`	`! Uncaught exception:` `! Empty`
`List.tl [1, 2, 3];`	`> val it = [2, 3] : int list`
`List.tl [];`	`! Uncaught exception:` `! Empty`

- length, isum, rprod

A kifejezés	Az mosml válasza
`length [1, 2, 3, 4];`	`> val it = 4 : int`
`length [];`	`> val it = 0 : int`
`isum [1, 2, 3, 4];`	`> val it = 10 : int`
`isum [];`	`> val it = 0 : int`
`rprod [1.0, 2.0, 3.0, 4.0];`	`> val it = 24.0 : real`
`rprod [];`	`> val it = 1.0 : real`

LOKÁLIS ÉRVÉNYŰ DEKLARÁCIÓK

Kifejezés lokális érvényű deklarációval: `let`-kifejezés

- Ún. `let`-kifejezést használunk, ha ismétlődő részkifejezéseket *csak egyszer* akarunk kiszámítani, vagy akkor, ha bizonyos értékeket *el akarunk rejteni* a program többi része elől.
- Szintaxisa:

```
let d
in e
end
```

ahol *d* egy nemüres deklarációsorozat, *e* egy nemüres kifejezés.

- Példa:

```
(* length : 'a list -> int
   length zs = a zs lista hossza
*)
fun length zs =
      let (* len : 'a list * int -> int
             len (zs, n) = az n és a zs lista hosszának összege
          *)
          fun len ([], n)     = n
            | len (_::zs, n) = len(zs, n+1)
      in
          len(zs, 0)
      end
```

EGYSZERŰ ADATTÍPUSOK

Egyszerű adattípusok

Típusnév	*Megnevezés*	*Könyvtár*
`int`	előjeles egész	`Int`
`real`	racionális (valós)	`Real`
`char`	karakter	`Char`
`bool`	logikai	`Bool`
`string`	füzér	`String`
`word`	előjel nélküli egész	`Word`
`word8`	8 bites előjel nélküli egész	`Word8`

Különleges állandók

- Előjeles egész állandó

  Példák: `0` `~0` `4` `~04` `999999` `0xFFFF` `~0x1ff`

  Ellenpéldák: `0.0` `~0.0` `4.0` `1E0` `-317` `0XFFFF` `-0x1ff`

- Racionális (valós) állandó

  Példák: `0.7` `~0.7` `3.32E5` `3E~7` `~3E~7` `3e~7` `~3e~7`

  Ellenpéldák: `23` `.3` `4.E5` `1E2.0` `1E+7` `1E-7`

- Előjel nélküli egész állandó

  Példák: `0w0` `0w4` `0w999999` `0wxFFFF` `0wx1ff`

  Ellenpéldák: `0w0.0` `~0w4` `-0w4` `0w1E0` `0wXFFFF` `0WxFFFF`

- Karakterállandó: a # jelet közvetlenül követő, egykarakteres füzérállandó (l. a következő lapon).

  Példák: `#"a"` `#"\n"` `#"\^Z"` `#"\255"` `#"\""`

  Ellenpéldák: `# "a"` `#c` `#"""` `#'a'`

- Logikai állandó: csupán kétféle lehet.

  Példák: `true` `false`

  Ellenpéldák: `TRUE` `False` `0` `1`

Különleges állandók, escape-szekvenciák

- Füzérállandó: idézőjelek (`"`) között álló nulla vagy több nyomtatható karakter, szóköz vagy \ jellel kezdődő *escape-szekvencia* (l. a táblázatot).
- Escape-szekvenciák

`\a`	Csengőjel (BEL, ASCII 7).
`\b`	Visszalépés (BS, ASCII 8).
`\t`	Vízszintes tabulátor (HT, ASCII 9).
`\n`	Újsor, soremelés (LF, ASCII 10).
`\v`	Függőleges tabulátor (VT, ASCII 11).
`\f`	Lapdobás (FF, ASCII 12).
`\r`	Kocsi-vissza (CR, ASCII 13).
`\^`*c*	Vezérlő karakter, ahol $64 \leq c \leq 95$ (@ ... _), és `\^`*c* ASCII-kódja 64-gyel kevesebb *c* ASCII-kódjánál.
`\`*ddd*	A *ddd* kódú karakter (*d* decimális számjegy).
`\u`*xxxx*	Az *xxxx* kódú karakter (*x* hexadecimális számjegy).
`\"`	Idézőjel (`"`).
`\\`	Hátratört-vonal (\).
$\backslash f \cdots f \backslash$	Figyelmen kívül hagyott sorozat. $f \cdots f$ nulla vagy több formázókaraktert (szóköz, HT, LF, VT, FF, CR) jelent.

NEVEK, OPERÁTOROK

Nevek képzési szabályai

- Alfanumerikus név: kis- és nagybetűk, számjegyek, percjelek (`'`) és aláhúzás-jelek (`_`) olyan sorozata, amely betűvel vagy percjellel kezdődik
  - Példák: `tothGyorgy` `Toth_3_Gyorgy` `toth'gyorgy` `'gyurika`
  - Percjellel kezdődő név csak típusváltozót jelölhet.
- Írásjelekből álló név: az alábbi 20 jel tetszőleges, nem üres sorozata

```
! % & $ # + - / : < = > ? @ \ ~ ' ^ | *
```

  - Példák: `++` `<->` `|||` `##` `|=|`
- Speciális a szerepe az alábbi fenntartott jeleknek

```
( ) [ ] { } , ; . ...
```

- Más jelentés nem rendelhető az alábbi fenntartott nevekhez és jelekhez

```
abstype and andalso as case do datatype else end eqtype exception
fn fun functor handle if in include infix infixr let local nonfix
of op open orelse raise rec sharing sig signature struct structure
then type val where with withtype while : :: :> _ | = => -> #
```

A beépített operátorok és precedenciájuk

Az alábbi táblázatban *wordint*, *num* és *numtxt* az alábbi típusnevek helyett állnak.

wordint = `int`, `word`, `word8`
num = `int`, `real`, `word`, `word8`
numtxt = `int`, `real`, `word`, `word8`, `char`, `string`

Prec.	*Operátor*	*Típus*	*Eredmény*	*Kivétel*
7	`*`	*num* `*` *num* `->` *num*	szorzat	`Overflow`
	`/`	`real * real -> real`	hányados	`Div`, `Overflow`
	`div, mod`	*wordint* `*` *wordint* `->` *wordint*	hányados, maradék	`Div`, `Overflow`
	`quot, rem`	`int * int -> int`	hányados, maradék	`Div`, `Overflow`
6	`+, -`	*num* `*` *num* `->` *num*	összeg, különbség	`Overflow`
	`^`	`string * string -> string`	egybeírt szöveg	`Size`
5	`::`	`'a * 'a list -> 'a list`	elemmel bővített lista (jobbra köt)	
	`@`	`'a list * 'a list -> 'a list`	összefűzött lista (jobbra köt)	
4	`=, <>`	`''a * ''a -> bool`	egyenlő, nem egyenlő	
	`<, <=`	*numtxt* `*` *numtxt* `-> bool`	kisebb, kisebb-egyenlő	
	`>, >=`	*numtxt* `*` *numtxt* `-> bool`	nagyobb, nagyobb-egyenlő	
3	`:=`	`'a ref * 'a -> unit`	értékadás	
	`o`	`('b -> 'c) * ('a -> 'b)-> ('a -> 'c)`	két függvény kompozíciója	
0	`before`	`'a * 'b -> 'a`	a bal oldali argumentum	

`div` $-\infty$, `quot` 0 felé kerekít. `div` és `quot`, ill. `mod` és `rem` eredménye csak akkor azonos, ha két operandusuk azonos előjelű (mindkettő pozitív, vagy mindkettő negatív).

LISTÁK

`map`: adott függvény alkalmazása egy lista minden elemére

- Példa: vonjunk négyzetgyököt egy valós számokból álló lista minden eleméből!
  `map Math.sqrt [1.0, 4.0, 9.0, 16.0] = [1.0, 2.0, 3.0, 4.0]`
- Általában: `map f` [x_1, x_2, ..., x_n] = [f x_1, f x_2, ..., f x_n]
- `map` definíciója (`map` polimorf függvény!):

```
(* map : ('a -> 'b) -> 'a list -> 'b list
   map f xs = az xs f-fel átalakított elemeiből álló lista
*)
fun map f [] = []
  | map f (x :: xs) = f x :: map f xs
```

- `map` típusa (mivel a –> típusoperátor jobbra köt!):
  `('a -> 'b) -> 'a list -> 'b list` ≡ `('a -> 'b) -> ('a list -> 'b list)`
- A `map` egy ún. *részlegesen alkalmazható*, magasabbrendű függvény: ha egy `'a -> 'b` típusú függvényre alkalmazzuk, akkor egy `'a list -> 'b list` típusú **függvényt** ad eredményül. A kapott függvényt egy `'a list` típusú listára alkalmazva egy `'b list` típusú listát kapunk.
- `map` – teljes nevén `List.map` – belső függvény az SML-ben.

PROGRAMHELYESSÉG

A program helyességének (informális) igazolása a `map` példáján

- A rekurzív programról be kell látnunk, hogy
  - funkcionálisan helyes (azt kapjuk eredményül, amit várunk),
  - a kiértékelése biztosan befejeződik (nem „végtelen” a rekurzió).
- Bizonyítása hossz szerinti *strukturális indukcióval* lehetséges (visszavezethető a teljes indukcióra).

```
fun map f [] = []
  | map f (x :: xs) = f x :: map f xs
```

  - Feltesszük, hogy a `map` jó eredményt ad az eggyel rövidebb listára (azaz a lista farkára).
  - Alkalmazzuk az `f`-et a lista első elemére (a fejére).
  - A fej transzformálásával kapott eredményt a farok transzformálásával kapott lista elé fűzve valóban a várt eredményt kapjuk.
  - A kiértekelés véges számú lépésben befejeződik, mert
    - a lista véges,
    - a `map` függvényt a *rekurzív ágban* minden lépésben egyre rövidülő listára alkalmazzuk, és
    - gondoskodtunk a rekurzió leállításáról (a *triviális eset* kezeléséről, ui. van nem rekurzív ág).

NÉHÁNY BELSŐ, ILL. KÖNYVTÁRI FÜGGVÉNY

Néhány belső, ill. könyvtári függvény

- `explode : string -> char list` – a füzér karaktereiből álló lista
  pl. `explode "abc" = [#"a", #"b", #"c"]`
- `implode : char list -> string` – a karakterlista elemeiből álló füzér
  pl. `implode [#"a", #"b", #"c"] = "abc"`
- `map`-nek más változatai is vannak, amelyek egyéb összetett adatokra alkalmazhatók. Például
  - `String.map : (char -> char) -> string -> string`
  - `Vector.map : ('a -> 'b) -> 'a vector -> 'b vector`
- A `Char` könyvtárban sok hasznos ún. *tesztelő* függvény található, például:
  - `Char.isLower : char -> bool` – igaz az angol ábécé kisbetűire
  - `Char.isSpace : char -> bool` – igaz a hat formázó karakterre
  - `Char.isAlpha : char -> bool` – igaz az angol ábécé betűire
  - `Char.isAlphaNum : char -> bool` – igaz az angol ábécé betűire és a számjegyekre
  - `Char.isAscii : char -> bool` – igaz a 128-nál kisebb ascii-kódú karakterekre

  pl. `Char.isSpace #"\t" = true; Char.isAlphaNum #"!" = false`

LISTÁK

`filter`: adott predikátumot kielégítő elemek kiválogatása

- Példa: gyűjtsük ki a kisbetűket egy karakterlistából!

  `List.filter Char.isLower (explode "VaLtOgAtVa") = [#"a",#"t",#"g",#"t",#"a"]`

- Általában, ha `p` x_1 `= true`, `p` x_2 `= false`, `p` x_3 `= true`, ..., `p` x_{2k+1} `= true`, akkor `filter p [`x_1`,` x_2`,` x_3`, ...,` x_{2k+1}`] = [`x_1`,` x_3`, ...,` x_{2k+1}`]`.

- `filter` definíciója:

```
(*   filter : ('a -> bool) -> 'a list -> 'a list
     filter p zs = a zs p-t kielégítő elemeiből álló lista
*)
fun filter _ [] = []
  | filter p (x :: xs) =
      if p x then x :: filter p xs else filter p xs
```

- `filter` típusa, ha egyargumentumú függvénynek tekintjük (−> jobbra köt!):

  `filter : ('a -> bool) -> ('a list -> 'a list).`

  Azaz ha `filter`-t egy `'a -> bool` típusú függvényre (predikátumra) alkalmazzuk, akkor egy `('a list -> 'a list)` függvényt ad eredményül. A kapott függvényt egy `'a list` típusú listára alkalmazva egy `'a list` típusú listát kapunk.

Lista legnagyobb elemének megkeresése

- Egy egészlista legnagyobb elemének kiválasztásához szükségünk van az `Int.max` függvényre.
  - Üres listának nincs legnagyobb eleme,
  - egyelemű listában az egyetlen elem a legnagyobb,
  - legalább kételemű lista legnagyobb elemét úgy kapjuk, hogy az első elem és a maradéklista elemeinek legnagyobbika közül vesszük a nagyobbat.

```
(* maxl : int list -> int
   maxl ns = az ns egészlista
             legnagyobb eleme
*)
fun maxl [] = raise Empty
  | maxl [n] = n
  | maxl (n::ns) = Int.max(n, maxl ns)
```

`max` egy változata egészekre:

```
(* max: int * int -> int
   max (n,m) = n és m közül a nagyobb
*)
fun max (n,m) = if n>m then n else m
```

- `maxl` egy másik változata (az előzővel szemben itt a klózok sorrendje közömbös!):

```
fun maxl' [] = raise Empty
  | maxl' [n] = n
  | maxl' (n::m::ns) = maxl'(Int.max(n,m)::ns)
```

- `maxl'` *jobbrekurzív,* ezért (talán) hatékonyabb, mint `maxl`. De `maxl` szebb, pontosan tükrözi a definíciót (és a rekurzív gondolkodásmódot), a helyességét is könnyebb belátni.

POLIMORFIZMUS

Polimorfizmus

- Nézzük az identitásfüggvényt: `fun id x = x`.
- Mi az `x` típusa? Tetszőleges, típusát *típusváltozó* jelöli: `val 'a id = fn : 'a -> 'a`.
- `id` *polimorf* függvényt jelöl, `x` és `id` *politípusú* nevek.
- A *percjellel* kezdődő típusnév (pl. `'a`, olvasd *alfa*): *típusváltozó*.
- Nézzük az egyenlőségfüggvényt: `fun eq (x, y) = x = y`.
- Mi az `x` és `y` típusa? Tetszőleges, típusát szintén *típusváltozó* jelöli:
  `val ''a eq = fn : ''a * ''a -> bool`.
- A *két* percjellel kezdődő típusnév (pl. `''a`, olvasd *alfa*) az ún. *egyenlőségi típus változója*.

Polimorfizmus többféle változatban fordul elő a programozásban.

- Egy *polimorf név* **egyetlen** olyan algoritmust azonosít, amely tetszőleges típusú argumentumra alkalmazható; ez a *paraméteres polimorfizmus*.
- Egy *többszörösen terhelt név* **több különböző** algoritmust azonosít: ahány típusú argumentumra alkalmazható, annyifélét; ez az *ad-hoc* vagy *többszörös terheléses* polimorfizmus.
- A polimorfizmus harmadik változata az *öröklődéses polimorfizmus* (vö. objektum-orientált programozás).

LOGIKAI MŰVELETEK

Logikai műveletek

- Típusnév: `bool`, adatkonstruktorok: `false`, `true`, beépített függvény: `not`.
- *Lusta kiértékelésű* beépített operátorok
  - Három argumentumú: `if b then e1 else e2`.
    Nem értékeli ki az `e2`-t, ha a `b` igaz, ill. az `e1`-et, ha a `b` hamis.
  - Két argumentumúak:
    `e1 andalso e2` : nem értékeli ki az `e2`-t, ha az `e1` hamis.
    `e1 orelse e2` : nem értékeli ki az `e2`-t, ha az `e1` igaz.
- *Lusta kiértékelés* = kiértékelés szükség szerint *(call-by-need)*: csak akkor értékeli ki az értelmező, amikor szükség van rá.
- Mind három logikai operátor csupán szintaktikus édesítőszer!
  - `if b then e1 else e2` ≡ `(fn true => e1 | false => e2) b`
  - `e1 andalso e2` ≡ `(fn true => e2 | false => false) e1`
  - `e1 orelse e2` ≡ `(fn true => true | false => e2) e1`
- Tipikus hiba: `if` *`exp`* `then true else false` !!!

Logikai műveletek (folyt.)

- Nyilvánvaló: `andalso` és `orelse` kifejezhető `if-then-else`-szel is.
  - `if e1 then e2 else false` ≡ `e1 andalso e2`
  - `if e1 then true else e2` ≡ `e1 orelse e2`
- Használjuk az `andalso`-t és az `orelse`-t az `if-then-else` helyett, ahol csak lehet: olvashatóbb lesz a program.
- Lusta kiértékelésű függvényt a programozó nem definiálhat az SML-ben. Az SML, mielőtt egy függvényt alkalmazna az (egyszerű vagy összetett) argumentumára, kiértékeli.
- Az `andalso` és az `orelse` *mohó kiértékelésű* megfelelői:

```
(* && (a, b) = a /\ b
   && : bool * bool -> bool
*)
fun op&& (a, b) = a andalso b;
infix 2 &&
```

```
(* || (a, b) = a \/ b
   || : bool * bool -> bool
*)
fun op|| (a, b) = a orelse b;
infix 1 ||
```

- `infix` *`prec név1 név2`* `...` : a *`név1 név2`* `...` függvényeket *`prec`* precedenciaszintű, *infix* helyzetű *operátorrá* alakítja.

LISTÁK

Lista legnagyobb elemének megkeresése (folyt.)

- Hogyan tehető *polimorffá* a `maxl` függvény? Úgy, hogy ún. *generikus* függvényként definiáljuk: *aktuális paraméterként* kapja azt a többszörösen terhelhető függvényt, amely két érték közül a nagyobbikat kiválasztja.

```
(* maxl : ('a * 'a -> 'a) -> 'a list -> 'a
   maxl max zs = a zs lista max szerint legnagyobb eleme
*)
fun maxl max [] = raise Empty
  | maxl max [z] = z
  | maxl max (z::zs) = max(z, maxl max zs)
```

- `max` mindig ugyanaz, mégis újra és újra átadjuk argumentumként a rekurzív ágban. Javíthatja a hatékonyságot, ha `let`-*kifejezést* használunk.

```
fun maxl max zs = let fun mxl [] = raise Empty
                        | mxl [y] = y
                        | mxl (y::ys) = max(y, mxl ys)
                  in
                      mxl zs
                  end
```

Változatok max-ra

Változatok max-ra

- ```
  (* charMax : char * char -> char
     charMax (a, b) = a és b közül a nagyobbik
  *)
  fun charMax (a, b) = if ord a > ord b then a else b;
  ```
  vagy egyszerűen (ord nélkül)
  ```
  fun charMax (a : char, b) = if a > b then a else b;
  ```
- ```
  (* pairMax : ((int * real) * (int * real)) -> (int * real)
     pairMax (n, m) = n és m közül lexikografikusan a nagyobbik
  *)
  fun pairMax (n as (n1 : int, n2 : real), m as (m1, m2)) =
        if n1 > m1 orelse n1 = m1 andalso n2 >= m2 then n else m;
  ```
- ```
  (* stringMax : string * string -> string
     stringMax (s, t) = s és t közül a nagyobbik
  *)
  fun stringMax (s : string, t) = if s > t then s else t;
  ```
  ```

ÖSSZETETT ADATTÍPUSOK

Rekord és ennes

- Két különböző típusú értékből rekordot vagy párt képezhetünk. Pl.

  `{x = 2, y = 1.0} : {x : int, y : real}` és `(2, 1.0) : (int * real)`

- A pár is csak szintaktikus édesítőszer. Pl.

  `(2, 1.0)` $\equiv$ `{1 = 2, 2 = 1.0}` $\equiv$ `{2 = 1.0, 1 = 2}` $\neq$ `{1 = 1.0, 2 = 2}`.

  Egy párban a tagok sorrendje meghatározó! Az `1` és a `2` is: *mezőnevek*.

- Rekordot kettőnél több értékből is összeállíthatunk. Pl.

  `{nev = "Bea", tel = 3192144, kor = 19} : {kor : int, nev : string, tel : int}`

  Egy hasonló rekord egészszám-mezőnevekkel:

  `{1 = "Bea", 3 = 3192144, 2 = 19}:  {1 : string, 2 : int, 3 : int}`

  Az *utóbbi* azonos az alábbi *ennessel* (n-tuple):

  `("Bea", 19, 3192144) : (string * int * int)`

  azaz

  `(string * int * int)` $\equiv$ `{1 = string, 2 = int, 3 = int}`

- Egy rekordban a tagok sorrendje közömbös, a tagokat a mezőnév azonosítja. Egy ennesben a tagok sorrendje nem közömbös, a tagokat a *pozícionális* mezőnév azonosítja.

GYENGE ÉS ERŐS ABSZTRAKCIÓ

Adattípusok: gyenge és erős absztrakció

- Gyenge absztrakció: a név szinonima, az adatszerkezet részei továbbra is hozzáférhetők.
- Erős absztrakció: a név új dolgot (entitást, objektumot, izét) jelöl, az adatszerkezet részeihez csak korlátok között lehet hozzáférni.
- `type`: gyenge absztrakció; pl. `type rat = {num : int, den : int}`
  - Új nevet ad egy típuskifejezésnek (vö. értékdeklaráció).
  - Segíti a programszöveg megértését.
- `abstype`: erős absztrakció
  - Új típust hoz létre: név, műveletek, ábrázolás, jelölés.
  - Túlhaladott, van helyette jobb: `datatype` + modulok
- `datatype`: modulok nélkül gyenge, modulokkal erős absztrakció;
  pl. `datatype 'a esetleg = Semmi | Valami of 'a`
  Belső változata az SML-ben: `datatype 'a option = NONE | SOME of 'a`
  - Új entitást hoz létre.
  - Rekurzív és polimorf is lehet.

Adattípusok: felsorolásos és polimorf típusok `datatype` deklarációval

- `datatype logi = Igen | Nem` Felsorolásos típus.
  `datatype logi3 = igen | nem | talan` Felsorolásos típus.
  `datatype 'a esetleg = Semmi | 'a Valami` Polimorf típus.
- *Adatkonstruktornak* nevezzük a létrehozott `Igen`, `Nem`, `igen`, `nem`, `talan`, `Semmi` és `Valami` értékeket. `Valami` ún. *adatkonstruktorfügvény,* az összes többi ún. *adatkonstruktorállandó.* Az adatkonstruktorok a többi értéknévvel azonos névtérben vannak.
- *Típuskonstruktornak* nevezzük a létrehozott `logi`, `logi3` és `esetleg` neveket; `esetleg` ún. postfix *típuskonstruktorfüggvény* (vagy típusoperátor), a másik kettő ún. *típuskonstruktorállandó* (röviden típusállandó). Típusnévként használható a típusállandó (pl. `logi`), valamint a típusállandóra vagy típusváltozóra alkalmazott típuskontruktorfüggvény (pl. `int list` vagy `'a esetleg`). A típuskonstruktorok más névtérben vannak, mint az értéknevek.
- Természetesen az adatkonstruktoroknak is van típusuk, pl.

`Igen : logi`	`Semmi : 'a esetleg`
`Nem : logi`	`Valami : 'a -> 'a esetleg`

- Példa `datatype` deklarációval létrehozott adattípust kezelő függvényre

```
fun inverz Nem = Igen | Igen = Nem
```

LISTÁK

Listák összefűzése (append) és megfordítása (nrev)

- Két lista összefűzése (append, infix változatban @)

$$[x_1, \ldots, x_m]@[y_1, \ldots, y_n] = [x_1, \ldots, x_{m-1}]@(x_m::[y_1, \ldots, y_n]) = \ldots = [x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n]$$

Az xs-t először az elemeire bontjuk, majd hátulról visszafelé haladva fűzzük az elemeket az ys-hez, ugyanis a listákat csak elölről tudjuk építeni. A lépések száma $O(n)$.

```
(* append : 'a list * 'a list -> 'a list
   append(xs, ys) = xs összes eleme ys elé fűzve *)
fun append ([], ys) = ys
  | append (x::xs, ys) = x::append(xs, ys)
```

- Lista naív megfordítása (nrev)

$$\mathtt{nrev}[x_1, x_2, \ldots, x_m] = \mathtt{nrev}[x_2, \ldots, x_m]@[x_1] = \mathtt{nrev}[\ldots, x_m]@[x_2]@[x_1] = \ldots = [x_m, \ldots, x_1]$$

A lista elejéről levett elemet egyelemű listaként tudjuk a végéhez fűzni. A lépések száma $O(n^2)$.

```
(* nrev : 'a list -> 'a list
   nrev xs = xs megfordítva *)
fun nrev [] = []
  | nrev (x::xs) = (nrev xs) @ [x]
```

Listák megfordítása: példa nrev alkalmazására

- Egy példa nrev egyszerűsítésére

```
fun nrev [] = []
  | nrev (x::xs) = (nrev xs) @ [x]

fun [] @ ys = ys
  | (x::xs) @ ys = x :: xs @ ys (* = x :: (xs @ ys) *)
```

A :: és a @ jobbra kötnek, precedenciaszintjük 5.

```
nrev([1,2,3,4]) → nrev([2,3,4])@[1] → nrev([3,4])@[2]@[1]
   → nrev([4])@[3]@[2]@[1] → nrev([])@[4]@[3]@[2]@[1]
   → []@[4]@[3]@[2]@[1] → [4]@[3]@[2]@[1]
   → 4::[]@[3]@[2]@[1] → 4::[3]@[2]@[1])
   → [4,3]@[2]@[1]) → 4::([3]@[2])@[1])
   → []@[4]@(3::[2,1] → []@[4]@[3,2,1] → ...
```

nrev rossz hatékonyságú: a lépések száma $O(n^2)$.

Listák összefűzése (revApp) és megfordítása (rev)

- Egy lista elemeinek egy másik lista elé fűzése fordított sorrendben (revApp)

```
(* revApp : 'a list * 'a list -> 'a list
   revApp(xs, ys) = xs elemei fordított sorrendben ys elé fűzve
*)
fun revApp ([], ys) = ys
  | revApp (x::xs, ys) = revApp(xs, x::ys)
```

revApp lépésszáma arányos a lista hosszával. Segítségével rev hatékonyan:

```
(* rev : 'a list -> 'a list
   rev xs = xs megfordítva
*)
fun rev xs = revApp (xs, [])
```

Egy 1000 elemű listát rev 1000 lépésben, nrev $\frac{1000 \cdot 1001}{2} = 500500$ lépésben fordít meg. Hatalmas a nyereség!

- append – @ néven, infix operátorként – és rev beépített függvények, List.revApp pedig List.revAppend néven könyvtári függvény az SML-ben.

LISTÁK HASZNÁLATA

Példák listák használatára: számtani sorozatok előállítása

Naív változat

```
(* upto1 : int -> int -> int list
   upto1 m n = 1 különbségű növekvő számtani sorozat
               az alulról zárt [m,n) tartományban
*)
fun upto1 m n = if m >= n then [] else m :: upto1 (m+1) n;
```

Naív változat, egy segédfüggvénnyel

```
(* upto2 : int -> int -> int list
   upto2 m n = 1 különbségű növekvő számtani sorozat
               az alulról zárt [m,n) tartományban
*)
fun upto2 m n =
      let fun up m = if m >= n then [] else m :: up (m+1)
      in
          up m
      end;
```

Példák listák használatára: számtani sorozatok előállítása (folyt.)

Naív változatok d különbséggel

```
(* fmto? : int -> int -> int -> int list
   fmto? d m n = d>0 különbségű, m<n esetén növekvő, m>n esetén csökkenő
     számtani sorozat az alulról, ill. felülről zárt [m,n) tartományban
*)
```

. . . két segédfüggvénnyel

```
fun fmto1 d m n =
      let fun up m = if n <= m then [] else m :: up (m+d)
          fun dn m = if m <= n then [] else m :: dn (m-d)
      in  if      d <= 0      then []
          else if n >= m      then up m
          else (* if n < m then *) dn m
      end;
```

. . . egy segédfüggvénnyel

```
fun fmto2 d m n =
      let fun to cmp inc m = if cmp m then [] else m :: to cmp inc (inc m)
      in  if      d <= 0      then []
          else if n >= m      then to (fn i => i >= n) (fn j => j + d) m
          else (* if n < m then *) to (fn i => i <= n) (fn j => j - d) m
      end;
```

Példák listák használatára: számtani sorozatok előállítása (folyt.)

Akkumulátoros változat d különbséggel, egy segédfüggvénnyel

```
(* fmto3 : int -> int -> int -> int list
   fmto3 d n m = d>0 különbségű, m<n esetén növekvő, m>n esetén
       csökkenő számtani sorozat az alulról, ill. felülről zárt
       [m,n) tartományban
*)
fun fmto3 d m n =
      let fun to cmp inc m zs = if cmp m
                                then rev zs
                                else to cmp inc (inc m) (m::zs)
      in
          if   d <= 0
              then []
          else if n >= m
              then to (fn i => i >= n) (fn j => j + d) m []
          else (* if n < m then *)
                   to (fn i => i <= n) (fn j => j - d) m []
      end;
```

Ha az eredménylista sorrendje közömbös, a `rev` elhagyható.

Példák listák használatára: számtani sorozatok előállítása (folyt.)

Generikus akkumulátoros változat komparáló és különbségi függvénnyel

```
(* fmto4 : ('a * 'a -> bool) -> ('a -> 'a) -> 'a -> 'a -> 'a list
   fmto4 le df m n = az le kisebb-vagy-egyenlő reláció és a df
        különbségi függvény szerint növekvő sorozat az alulról,
        ill. felülről zárt [m,n) tartományban
*)
fun fmto4 le df m n =
      let fun to cmp m zs = if cmp m
                            then rev zs
                            else to cmp (df m) (m::zs);
          infix le
      in
          if      m le df m andalso m le n  (*df növel, [m,n)<>üres*)
              then to (fn i => n le i) m []
          else if df m le m andalso n le m  (*df csökkent, [m,n)<>üres*)
              then to (fn i => i le n) m []
              else []
      end;
```

Ha az eredménylista sorrendje közömbös, a `rev` elhagyható.

Példák listák használatára: számtani sorozatok előállítása (folyt.)

Egyszerű akkumulátoros változat, egy segédfüggvénnyel

Az egyesével növekvő sorozat utolsó eleme ismert (`n-1`), ezért a listát hátulról visszafelé építjük fel.

```
(* upto3 : int -> int -> int list
   upto3 m n = 1 különbségű növekvő számtani sorozat
               az alulról zárt [m,n) tartományban
*)
fun upto3 m n =
      let
          (* hátulról visszafelé haladva építjük a listát! *)
          fun up n zs = if m >= n then zs else up (n-1) (n-1::zs)
      in
          up n []
      end;

infix --;
fun fm -- to = upto3 fm to;
```

Gyakorló feladat: a `d = +1` vagy `-1` különbségű számtani sorozatot előállító `upto4 d m n` függvény megírása.

Példák listák használatára: számtani sorozatok előállítása (folyt.)

```
use "upto.sml";

(* egyesével növekvő egészlisták *)

val ns50k  =       1 --   50000;
val ns150k =   50001 --  200000;
val ns200k =  200001 --  400000;
val ns400k =  200001 --  600000;
val ns600k =  600001 -- 1200000;
val ns1M   =  100001 -- 1100000;
val ns2M   =  100001 -- 2100000;

(* más sorozatok *)

  (* 1.5-del csökkenő, 666667 elemű valóslista *)
val rs666667 = fmto4 op>= (fn i => i-1.5) 1000000.0 0.0;
  (* #"A"-tól kezdve minden 2. betűt tartalmazó 13 elemű lista *)
val cs13      = fmto4 op<= (fn i => chr(ord i + 2)) #"A", #"Z";
```

FUTÁSI IDŐ MÉRÉSE

Futási idő mérése PolyML alatt

- Akkumulátor nélküli, naív változatok (PolyML: `"Increasing stack"`)

```
PolyML.timing(true);

val _ = upto1 1 1000000;     (* +1 különbségű növekvő sorozat *)
val _ = upto2 1 1000000;     (* +1 különbségű növekvő sorozat, 1 segédfv. *)
val _ = fmto1 1 1 1000000;   (* +d különbségű növekvő/csökkenő, 1 segédfv. *)
val _ = fmto2 1 1 1000000;   (* +d különbségű növekvő/csökkenő, 2 segédfv. *)

PolyML.timing(false);
```

Részletek a PolyML válaszából:

```
Warning - Increasing stack from 147456 to 294912 bytes
...
Timing - parse:0.0, semantics:0.0, translate:0.0, generate:0.0, run:1.9
Timing - parse:0.0, semantics:0.0, translate:0.0, generate:0.0, run:1.4
Warning - Increasing stack from 9437184 to 18874368 bytes
Timing - parse:0.0, semantics:0.0, translate:0.0, generate:0.0, run:2.2
Timing - parse:0.0, semantics:0.0, translate:0.0, generate:0.0, run:1.5
```

Futási idő mérése PolyML alatt (folyt.)

- Akkumulátoros változatok

```
PolyML.timing(true);

val _ = upto3 1 1000000;    (* +1 különbségű növekvő sorozat, végéről kezd *)
val _ = fmto3 1 1 1000000; (* +d különbségű növekvő/csökkenő, 1 segédfv. *)
val _ = fmto4 op<= (fn i => i+1)   1   1000000;    (* +d kül., gen. *)
val _ = fmto4 op<= (fn i => i+1.0) 1.0 1000000.0; (* +d kül., gen. *)

PolyML.timing(false);
```

Részletek a PolyML válaszából:

```
Timing - parse:0.0, semantics:0.0, translate:0.0, generate:0.0, run:0.8
Timing - parse:0.0, semantics:0.0, translate:0.0, generate:0.0, run:2.4
Timing - parse:0.0, semantics:0.0, translate:0.0, generate:0.0, run:2.2
Timing - parse:0.0, semantics:0.0, translate:0.0, generate:0.0, run:4.6
```

FONTOS APRÓSÁGOK

Fontos apróságok az SML-ről

- A nullas és a `unit` típus

  A `()` vagy `{}` jelet *nullasnak* nevezzük, típusa: `unit`. A nullas a `unit` típus egyetlen eleme. A `unit` típusműveletek *egységeleme*.

- A `print` függvény

  Ha a `string -> unit` típusú `print` függvényt egy füzérre alkalmazzuk, eredménye a *nullas*, *mellékhatásként* pedig kiírja a a füzér értékét.

- Az `(e1; e2; e3)` szekvenciális kifejezés *eredménye* azonos az `e3` kifejezés eredményével. Ha az `e1` és `e2` kifejezéseknek van mellékhatásuk, az érvényesül. `(e1; e2; e3)` egyenértékű a következő `let`-kifejezéssel:

```
let val _ = e1 val _ = e2 in e3 end
```

- Az `e1 before e2 before e3` kifejezés *eredménye* azonos az `e1` kifejezés eredményével. Ha az `e2` és `e3` kifejezésnek van mellékhatása, az érvényesül. `e1 before e2 before e3` egyenértékű a következő `let`-kifejezéssel:

```
let val e = e1 val _ = e2 val _ = e3 in e end
```

FUTÁSI IDŐ MÉRÉSE

Futási idő mérése: Timer – SML Basis Library

```
type cpu_timer
type real_timer
val startCPUTimer : unit -> cpu_timer
val checkCPUTimer : cpu_timer ->
                    {usr: Time.time, sys: Time.time, gc: Time.time}
```

```
[cpu_timer] is the type of timers for measuring CPU time
  consumption (user time, garbage collection time, and system time).
[real_timer] is the type of timers for measuring the passing of
  real time (wall-clock time).
[startCPUTimer ()] returns a cpu_timer started at the moment of
  the call.
[checkCPUTimer tmr] returns {usr, sys, gc} where usr is the amount
  of user CPU time consumed since tmr was started, gc is the amount
  of user CPU time spent on garbage collection, and sys is the
  amount of system CPU time consumed since tmr was started. Note
  that gc time is included in the usr time. Under MS DOS, usr time
  and gc time are measured in real time.
```

Futási idő mérése: Timer és Time – SML Basis Library (folyt.)

```
val startRealTimer : unit -> real_timer
val checkRealTimer : real_timer -> Time.time
```

```
[startRealTimer ()] returns a real_timer started at the moment of
  the call.
[checkRealTimer tmr] returns the amount of real time that has passed
  since tmr was started.
```

```
eqtype time
exception Time
val fmt : int -> time -> string
```

```
[time] is a type for representing durations as well as absolute
  points in time (which can be thought of as durations since some
  fixed time zero).
[zeroTime] represents the 0-second duration, and the origin of time,
  so zeroTime + t = t + zeroTime = t for all t.
[fmt n t] returns as a string the number of seconds represented by
  t, rounded to n decimal digits. If n <= 0, then no decimal digits
  are reported.
```

Futási idő mérése: `idomero`

```
(* app load ["Timer", "Time"]; *)

(* idomero = fn : ('a -> 'b) -> 'a -> 'b * time * time
   idomero f a = az a argumentumra alkalmazott f függvény
       eredményéből, továbbá a kiértékeléséhez felhasznált CPU-időt
       és valós időt másodpercben tartalmazó füzérekből álló hármas
*)
fun idomero f a =
    let
        val RealStart  = Timer.startRealTimer()
        val CPUstart   = Timer.startCPUTimer()
        val res = f a
        val {usr, ...} = Timer.checkCPUTimer CPUstart
        val rtm        = Timer.checkRealTimer RealStart
    in
        (res, usr, rtm)
    end;
```

Futási idő mérése: `idoiro`

```
(* idoiro = fn : string -> ('a -> 'b) -> 'a -> 'b
   idoiro t f a = f a
        mellékhatásként kiírja a t füzért, az a argumentumra
        alkalmazott f függvény kiértékeléséhez felhasznált CPU-időt
        és valós időt (mp-ben)
*)
fun idoiro t f a =
      let val (res, usr, rtm) = idomero f a
      in
          (print (t ^ "   CPU time: " ^ Time.fmt 2 usr ^
                  ", real time: " ^ Time.fmt 2 rtm ^ " (sec)\n");
           res
           )
      end;
```

LISTÁK HASZNÁLATA

Példák listák használatára: `maxl` még több változatban

```
(* app load ["Int"]; *)
use "idomero.sml";
use "szamlistak.sml";
(* maxl? : int list -> int
   maxl? ns = az ns egészlista legnagyobb eleme
*)
```

```
fun maxl1 [n]     = n
  | maxl1 (n::ns) =
             Int.max(n, maxl1 ns)
  | maxl1 []      = raise Empty;

fun maxl2 [n]        = n
  | maxl2 (n::m::ns) =
             maxl2(Int.max(n, m)::ns)
  | maxl2 []         = raise Empty;

fun maxl3 []         = raise Empty
  | maxl3 [n]        = n
  | maxl3 (n::m::ns) =
             maxl3(Int.max(n, m)::ns);
```

```
fun maxl4 [] = raise Empty
  | maxl4 ns =
      let (* [] esete lefedetlen! *)
          fun mxl [n]        = n
            | mxl (n::m::ns) =
                 mxl(Int.max(n, m)::ns)
      in  mxl ns
      end;

fun maxl5 []      = raise Empty
  | maxl5 (n::ns) =
      let fun mxl (m, [])    = m
            | mxl (m, n::ns) =
                 mxl(Int.max(m, n), ns)
      in  mxl(n, ns)
      end;
```

Példák listák használatára: `maxl` még több változatban (folyt.)

```
(* maxl? : ('a*'a->'a) * 'a list -> 'a
   maxl? (max, ns) = az ns lista max
           szerinti legnagyobb eleme
*)
fun maxl6 (max, [])        = raise Empty
  | maxl6 (max, [n])       = n
  | maxl6 (max, n::m::ns) =
             maxl6(max, max(n, m)::ns);

fun maxl7 (max, []) = raise Empty
  | maxl7 (max, ns) =
      let (* [] esete lefedetlen! *)
          fun mxl [n]         = n
            | mxl (n::m::ns) =
                    mxl(max(n, m)::ns)
      in mxl ns end;

fun maxl8 (max, [])     = raise Empty
  | maxl8 (max, n::ns) =
      let fun mxl (m, [])     = m
            | mxl (m, n::ns) =
                     mxl(max(m, n),ns)
      in mxl(n, ns) end;
```

```
datatype 'a esetleg = Semmi
                    | Valami of 'a;
(* maxl9 : ('a*'a->'a) * 'a list
                          -> 'a esetleg
   maxl9 (max, ns) = az ns lista max
               szerinti legnagyobb eleme
*)
fun maxl9 (max, [])    = Semmi
  | maxl9 (max, n::ns) =
      let fun mxl (m, [])    = Valami m
            | mxl (m, n::ns) =
                     mxl(max(m, n),ns)
      in mxl(n, ns)
      end;
```

- Példák `maxl` alkalmazására:

```
maxl7(Int.max, [1,3,9,7,4,6,2]) = 9;
maxl8(op+, [1,2,3,4,5,6,7,8,9]) = 45;
maxl9(op*, [1,2,3,4,5,6,7,8,9]) =
                          Valami 362880;
```

- Furcsa „maximum” `maxl8(...)` és `maxl9(...)` eredménye!

`maxl` futási idejének mérése `idoiro`-val

```
idoiro "maxl1, ns2M: " maxl1 ns2M;
idoiro "maxl2, ns2M: " maxl2 ns2M;
idoiro "maxl3, ns2M: " maxl3 ns2M;
idoiro "maxl4, ns2M: " maxl4 ns2M;
idoiro "maxl5, ns2M: " maxl5 ns2M;
idoiro "maxl6, ns2M: " maxl6(Int.max, ns2M);
idoiro "maxl7, ns2M: " maxl7(Int.max, ns2M);
idoiro "maxl8, ns2M: " maxl8(Int.max, ns2M);
idoiro "maxl9, ns2M: " maxl9(Int.max, ns2M);
```

Részletek a PolyML válaszából:

```
Warning - Increasing stack from 9437184 to 18874368 bytes
maxl1, ns2M:    CPU time: 4.57, real time: 7.99 (sec)
maxl2, ns2M:    CPU time: 0.73, real time: 1.00 (sec)
maxl3, ns2M:    CPU time: 0.80, real time: 0.80 (sec)
maxl4, ns2M:    CPU time: 0.83, real time: 0.83 (sec)
maxl5, ns2M:    CPU time: 0.14, real time: 0.16 (sec)   !!!
maxl6, ns2M:    CPU time: 1.41, real time: 1.41 (sec)
maxl7, ns2M:    CPU time: 1.54, real time: 1.55 (sec)
maxl8, ns2M:    CPU time: 0.85, real time: 0.85 (sec)
  val it = 2099999 : Int.int
maxl9, ns2M:    CPU time: 0.86, real time: 0.85 (sec)
  val it = Valami 2099999 : Int.int esetleg
```

LISTÁK HASZNÁLATA

Példák listák használatára: futamok előállítása

A futam olyan elemekből álló lista, amelynek szomszédos elemei kielégítenek egy predikátumot.
Írjon olyan SML függvényt `futamok` néven, amelynek egy lista futamaiból álló lista az eredménye.

- Első változat: futam és maradék előállítása két függvénnyel

```
(* futam1 : ('a * 'a -> bool)  -> ('a * 'a list) -> 'a list
   futam1 p (x, ys) = az x::ys p-t kielégítő első futama (prefixuma) *)
fun futam1 p (x, [])    = [x]
  | futam1 p (x, y::ys) = if p(x, y) then x :: futam1 p (y, ys) else [x]

(* maradek : ('a * 'a -> bool) ->  ('a * 'a list) -> 'a list
   maradek p (x, ys) = az x::ys p-t kielégítő futama utáni maradéka *)
fun maradek p (x, [])           = []
  | maradek p (x, yys as y::ys) = if p(x ,y) then maradek p (y, ys) else yys

(* futamok1 : ('a * 'a -> bool) -> 'a list -> 'a list list
   futamok1 p xs = az xs p-t kielégítő futamaiból álló lista *)
fun futamok1 p []      = []
  | futamok1 p (x::xs) =
      let val fs = futam1 p (x, xs)
          val ms = maradek p (x, xs)
      in
          if null ms then [fs] else fs :: futamok1 p ms
      end;
```

Példák listák használatára: futamok előállítása (folyt.)

- Példák:

```
futam1   op<= (1, [9,19,3,4,24,34,4,11,45,66,13,45,66,99]);
maradek  op<= (1, [9,19,3,4,24,34,4,11,45,66,13,45,66,99]);
futamok1 op<= [1,9,19,3,4,24,34,4,11,45,66,13,45,66,99];
futamok1 op<= [99,1];
futamok1 op<= [99];
futamok1 op<= [];
```

- Hatékonyságot rontó tényezők
  1. `futamok1` kétszer megy végig a listán: először `futam1`, azután `maradek`,
  2. `p`-t paraméterként adjuk át `futam1`-nek és `maradek`-nak,
  3. egyik függvény sem használ akkumulátort.
- Javítási lehetőség
  1. `futam2` egy párt adjon eredményül, ennek első tagja legyen a futam, második tagja pedig a maradék; a futam elemeinek gyűjtésére használjunk akkumulátort,
  2. `futam2` legyen lokális `futamok2`-n belül,

Példák listák használatára: futamok előállítása (folyt.)

- Második változat: futam és maradék előállítása egy függvénnyel

```
(* futam2 : ('a * 'a -> bool)  -> ('a * 'a list) -> 'a list * 'a list

   futam2 p (x, ys) zs = olyan pár, amelynek első tagja az x::ys p-t
                         kielégítő első futama (prefixuma) a zs elé fűzve,
                         második tagja pedig az x::ys maradéka
*)
fun futam2 p (x, []) zs           = (rev(x::zs), [])
  | futam2 p (x, yys as y::ys) zs = if p(x, y)
                                        then futam2 p (y, ys) (x::zs)
                                    else (rev(x::zs), yys);

(* futamok2 : ('a * 'a -> bool) -> 'a list -> 'a list list
   futamok2 p xs = az xs p-t kielégítő futamaiból álló lista
*)
fun futamok2 p []      = []
  | futamok2 p (x::xs) =
      let val (fs, ms) = futam2 p (x, xs) []
      in
          if null ms then [fs] else fs :: futamok2 p ms
      end;
```

Példák listák használatára: futamok előállítása (folyt.)

- Harmadik változat: futam és maradék előállítása egy lokális függvénnyel

```
(* futamok3 : ('a * 'a -> bool) -> 'a list -> 'a list list
   futamok3 p xs = az xs p-t kielégítő futamaiból álló lista
*)
fun futamok3 p []      = []
  | futamok3 p (x::xs) =
      let (* futam : ('a * 'a list) -> 'a list * 'a list
             futam (x, ys) zs = olyan pár, amelynek első tagja az x::ys p-t
                                kielégítő első futama (prefixuma) a zs elé
                                fűzve, második tagja pedig az x::ys maradéka
          *)
          fun futam (x, []) zs           = (rev(x::zs), [])
            | futam (x, yys as y::ys) zs = if p(x, y)
                                               then futam (y, ys) (x::zs)
                                           else (rev(x::zs), yys);
          val (fs, ms) = futam (x, xs) []
      in
          if null ms then [fs] else fs :: futamok3 p ms
      end;
```

Példák listák használatára: futamok előállítása (folyt.)

- Negyedik változat: az egyes futamokat és a futamok listáját is gyűjtjük

```
(* futamok4 : ('a * 'a -> bool) -> 'a list -> 'a list list
   futamok4 p xs = az xs p-t kielégítő futamaiból álló lista
*)
fun futamok4 p []      = []
  | futamok4 p (x::xs) =
      let (* futamok : ('a * 'a list) -> 'a list -> 'a list * 'a list
             futamok (x, ys) zs zss = az x::ys p-t kielégítő futamaiból álló
                                      lista zss elé fűzve
          *)
          fun futamok (x, []) zs zss           = rev(rev(x::zs)::zss)
            | futamok (x, yys as y::ys) zs zss =
                if p(x, y)
                    then futamok (y, ys) (x::zs) zss
                else futamok (y, ys) [] (rev(x::zs)::zss)
      in
          futamok (x, xs) [] []
      end;
```

LISTÁK

Adott számú elem egy lista elejéről és végéről (`take`, `drop`)

- Legyen $xs = [x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}]$, akkor `take(xs, i)` $= [x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}]$ és `drop(xs, i)` $= [x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}]$.

```
(* take : 'a list * int -> 'a list
   take (xs, i) = xs, ha i < 0; az xs első i db eleméből
                  álló lista, ha i >= 0
*)
fun take (_, 0)      = []
  | take ([], _)     = []
  | take (x::xs, i)  = x :: take(xs, i-1);

(* drop : 'a list * int -> 'a list
   drop(xs, i) = xs, ha i < 0; az xs első i db elemének
                 eldobásával előálló lista, ha i >= 0
*)
fun drop ([], _)     = []
  | drop (x::xs, i)  = if i > 0 then drop (xs, i-1) else x::xs;
```

- Könyvtári változatuk, `List.take`, ill. `List.drop`, ha az `xs` listára alkalmazzuk, $i < 0$ vagy $i >$ `length xs` esetén `Subscript` néven kivételt jelez.

LISTA REDUKCIÓJA

Lista redukciója kétoperandusú művelettel (`foldr`, `foldl`)

- Vissza-visszatérő feladat egy lista redukciója kétoperandusú művelettel. Közös, hogy n db értékből egyetlen értéket kell előállítani (vö. *redukció*).
- `foldr` jobbról balra, `foldl` balról jobbra haladva egy kétoperandusú műveletet (pontosabban egy *párra alkalmazható, prefix* pozíciójú *függvényt*) alkalmaz egy listára. Példák szorzat és összeg kiszámítására:

```
foldr op* 1.0 [] = 1.0;                       foldl op+ 0 [] = 0;
foldr op* 1.0 [4.0] = 4.0;                    foldl op+ 0 [4] = 4;
foldr op* 1.0 [1.0, 2.0, 3.0, 4.0] = 24.0;    foldl op+ 0 [1, 2, 3, 4] = 10;
```

- Jelöljön $\oplus$ tetszőleges kétoperandusú infix operátort. Akkor

$$\texttt{foldr op}\oplus\ \texttt{e [}x_1\texttt{, }x_2\texttt{, ..., }x_n\texttt{]} = (x_1 \oplus (x_2 \oplus \ldots \oplus (x_n \oplus \texttt{e})\ \ldots))$$
$$\texttt{foldr op}\oplus\ \texttt{e [] = e}$$
$$\texttt{foldl op}\oplus\ \texttt{e [}x_1\texttt{, }x_2\texttt{, ..., }x_n\texttt{]} = (x_n \oplus \ldots \oplus (x_2 \oplus (x_1 \oplus \texttt{e}))\ \ldots)$$
$$\texttt{foldl op}\oplus\ \texttt{e [] = e}$$

- Asszociatív műveleteknél `foldr` és `foldl` eredménye azonos.

Példák `foldr` és `foldl` alkalmazására

- A ⊕ művelet `e` operandusa néhány gyakori műveletben – összeadás, szorzás, konjunkció (logikai „és”), alternáció (logikai „vagy”) – a (jobb oldali) *egységelem* szerepét tölti be.
- `isum` egy egészlista elemeinek összegét, `rprod` egy valóslista elemeinek szorzatát adja eredményül.

```
val isum = foldr op+ 0;                 val rprod = foldr op+ 1.0;
val isum = foldl op+ 0;                 val rprod = foldl op+ 1.0;
```

- A `length` függvény is definiálható `foldl`-lel vagy `foldr`-rel. Kétoperandusú műveletként olyan segédfüggvényt (`inc`) alkalmazunk, amelyik *nem használja* az első paraméterét.

```
(* inc : 'a * int -> int
   inc (_, n) = n + 1 *)
fun inc (_, n) = n + 1;
(* lengthl, lengthr : 'a list -> int *)
val lengthl = fn ls => foldl inc 0 ls;
fun lengthr ls = foldr inc 0 ls;

lengthl (explode "tengertanc");
lengthr (explode "hajdu sogor");
```

Lista: `foldr` és `foldl` definíciója

- `foldr` op$\oplus$ `e` [x_1, x_2, ..., x_n] = ($x_1 \oplus$ ($x_2 \oplus \ldots \oplus$ ($x_n \oplus$ e) ...))
  `foldr` op$\oplus$ `e [] = e`

```
(* foldr f e xs = az xs elemeire jobbról balra haladva
                  alkalmazott, kétoperandusú, e egységelemű
                  f művelet eredménye
   foldr : ('a * 'b -> 'b) -> 'b -> 'a list -> 'b *)
fun foldr f e (x::xs) = f(x, foldr f e xs)
  | foldr f e [] = e;
```

- `foldl` op$\oplus$ `e` [x_1, x_2, ..., x_n] = ($x_n \oplus \ldots \oplus$ ($x_2 \oplus$ ($x_1 \oplus$ e)) ...)
  `foldl` op$\oplus$ `e [] = e`

```
(* foldl f e xs = az xs elemeire balról jobbra haladva
                  alkalmazott, kétoperandusú, e egységelemű
                  f művelet eredménye
   foldl : ('a * 'b -> 'b) -> 'b -> 'a list -> 'b *)
fun foldl f e (x::xs) = foldl f (f(x, e)) xs
  | foldl f e [] = e;
```

További példák `foldr` és `foldl` alkalmazására

- Egy lista elemeit egy másik lista elé fűzi `foldr` és `foldl`, ha kétoperandusú műveletként a *cons* konstruktorfüggvényt – azaz az `op::`-ot – alkalmazzuk.

  `foldr op:: ys` $[x_1, x_2, x_3]$ = $(x_1$ `::` $(x_2$ `::` $(x_3$ `:: ys)))`

  `foldl op:: ys` $[x_1, x_2, x_3]$ = $(x_3$ `::` $(x_2$ `::` $(x_1$ `:: ys)))`

- A `::` nem asszociatív, ezért `foldl` és `foldr` eredménye különböző!

```
(* append : 'a list -> 'a list -> 'a list
   append xs ys = az xs ys elé fűzésével előálló lista *)
fun append xs ys = foldr op:: ys xs;

(* revApp : 'a list -> 'a list -> 'a list
   revApp xs ys = a megfordított xs ys elé fűzésével
                  előálló lista *)
fun revApp xs ys = foldl op:: ys xs;
```

`append [1, 2, 3] [4, 5, 6] = [1, 2, 3, 4, 5, 6];` (vö. Prolog: `append`)

`revApp [1, 2, 3] [4, 5, 6] = [3, 2, 1, 4, 5, 6];` (vö. Prolog: `revapp`)

További példák `foldr` és `foldl` alkalmazására

- `maxl` két további megvalósítása

```
datatype 'a esetleg = Semmi | Valami of 'a

(* maxl10 : ('a * 'a -> 'a) -> 'a list -> 'a esetleg
   maxl10 max ns = az ns lista max szerinti legnagyobb eleme
*)
fun maxl10 max []       = Semmi
  | maxl10 max (n::ns) = Valami(foldl max n ns)

(* maxl11 : ('a * 'a -> 'a) -> 'a list -> 'a esetleg
   maxl11 max ns = az ns lista max szerinti legnagyobb eleme
*)
fun maxl11 max []       = Semmi
  | maxl11 max (n::ns) = Valami(foldr max n ns)

idoiro "maxl10, ns200k, foldl-rel: " maxl10 Int.max ns200k;
idoiro "maxl11, ns200k, foldr-rel: " maxl11 Int.max ns200k;
idoiro "maxl10, ns2M, foldl-rel: "   maxl10 Int.max ns2M;
```

Lista redukciója bal oldali egységelemű függvénnyel (`foldL`)

- A kivonás művelete balra köt: $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = ((x_1 - x_2) - x_3) - x_4$.
- Nem feleltethető meg sem `foldr`-nek, sem `foldl`-nek.

  foldr op$\oplus$ e [x$_1$, x$_2$, ..., x$_n$] = (x$_1$ $\oplus$ (x$_2$ $\oplus$ ... $\oplus$ (x$_n$ $\oplus$ e) ...))

  foldl op$\oplus$ e [x$_1$, x$_2$, ..., x$_n$] = (x$_n$ $\oplus$ ... $\oplus$ (x$_2$ $\oplus$ (x$_1$ $\oplus$ e)) ...)
- Nevezzük `foldL`-nek a listában *balról jobbra* haladó, alábbi specifikációjú függvényt. Vegyük észre, hogy $\oplus$ *bal oldali* egységelemet vár.

  foldL op$\oplus$ e [x$_1$, x$_2$, ..., x$_n$] =

  (... ((e $\oplus$ x$_1$) $\oplus$ x$_2$) $\oplus$ ... $\oplus$ x$_n$)
- `foldL` olyan kétargumentumú függvényt vár, amelynek az „egységelem” (valójában: a részeredmény) az *első* argumentuma: `f : 'a * 'b -> 'a`.

```
(* foldL : ('a * 'b -> 'a) -> 'a -> 'b list -> 'a
   foldL f e xs = az xs elemeire balról jobbra haladva
                  alkalmazott, kétoperandusú, e egységelemű
                  f művelet eredménye *)
fun foldL f e (x::xs) = foldL f (f(e, x)) xs
  | foldL f e [] = e;
```

Példák listaelemek különbségének és hányadosának képzésére

- Az `e` argumentum aktuális értéke a sorozat *első* eleme – a *kisebbítendő*, ill. az *osztandó*.

```
foldL op- 20 [] = 20;
foldL op- 20 [5, 6, 7] = (((20 - 5) - 6) - 7);
foldL (op div) 180  [] = 180;
foldL (op div) 180  [2, 3, 5] = (((180 div 2) div 3) div 5);
```

- Ha többször használjuk e műveleteket, érdemes nekik nevet adni. A kisebbítendő, ill. az osztandó speciális kezelését elrejtjük.

```
fun subtract ns = foldL op- (hd ns) (tl ns);
subtract [20, 5, 6, 7] = (((20 - 5) - 6) - 7);

fun divide ns = foldL op div (hd ns) (tl ns);
divide [180, 2, 3, 5] = (((180 div 2) div 3) div 5);
```

Listaelemek különbsége és hányadosa `foldl`-lel és `foldr`-rel

- Igazság szerint `foldL` felesleges: a feladat jól megoldható `foldl`-lel vagy `foldr`-rel is.

```
fun subtract1 ns = hd ns - foldl op+ 0 (tl ns);
subtract1 [20, 5, 6, 7] = (((20 - 5) - 6) - 7);

fun divide1 ns = hd ns div foldl op* 1 (tl ns);
divide1 [180, 2, 3, 5] = (((180 div 2) div 3) div 5);
```

- `foldr` és `foldl` típusa, ha egyparaméteres függvénynek tekintjük őket (a –> jobbra köt!):

  ```
  foldr, foldl : ('a * 'b -> 'b) -> ( 'b -> 'a list -> 'b)
  ```

  Azaz ha `foldr`-t vagy `foldl`-t egy `'a -> * 'b -> 'b` típusú függvényre alkalmazzuk, akkor olyan függvényt ad eredményül, amelyet egy `'b` típusú egységelemre és egy `'a list` típusú listára alkalmazva `'b` típusú (redukált) értéket kapunk.

ÖSSZETETT ADATTÍPUSOK

Felhasználói adattípusok: ismét a `datatype` deklarációról

- `person` néven új összetett típust hozunk létre:

```
datatype person = King
                | Peer of string * string * int
                | Knight of string
                | Peasant of string
```

- Az új típusnak négy *adatkonstruktora* (röviden: *konstruktora)* van: `King`, `Peer`, `Knight` és `Peasant`.
- `King` ún. *adatkonstruktorállandó*, a többi ún. *adatkonstruktorfüggvény.*
- Az adatkonstruktoroknak is van típusuk:

```
King :    person
Peer :    string * string * int -> person
Knight :  string -> person
Peasant : string -> person
```

A `datatype` deklaráció (folyt.)

```
King :    person
Peer :    string * string * int -> person
Knight :  string -> person
Peasant : string -> person
```

- `King` (király) csak egy van, ezért definiálhattuk konstruktorállandóként.
- A `Peer`-t (főnemest) nemesi címe (`string`), birtokának neve (`string`) és sorszáma (`int`) azonosítja.
- A `Knight`-ot (lovagot) és a `Peasant`-ot (parasztot) csupán a neve (`string`) azonosítja.
- Példa a `person` adattípus alkalmazására:

```
- val persons = [King, Peasant "Jack Cade", Knight "Gawain",
                 Peer("Duke", "Norfolk", 9)];
> val persons = [King, Peasant "Jack Cade", ...] : person list
```

- Az egyes esetek mintaillesztéssel választhatók szét.
- Minden esetet le kell fedni mintával; ha nem, figyelmeztetést kapunk.
- A minták tetszőlegesen összetettek lehetnek.

A `datatype` deklaráció (folyt.)

- Az alábbi példában a négy közül az egyik a `Peasant name` *minta*, és benne `name` a *mintaazonosító*.

```
(* title : person -> string
   title p = p megszólítása *)
fun title King = "His Majesty the King "
  | title (Peer (deg, ter, _)) = "The " ^ deg ^ " of " ^ ter
  | title (Knight name) = "Sir " ^ name
  | title (Peasant name) = name
```

- A `sirs` függvény az összes `Knight` nevét összegyűjti a `person` típusú személyek egy listájából (a változatok sorrendje *fontos* az _ miatt!):

```
(* sirs : person list -> string list
   sirs ps = az összes Knight nevének listája *)
fun sirs [] = []
  | sirs ((Knight s)::ps) = s::sirs ps
  | sirs (_::ps) = sirs ps
```

A `datatype` deklaráció (folyt.)

- Ha más lenne a változatok sorrendje, a `_::ps` minta nemcsak a `King`-re, a `Peer`-re és a `Peasant`-ra illeszkedne (ti. ezek helyett áll a példában), hanem a `Knight`-ra is.
- Az összes diszjunkt eset fölsorolása segíti az algoritmus helyességének belátását, bizonyítását.
- Azért vontunk össze három esetet egyetlen változatban, mert a részletezésük hosszabbá tenné a program szövegét is, végrehajtását is.
- A bizonyítás nem okoz gondot, ha a függvény harmadik sorát (`sirs (_::ps) = sirs ps`) *feltételes egyenletnek* tekintjük:

$$\texttt{sirs(p::ps) = sirs ps } \textbf{if } \forall \texttt{s}\cdot\texttt{p} \neq \texttt{Knight s}.$$

A `datatype` deklaráció (folyt.)

- A sorrend még fontosabb a következő példában, amelyben személyek hierarchiáját vizsgáljuk. Itt 16 helyett csak 7 esetet kell megkülönböztetnünk: azokat, amelyek *igaz* eredményt adnak.

```
(* superior : person * person -> bool
   superior (p, r)= igaz, ha p magasabb rangú r-nél *)
fun superior (King, Peer _) = true
  | superior (King, Knight _) = true
  | superior (King, Peasant _) = true
  | superior (Peer _, Knight _) = true
  | superior (Peer _, Peasant _) = true
  | superior (Knight _, Peasant _) = true
  | superior _ = false
```

Felsorolásos típus `datatype` deklarációval

- Gyakori, hogy egy név csak néhány különböző értéket vehet fel (azaz a név által felvehető értékek halmaza kis számosságú), ilyen esetben érdemes *felsorolásos típust* létrehozni a `datatype` deklarációval. Pl.

```
datatype degree = Duke | Marquis | Earl | Viscount | Baron
```

- A felsorolásos típusnak csak *konstruktorállandói* vannak. Az új típus alkalmazásához a `person` típust újra deklarálnunk kell:

```
datatype person = King
                | Pear of degree * string * int
                | Knight of string
                | Peasant of string
```

Felsorolásos típus `datatype` deklarációval (folyt.)

- A `degree` típusú adatok feldolgozásakor külön-külön elemezzük az előforduló eseteket, pl.

```
(* lady : degree -> string
   lady p = p főnemes hitvesének rangja *)
fun lady Duke     = "Duchess "
  | lady Marquis  = "Marchioness"
  | lady Earl     = "Countess"
  | lady Viscount = "Viscountess"
  | lady Baron    = "Baroness"
```

- A belső `bool` típushoz hasonló `Bool` típust és hozzá a `Not` függvényt például így is deklarálhatnánk, ill. definiálhatnánk:

```
datatype Bool = True | False
(* Not : Bool -> Bool
   Not b = b negáltja *)
fun Not True = False | Not False = True
```

Polimorf adattípusok

- Láttuk, hogy a `list` *postfix* pozíciójú *típusoperátor,* nem típus: a `datatype` deklaráció az adatkonstruktorok mellett *típuskonstruktort* is létrehoz.
- A belső `'a list` típushoz hasonló `'a List` listát és vele együtt a `Nil` és a `Cons` *adatkonstruktorokat* például így definiálhatjuk:

```
datatype 'a List = Nil | Cons of 'a * 'a List
```

- A `Cons` *adatkonstruktorfüggvény* alkalmazásával elég körülményes a listák létrehozása. Az 1, 2, 3, 4 sorozatot például így kell megadni:

```
Cons(1, Cons(2, Cons(3, Cons(4, Nil))))
```

- Bevezethetjük az *infix* pozíciójú `:::` *adatkonstruktoroperátort:*

```
infix 5 ::: ; val op ::: = Cons
```

- A *hatospontot* közvetlenül a típusdeklarációban is definiálhatjuk:

```
infix 5 ::: ; datatype 'a List = Nil | ::: of 'a * 'a List
```

Polimorf adattípusok: megkülönböztetett egyesítés

- Következő példánk két típus *megkülönböztetett egyesítése,* más néven diszjunkt uniója:

```
datatype ('a, 'b) disun = In1 of 'a | In2 of 'b
```

- Itt három dolgot definiáltunk:

  1. a kétargumentumú `disun` típusoperátort,
  2. az `In1 : 'a -> ('a, 'b) disun` és
  3. az `In2 : 'b -> ('a, 'b) disun` adatkonstruktorfüggvényeket.

- `('a, 'b) disun` az `'a` és `'b` típusok megkülönböztetett egyesítése. *Megkülönböztetettnek* nevezzük az egyesítést, mert később is bármikor meg tudjuk mondani, hogy egy `('a, 'b) disun` típusú pár egyik vagy másik eleme melyik alaptípusból származik. Az új típusba tartozó értékek `In1 x` alakúak, ha `x` `'a` típusú, és `In2 y` alakúak, ha `y` `'b` típusú.
- Az `In1` és `In2` konstruktorfüggvények olyan *címkének* tekinthetők, amelyek az `'a` típust megkülönböztetik a `'b` típustól.

Megkülönböztetett egyesítés (folyt.)

- A megkülönböztetett egyesítés lehetővé teszi, hogy különböző típusokat használjunk ott, ahol egyébként csak egyetlen típust használhatnánk (vö. objektum-orientált programozás, ahol pl. egy *alakzat* osztálynak *téglalap, háromszög* vagy *kör* nevű leszármazottai lehetnek).
- Az SML-ben megkülönböztetett egyesítéssel tudunk létrehozni *különböző típusú elemekből* álló listát:

```
[In2 King, In1 "Skócia"] : ((string, person) disun) list;
[In1 "zsarnok", In2 1040] : ((string, int) disun) list
```

- A lehetséges eseteket most is *mintaillesztéssel* elemezhetjük, pl.

```
(* concat : (string, 'a) disun list -> string
   concat d = a d diszjunkt unió In1 címkéjű
              elemeinek konkatenációja         *)
fun concat [] = ""
  | concat (In1 s :: ls) = s ^ concat ls
  | concat (In2 _ :: ls) = concat ls
```

Megkülönböztetett egyesítés (folyt.)

- Egy példa `concat` alkalmazására:

```
- concat [In1 "Ó! ", In2 King, In1 "Skócia"];
> val it = "Ó! Skócia : string
```

- Az `In1` konstruktorfüggvény típusa `'a -> ('a, 'b) disun`, ezért a `string` típusú `"Ó!"` argumentumra alkalmazva `(string, 'b) disun` típusú érték az eredmény.
- Az `In2` konstruktorfüggvény típusa `'b -> ('a, 'b) disun`, ezért a `person` típusú `King` kifejezésre alkalmazva `('a, person) disun` típusú érték az eredmény.
- Az `[In1 "Ó!", In2 King, In1 "Skócia"]` kifejezésben mindkét alaptípust lekötjük, ezért ennek a listának a típusa: `((string, person) disun) list`.
- Az `[In2 "Ó", In2 King, In1 "Skócia"]` kifejezés kiértékelése hibajelzést eredményez, mert a `'b` típusváltozót nem lehet ugyanabban a kifejezésben egyszer így, másszor úgy lekötni.

ESETSZÉTVÁLASZTÁS, OPCIONÁLIS ÉRTÉK

Esetszétválasztás (`case`)

```
case E of P1 => E1 | P2 => E2 | ··· | Pn => En
```

Az SML-értelmező – balról jobbra és fölülről lefelé haladva – megpróbálja `E`-t `P1`-re illeszteni, ha nem sikerül, `P2`-re s.í.t. A `case`-kifejezés eredménye az `E` kifejezésre illeszkedő első `Pi` mintához tartozó `Ei` kifejezés lesz.
A `case` is csak szintaktikus édesítőszer, ui. helyettesíthető `fn`-jelöléssel:

```
(fn P1 => E1 | P2 => E2 | ··· | Pn => En) E
```

Például a `lady` függvényt így is definiálhattuk volna:

```
datatype degree = Duke | Marquis | Earl | Viscount | Baron
```

```
(* lady : degree -> string
   lady p = p főnemes
            hitvesének rangja *)
fun lady p =
      case p of
        Duke     => "Duchess "
      | Marquis  => "Marchioness"
      | Earl     => "Countess"
      | Viscount => "Viscountess"
      | Baron    => "Baroness"
```

```
(* lady : degree -> string
   lady p = p főnemes
            hitvesének rangja *)
fun lady p =
      (fn
         Duke     => "Duchess "
       | Marquis  => "Marchioness"
       | Earl     => "Countess"
       | Viscount => "Viscountess"
       | Baron    => "Baroness"
      ) p
```

Opcionális érték kezelése (`'a option`)

```
datatype 'a option = NONE | SOME of 'a
```

Függvények az `Option` könyvtárból:

```
val getOpt         : 'a option * 'a -> 'a
val isSome         : 'a option -> bool
val valOf          : 'a option -> 'a
val filter         : ('a -> bool) -> 'a -> 'a option
val map            : ('a -> 'b) -> 'a option -> 'b option
val mapPartial     : ('a -> 'b option) -> ('a option -> 'b option)
```

`getOpt (xopt, d) = x if xopt is SOME x, d otherwise.`

`isSome xopt = true if xopt is SOME x, false otherwise.`

`valOf xopt = x if xopt is SOME x, raises Option otherwise.`

`filter p x = SOME x if p x is true, NONE otherwise.`

`map f xopt = SOME(f x) if xopt is SOME x, NONE otherwise.`

`mapPartial f xopt = f x if xopt is SOME x, NONE otherwise.`

Példák opcionális értékek kezelésére

- Egészlista legnagyobb elemének kiválasztása

  Üres listának nincs legnagyobb eleme; egyelemű lista egyetlen eleme a „legnagyobb”; legalább kételemű lista legnagyobb eleme az első elem és a maradéklista elemei közül a legnagyobb.

```
(* maxl : int list -> int option
   maxl ns = az ns egészlista legnagyobb eleme *)
fun maxl []       = NONE     (* üres *)
  | maxl [n]      = SOME n   (* egyelemű *)
  | maxl (n::ns) =           (* legalább kételemű *)
            SOME(Int.max(n, valOf(maxl ns)))
```

- Füzér elején álló karaktersorozat átalakítása egész számmá

```
val Int.fromString : string -> int option (* Overflow *)

Int.fromString s = SOME i if a decimal integer numeral can be scanned
          from a prefix of string s, ignoring any initial whitespace;
          NONE otherwise.  A decimal integer numeral, after any initial
          whitespace, must have the form: [+~-]?[0-9]+

Int.fromString "1234"; Int.fromString "-1234"; Int.fromString "~1234";
Int.fromString "+1234"; Int.fromString "+007"; Int.fromString "alma"
```

LOKÁLIS ÉRVÉNYŰ DEKLARÁCIÓK

Deklaráció lokális érvényű deklarációval: `local`-deklaráció

- Ún. `local`-deklarációt használunk, ha egyes deklarációkat fel akarunk használni más deklarációkban, miközben *el akarjuk rejteni* őket a program többi része elől.
- Szintaxisa:

```
local d1
in d2
end
```

  ahol *d1* egy nemüres deklarációsorozat, *d2* egy másik nemüres deklarációsorozat.
- Példa:

```
(* length : 'a list -> int
   length zs = a zs lista hossza
*)
local
      (* len : 'a list * int -> int
         len (zs, n) = az n és a zs lista hosszának összege
      *)
      fun len ([], n)     = n
        | len (_::zs, n) = len(zs, n+1)
in
   fun length zs = len(zs, 0)
end
```

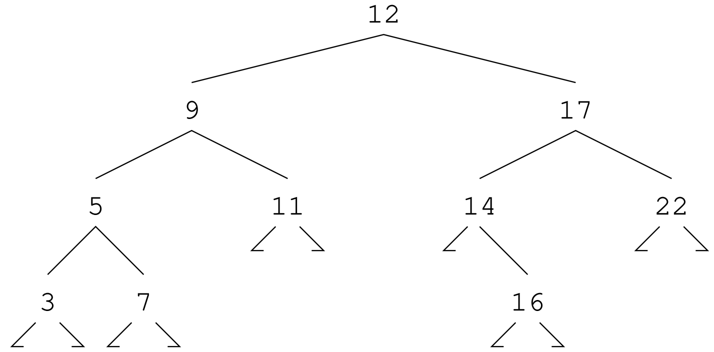
BINÁRIS FÁK

Bináris fák `datatype` deklarációval

- A listához hasonlóan rekurzív adatszerkezet a *fa*.
- Először olyan bináris fát deklarálunk, amelynek a levelei üresek, a csomópontjaiban pedig előbb a bal részfát, majd az `’a` típusú értéket, és végül a jobb részfát adjuk meg:

```
datatype ’a tree = L | B of ’a tree * ’a * ’a tree
```

- Tekintsük például az alábbi fát:

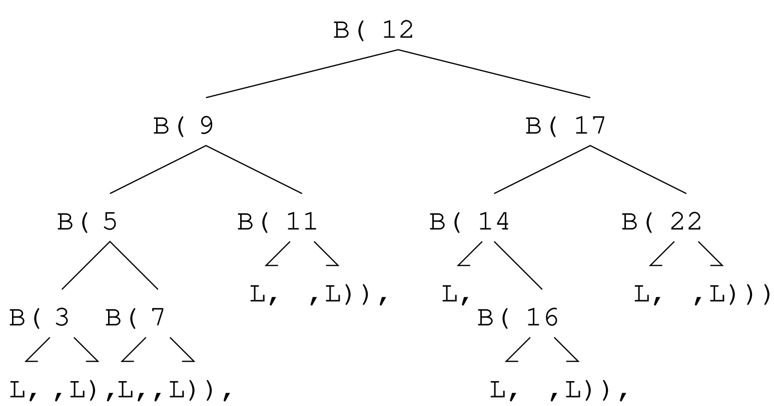


- Az `’a tree` adattípus `L` és `B` adatkonstruktoraival ez a fa pl. a következő lapon látható módon írható le.

Bináris fák `datatype` deklarációval (folyt.)

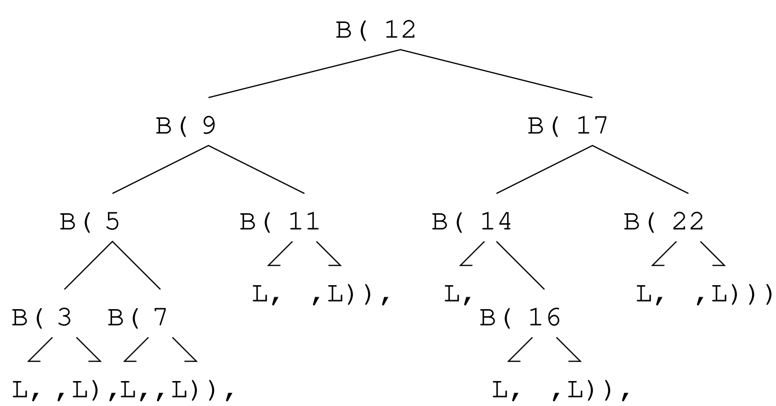
```
B(B(B(B(L,3,L),
      5,
      B(L,7,L)
     ),
    9,
    B(L,11,L)
   ),
  12,
  B(B(L,
      14,
      B(L,16,L)
     ),
    17,
    B(L,22,L)
   )
 )
```

A bal oldali kifejezést elég nehéz átlátni. A fastruktúra szöveges leírását megkönnyíti, ha az ábrába beírjuk a megfelelő adatkonstruktorokat.



Bináris fák `datatype` deklarációval (folyt.)

- A fastruktúra szöveges leírása átláthatóbb, ha az egyes részfáknak nevet adunk, és a részfákból építjük fel a teljes fát:




```
val tr3  = B(L,3,L);           val tr7  = B(L,7,L);
val tr5  = B(tr3,5,tr7);       val tr11 = B(L,11,L);
val tr9  = B(tr5,9,tr11);      val tr16 = B(L,16,L);
val tr14 = B(L,14,tr16);       val tr22 = B(L,22,L);
val tr17 = B(tr14,17,tr22);    val tr12 = B(tr9,12,tr17)
```

Bináris fák `datatype` deklarációval (folyt.)

- Másféle fastruktúrákat is deklarálhatunk, pl.
  - kezdhetjük az `'a` típusú értékkel, majd folytathatjuk előbb a bal, azután a jobb részfa megadásával,
  - felhasználhatjuk a levelet is értékek tárolására,
  - az értéket nem tároló üres csonkokat pedig `E`-vel jelölhetjük.
- A leírtak szerinti bináris fát hoz létre a következő deklaráció:

```
datatype 'a tree = E | L of 'a | B of 'a * 'a tree * 'a tree
```

- A rekurzív függvényekhez hasonlóan a rekurzív adattípusok deklarációjában is kell lennie nemrekurzív ágnak (ún. triviális esetnek).
- A nemrekurzív ág hiánya miatt az alábbi, szintaktikailag helyes deklarációk használhatatlanok:

```
datatype 'a badtree = B of 'a badtree * 'a * 'a badtree
datatype 'a badtree = L of 'a badtree
                    | B of 'a badtree * 'a * 'a badtree
```

Egyszerű műveletek bináris fákon

- `nodes` egy fa csomópontjait számlálja meg. Legyen

```
datatype 'a tree = L | N of 'a * 'a tree * 'a tree

(* nodes : 'a tree -> int
   nodes f = az f fa csomópontjainak a száma *)
fun nodes (N(_, t1, t2)) = 1 + nodes t2 + nodes t1
  | nodes L = 0
```

- `nodes` akkumulátort használó változata (`nodesa`):

```
fun nodesa f =
      let (* nodes0(f, n) = n + a csomópontok száma f-ben
             nodes0 : 'a tree * int -> int *)
          fun nodes0 (N(_, t1, t2), n) =
                               nodes0(t1, nodes0(t2, n+1))
            | nodes0 (L, n) = n
      in  nodes0(f, 0)
      end
```

Egyszerű műveletek bináris fákon (folyt.)

- A fa gyökeréből a leveléhez vezető úton az élek számát (az út hosszát) az adott levél szintjének is nevezzük. A szintek közül a legnagyobbat a fa *mélységének* hívjuk.
- `depth` egy fa mélységét határozza meg.

```
(* depth : 'a tree -> int
   depth f = az f fa mélysége *)
fun depth  (N(_, t1, t2)) = 1 + Int.max(depth t2, depth t1)
  | depth L = 0
```

- `depth` akkumulátort használó változata (`deptha`):

```
fun deptha f = let fun depth0 (N(_, t1, t2), d) =
                         Int.max(depth0(t1, d+1), depth0(t2, d+1))
                     | depth0 (L, d) = d
              in
                 depth0(f, 0)
              end
```

Egyszerű műveletek bináris fákon (folyt.)

- `fulltree` n mélységű *teljes bináris fát* épít, és a fa csomópontjait 1-től $2^n - 1$-ig beszámozza. Egy teljes bináris fában minden csomópontból pontosan két él indul ki, és minden levelének ugyanaz a szintje.

```
(* fulltree : int -> 'a tree
   fulltree n = n mélységű teljes fa *)
fun fulltree n =
      let fun ftree (_, 0) = L
            | ftree (k, n) = N(k, ftree(2*k, n-1), ftree(2*k+1, n-1))
      in
          ftree(1, n)
      end
```

- `reflect` a fát a függőleges tengelye mentén tükrözi.

```
(* reflect : 'a tree -> 'a tree
   reflect t = a függőleges tengelye mentén tükrözött t fa *)
fun reflect L = L
  | reflect (N(v,t1,t2)) = N(v, reflect t2, reflect t1)
```

Lista előállítása bináris fa elemeiből

- Mindhárom függvény *bináris fából listát* állít elő. Abban különböznek egymástól, hogy a csomópontokban tárolt értékeket mikor veszik ki, és milyen sorrendben járják be a részfákat:
  - `preorder` először az értéket veszi ki, majd bejárja a bal, és azután a jobb részfát;
  - `inorder` először bejárja a bal részfát, majd kiveszi az értéket, végül bejárja a jobb részfát;
  - `postorder` először bejárja a bal, majd a jobb részfát, és utoljára veszi ki az értéket.
- Az akkumulátort nem használó változatok egyszerűek, érthetőek, de nem elég hatékonyak a `@` operátor használata miatt.

```
(* preorder : 'a tree -> 'a list
   preorder f = az f fa elemeinek preorder sorrendű listája *)
fun preorder L = []
  | preorder (N(v,t1,t2)) = v :: preorder t1 @ preorder t2
(* inorder : 'a tree -> 'a list
   inorder f = az f fa elemeinek inorder sorrendű listája *)
fun inorder L = []
  | inorder (N(v,t1,t2)) = inorder t1 @ (v :: inorder t2)
(* postorder : 'a tree -> 'a list
   postorder f = az f fa elemeinek postorder sorrendű listája *)
fun postorder L = []
  | postorder (N(v,t1,t2)) = postorder t1 @ (postorder t2 @ [v])
```

Lista előállítása bináris fa elemeiből (folyt.)

- Ha `inorder` előző változatában az `inorder t1 @ (v :: inorder t2)` kifejezésben a `v :: inorder t2` részkifejezést nem tesszük zárójelbe, a fordító hibát jelez, mivel `::` és `@` azonos precedenciájú, és ezért zárójelek nélkül a nyilvánvalóan hibás `inorder t1 @ v` részkifejezést akarná kiértékelni.
- `inorder` előző megvalósításával kb. egyenértékű a következő változata, amelyben a `v` elem helyett az egyelemű `[v]` listát fűzzük `inorder t2` elé:

```
fun inorder L = []
  | inorder (N(v,t1,t2)) = inorder t1 @ ([v] @ inorder t2)
```

  Ez a változat azonban *roppant sérülékeny,* ugyanis a hatékonysága függ a zárójelek kirakásától. Ha a `[v] @ inorder t2` részkifejezést nem tesszük zárójelbe, akkor a fordító először a `inorder t1 @ [v]` részkifejezést fogja kiértékelni, azaz egy egyelemű listához fűz egy (általában) jóval hosszabbat!
- Az elmondottakhoz hasonló okból `postorder` bemutatott változata is *rendkívül sérülékeny!* Ha ugyanis a `postorder t1 @ (postorder t2 @ [v])` kifejezésben az amúgyis rossz hatékonyságú `postorder t2 @ [v]` részkifejezést nem tesszük zárójelbe, akkor a fordító először a `postorder t1 @ postorder t2` részkifejezést értékeli ki, azaz a két, feltehetően hosszú listát fűzi egybe, majd a létrehozott eredménylistát fűzi az egyelemű listához!

Lista előállítása bináris fa elemeiből (folyt.)

Az akkumulátort használó változatok nehezebben érthetőek meg, de *hatékonyabbak,* elsősorban a veremhasználat szempontjából.

```
(* preord : 'a tree * 'a list -> 'a list
   preord(f, vs) = az f fa elemeinek a vs lista elé fűzött,
                   preorder sorrendű listája *)
fun preord (L, vs) = vs
  | preord (N(v,t1,t2), vs) = v::preord(t1, preord(t2,vs))

(* inord : 'a tree * 'a list -> 'a list
   inord(f, vs) = az f fa elemeinek a vs lista elé fűzött,
                  inorder sorrendű listája *)
fun inord (N(v,t1,t2), vs) = inord(t1, v::inord(t2,vs))
  | inord (L, vs) = vs

(* postord : 'a tree * 'a list -> 'a list
   postord(f, vs) = az f fa elemeinek a vs lista elé fűzött,
                    postorder sorrendű listája *)
fun postord (N(v,t1,t2), vs) = postord(t1, postord(t2, v::vs))
  | postord (L, vs) = vs
```

Bináris fa előállítása lista elemeiből: `balPreorder`

- Listát *kiegyensúlyozott* (**bal**anced) *bináris fává* alakítanak a következő függvények: `balPreorder`, `balInorder` és `balPostorder`; a különbség közöttük most is a bejárási sorrendben van.
- ```
  (* balPreorder: 'a list -> 'a tree
     balPreorder xs = az xs lista elemeiből álló, preorder
                      bejárású, kiegyensúlyozott fa
  *)
  fun balPreorder [] = L
    | balPreorder (x::xs) =
        let val k = length xs div 2
        in
           N(x, balPreorder(List.take(xs, k)),
                balPreorder(List.drop(xs, k)))
        end
  ```
- A hatékonyságot kisebb mértékben rontja, hogy `List.take` és `List.drop` egymástól függetlenül *kétszer* mennek végig a lista első felén.
  ```

take és drop egyetlen függvénnyel: take'ndrop

- Írjunk take'ndrop néven olyan függvényt, amelynek egy xs listából és egy k egészből álló pár az argumentuma, és egy olyan pár az eredménye, amelynek első tagja a lista első k db eleme, második tagja pedig a lista többi eleme.

```
(* take'ndrop : 'a list * int -> 'a list * 'a list
   take'ndrop(xs, k) = olyan pár, amelynek
                       első tagja xs első k db eleme,
                       második tagja pedig xs maradéka
*)
fun take'ndrop (xs, k) =
      let fun td (xs, 0, ts) = (rev ts, xs)
            | td ([], _, ts) = (rev ts, [])
            | td (x::xs, k, ts) = td(xs, k-1, x::ts)
      in
          td(xs, k, [])
      end
```

- take'ndrop felhasználása, nevezetesen az eredményül átadott pár miatt módosítani kell balpreorder felépítésén.

Bináris fa előállítása lista elemeiből: `balPreorder`, újra

- Ez volt:

```
fun balPreorder [] = L
  | balPreorder (x::xs) =
      let val k = length xs div 2
      in  N(x, balPreorder(List.take(xs, k)),
               balPreorder(List.drop(xs, k)))
      end
```

- Ez lett:

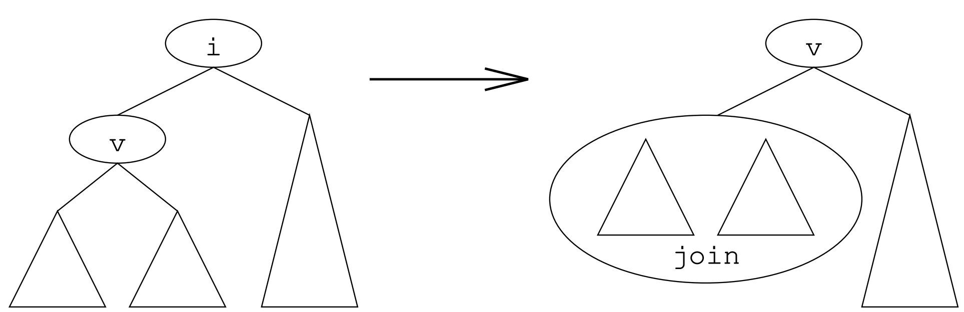
```
(* balPreorder: 'a list -> 'a tree
   balPreorder xs = az xs lista elemeiből álló, preorder ... *)
fun balPreorder [] = L
  | balPreorder (x::xs) =
      let val k = length xs div 2
          val (ts, ds) = take'ndrop(xs, k)
      in  N(x, balPreorder ts, balPreorder ds)
      end
```

Bináris fa előállítása lista elemeiből

- ```
  (* balInorder: 'a list -> 'a tree
     balInorder xs = az xs lista elemeiből álló, inorder bejárású,
                     kiegyensúlyozott fa
  *)
  fun balInorder [] = L
    | balInorder (xxs as x::xs) =
        let val k = length xxs div 2
            val ys = List.drop(xxs, k)
        in
            N(hd ys, balInorder(List.take(xxs, k)),
                     balInorder(tl ys))
        end
  ```
- ```
  (* balPostorder: 'a list -> 'a tree
     balPostorder xs = az xs lista elemeiből álló, postorder
                       bejárású, kiegyensúlyozott fa
  *)
  fun balPostorder xs = balPreorder(rev xs)
  ```
- `balInorder` `take'ndrop`-pal való definiálását meghagyjuk gyakorló feladatnak.

Elem törlése bináris fából

- Adott értékű *elemet* rekurzív módszerrel *megkeresni* egyszerű feladat.
- *Új elemet beszúrni* sem nehéz: rekurzív módszerrel keresünk egy levelet, és ennek a helyére berakjuk az új értéket. Ha a fa rendezve van, ügyelnünk kell arra, hogy a rendezettség megmaradjon.
- Adott értékű *elemet* vagy *elemeket* rekurzív módszerrel *kitörölni* valamivel nehezebb: ha a törlendő érték az éppen vizsgált részfa gyökerében van, a két részre széteső fa részfáit *egyesíteni* kell, miután a törlést a két részfán már végrehajtottuk.



- Megtehetjük, hogy előbb egyesítjük a két részfát, majd az eredményül kapott fából töröljük az adott értékű elemet.

Elem rekurzív törlése bináris fából (folyt.)

- A `join`-nal egyesítjük a törlés hatására létrejövő két részfát: a bal részfát lebontja, és közben az elemeit egyesével berakja a jobb részfába.

```
(* join : 'a tree * 'a tree -> 'a tree
   join(b, j) = a b és a j fák egyesítésével létrehozott fa *)
fun join (L, tr) = tr
  | join (N(v, lt, rt), tr) = N(v, join(lt, rt), tr)
```

- A `remove` rendezetlen bináris fából törli az `i` értékű elem *összes* előfordulását.

```
(* remove : 'a * 'a tree -> 'a tree
   remove(i, f) = i összes előfordulását törli f-ből *)
fun remove (i, L) = L
  | remove (i, N(v,lt,rt)) =
      if i<>v
      then N(v, remove(i,lt), remove(i,rt))
      else join(remove(i,lt), remove(i,rt))
```

Bináris keresőfák: `blookup`, `binsert`

- Rendszerint adott kulcsú elemet keresünk egy rendezett bináris fában, ehhez értékeket kell összehasonlítanunk egymással, ehhez a keresett kulcsnak *egyenlőségi típusúnak* kell lennie (a példában a `string` típust használjuk).
- A függvények *kivételt* jeleznek, ha a keresett kulcsú elem nincs a keresőfában: `exception Bsearch of string`.
- A `blookup` függvény adott kulcshoz tartozó értéket ad vissza:

```
(* blookup : (string * 'a) tree * string -> 'a
   blookup(f, b) = az f fában a b kulcshoz tartozó érték
*)
fun blookup (L, b) = raise Bsearch("LOOKUP: " ^ b)
  | blookup (N((a,x), t1, t2), b) =
      if b < a      then blookup(t1,b)
      else if a < b then blookup(t2, b)
      else x
```

Bináris keresőfák: `bupdate`

- A `binsert` függvény egy új kulcsú elemet rak be egy rendezett bináris fába, ha még nincs benne:

```
(* binsert : (string * 'a) tree * (string * 'a) -> (string * 'a) tree
   binsert(f, (b,y)) = az új (b,y) kulcs-érték párral bővített f fa *)
fun binsert (L, (b,y)) = N((b,y), L, L)
  | binsert (N((a, x), t1, t2), (b,y)) =
      if b < a      then N((a, x), binsert(t1, (b,y)), t2)
      else if a < b then N((a, x), t1, binsert(t2, (b,y)))
      else (* a=b *) raise Bsearch("INSERT: " ^ b)
```

- A `bupdate` függvény meglévő kulcsú elembe új értéket ír be egy rendezett bináris fában:

```
(* bupdate : (string * 'a) tree * (string * 'a) -> (string * 'a) tree
   bupdate(f, (b,y)) = az f fa, a b kulcshoz tartozó érték helyén
                       az y értékkel *)
fun bupdate (L, (b,y)) = raise Bsearch("UPDATE: " ^ b)
  | bupdate (N((a,x), t1, t2), (b,y)) =
      if b < a      then N((a,x), bupdate(t1, (b,y)), t2)
      else if a < b then N((a,x), t1, bupdate(t2, (b,y)))
      else (* a=b *) N((b,y), t1, t2)
```

- A függvények *generikussá* tételét meghagyjuk gyakorló feladatnak.

FUNKCIONÁLIS PROGRAMOZÁS, II. RÉSZ

Az I. rész – az első hét FP-előadás – főbb témái

- A funkcionális programozás alapjai, λ-kalkulus
- Típus, típusváltozó, egyenlőségi típus, típuskifejezés, egyszerű és összetett típus (az SML *erősen típusos* nyelv)
- Név, érték, változó (nem frissíthető!), kifejezés (az SML-ben minden érték *teljes jogú érték*)
- Függvény (egyetlen paraméter!), részlegesen alkalmazható és magasabbrendű függvény; névtelen függvény (`fn`-jelölés vagy λ-kifejezés), mintaillesztés
- Egyszerű típus (`int`, `real`, `char`, `bool`, `word`, `string`, `unit`)
- Összetett típus: lista, rekord, ennes, nullas, `datatype`-deklaráció
- Listakezelő függvények (`hd`, `length`, `map`, `filter`, `maxl`, `@`, `rev`, `revAppend`, `take`, `drop`, `foldr`, `foldl` stb.)
- Lokális érvényű deklaráció: `let`-kifejezés, `local`-deklaráció
- Könyvtárak (`Char`, `Int`, `Real`, `String`, `List`, `Bool`, `Option`, `Time`, `Timer` stb.)
- Logikai műveletek (`andalso`, `orelse`, `not`), `if-then-else` kifejezés); lusta kiértékelés
- Polimorfizmus: paraméteres és többszörös terheléses
- Listák használata, futási idő mérése

Az I. rész – az első hét FP-előadás – főbb témái (folyt.)

- Kifejezések kiértékelése, mohó és lusta kiértékelés
- Jobbrekurzió, akkumulátor (gyűjtőargumentum)
- Példák `datatype`-deklarációra: felsorolásos típus, megkülönböztetett egyesítés, rekurzív típus; polimorf adattípus
- `datatype`-deklaráció és mintaillesztés; típuskonstruktorállandó és típuskonstruktorfüggény (típusoperátor), adatkonstruktorállandó és adatkonstruktorfüggény (operátor)
- Esetszétválasztás: `case`
- Opcionális értékek kezelése: `Option`, `getOpt`, `isSome`, `valOf` stb.
- Bináris és nem bináris fák és más gráfok `datatype`-deklarációval
- Egyszerű műveletek bináris fákon: `depth`, `nodes`, `fulltree`, `reflect` stb.
- Bináris fa bejárása (lista létrehozása bináris fa elemeiből): `preorder`, `inorder`, `postorder`
- Bináris fa létrehozása lista elemeiből: `balPreorder`, `balInorder`, `balPostorder`
- Elem törlése bináris fából: `join` és `remove`
- Bináris keresőfák: `blookup`, `binsert`, `bupdate`

KIÍRÁS

Kiírás

- `{TextIO.}print : string -> unit`

  `print s` = kiírja az `s` értékét a standard kimenetre, és azonnal kiüríti a puffert.

- `{General.}makestring :` *`numtxt`*`-> string`

  `makestring v` = eredménye a `v` érték *ábrázolása.*

- `{Meta.}printVal : 'a -> 'a`

  `printVal e` = kiírja az `e` kifejezés értékét a standard kimenetre pontosan úgy, ahogyan az SML értelmező írja ki a „legfelső szinten”, és azonnal kiüríti a puffert. Eredményül visszaadja az `e` kifejezés értékét. *Csak interaktív módban használható.*

1. megjegyzés. A `{` és `}` kapcsos zárójelek között opcionális modulnév áll. Pl. `{TextIO.}print` azt jelenti, hogy a függvény a `TextIO` modulban van definiálva, de az SML-értelmező a `print` nevet rövid alakban is felismeri.

2. megjegyzés. *`numtxt`* = `int | real | word | word8 | char | string`

- Különböző típusú egyszerű értékeket alakítanak át füzérré a `toString` függvények:

```
Bool.toString  : bool -> string     String.toString  : string -> string
Char.toString  : char -> string     Time.toString  : time -> string
Date.toString  : date -> string     Word.toString  : word -> string
Int.toString   : int -> string      Word8.toString : word8 -> string
Real.toString  : real -> string
```

Kiírás (folyt.)

- Példák:

```
- print("alma"^"Korte\n");
almaKorte
> val it = () : unit

- makestring ~5.8e~3;
> val it = "~0.0058" : string

- printVal("alma"^"Korte\n");
"almaKorte\n"> val it = "almaKorte\n" : string

- makestring("alma"^"Korte\n");
> val it = "\"almaKorte\\n\"" : string
```

- `printVal`-lal tetszőleges típusú érték íratható ki, például ennes, rekord vagy lista:

```
- printVal (3, 5.0);
(3, 5.0)> val it = (3, 5.0) : int * real

- printVal {m2 = 3, m1 = 5.0};
{m1 = 5.0, m2 = 3}> val it = {m1 = 5.0, m2 = 3} : {m1 : real, m2 : int}

- printVal [#"A",#"Z",#":"];
[#"A", #"Z", #":"]> val it = [#"A", #"Z", #":"] : char list
```

Kiírás (folyt.)

- `printVal`-lal `datatype`-deklarációval létrehozott típusú érték is kiíratható ki, pl.

```
- datatype t = L | B of t * t;
> New type names: =t
  datatype t = (t,con B : t * t -> t, con L : t)
  con B = fn : t * t -> t
  con L = L : t
- val fa = B(B(B(L,B(L,B(L,B(B(L,L),L)))),L),B(L,L));
> val fa = B(B(B(L, B(L, B(L, B(B(L, L), L)))), L), B(L, L)) : t
- printVal fa;
B(B(B(L, B(L, B(L, B(B(L, L), L)))), L), B(L, L))> val it = B(...
```

- A kiírt sor túl hosszú, a folytatását . . .-tal helyettesítettük.
- Törjük el a sort a > *válaszjel* előtt *szekvenciális* kifejezés alkalmazásával:

```
- (printVal fa; print "\n");
B(B(B(L, B(L, B(L, B(B(L, L), L)))), L), B(L, L))
> val it = () : unit
```

- Sajnos, az eredményül kapott érték nem `fa` értéke!

Kiírás (folyt.)

- Hogyan írjunk ki egy újsor-jelet úgy, hogy az eredmény mégis `fa` értéke legyen? Pl. így:

```
- let val res = printVal fa; val _ = print "\n"
  in
     res
  end;
B(B(B(L, B(L, B(L, B(B(L, L), L)))), L), B(L, L))
> val it = B(B(B(L, B(L, B(L, B(B(L, L), L)))), L), B(L, L)) : t
```

- Ez elég körülményes. A `before` operátort az ilyen esetek kezelésére vezették be:

```
- printVal fa before print "\n";
B(B(B(L, B(L, B(L, B(B(L, L), L)))), L), B(L, L))
> val it = B(B(B(L, B(L, B(L, B(B(L, L), L)))), L), B(L, L)) : t
```

- Szekvenciális kifejezés alkalmazásával további magyarázó szöveget írhatunk ki:

```
- (print "A fa változó értéke =\n"; printVal fa before print "\n");
A fa változó értéke =
B(B(B(L, B(L, B(L, B(B(L, L), L)))), L), B(L, L))
> val it = B(B(B(L, B(L, B(L, B(B(L, L), L)))), L), B(L, L)) : t
```

Kiírás (folyt.)

- Hosszú lista, ill. egymásba skatulyázott adatszerkezetek esetén `printVal` (és maga az SML-értelmező is) alapesetben csak az első 200 listaelemet, ill. legfeljebb 20 szintet ír ki. A hosszat a `printLength`, a szintek számát a `printDepth` *frissíthető változó* szabályozza. Mindkét érték felülírható.

```
printLength : int ref       printLength := 7;  !printLength;
printDepth  : int ref       printDepth  := 3;  !printDepth;
```

- Példák:

```
- printLength := 6; printVal [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10] before print "\n";
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...]
> val it = [1, 2, 3, 4, 5, 6, ...] : int list
- printDepth := 4; printVal fa before print "\n";
B(B(#, #), B(#, #))
> val it = B(B(#, #), B(#, #)) : t
```

- Figyelem: a `printLength` és a `!printLength` kifejezések különböznek!

```
- printLength;                 | - !printLength;
> val it = ref 7 : int ref     | > val it = 7 : int
```

NYOMKÖVETÉS KIÍRÁSSAL: LISTÁK

Nyomkövetés kiírással: length (nem iteratív)

- Az MOSML-ben nyomkövetés csak a program szövegébe beírt kiíró függvényekkel lehetséges.
- Példa: a `length` függvény két változatának kiértékelése
- A `length` „naív” változata

```
fun length (_::xs) = 1 + length xs
  | length []      = 0
```

- A `length` „naív” változata kiíró függvényekkel (**félkövér** szedéssel az eredeti szöveg látható)

```
fun length ((_ : int) :: xs) =
        printVal(1 + (print " & "; printVal(length(printVal xs))
                                   before print " $ "
                     )
                 )
        before print " #\n"
  | length []      = (print " * "; printVal 0
                                   before print " %\n")
```

Nyomkövetés kiírással: `lengthi` (iteratív)

- A `length` iteratív változata

```
fun lengthi xs = let fun len (i, _::xs) = len(i+1, xs)
                       | len (i, [])    = i
                 in len(0, xs)
                 end
```

- A `length` iteratív változata kiíró függvényekkel (**félkövér** szedéssel az eredeti szöveg látható)

```
fun lengthi xs =
    let fun len (i, (_ : int) :: xs) =
             len((print " "; printVal((printVal i
                                       before print " $ ") + 1)),
                 (print " & "; printVal xs)
                )
                 before print "#\n"
          | len (i, []) = (print " * "; printVal i
                                        before print " %\n")
    in len(0, xs)
    end
```

Nyomkövetés kiírással: `length` egy alkalmazása

- `length` egy alkalmazása

```
fun length ((_ : int) :: xs) =
        printVal(1 + (print " & "; printVal(length(printVal xs))
                                   before print " $ "
                     )
                )
        before print " #\n"
  | length []       = (print " * "; printVal 0
                                   before print " %\n")

length [1,2,3];
 & [2, 3] & [3] & [] * 0 %
0 $ 1 #
1 $ 2 #
2 $ 3 #
```

Nyomkövetés kiírással: `lengthi` egy alkalmazása

- `lengthi` egy alkalmazása

```
fun lengthi xs =
    let fun len (i, (_ : int) :: xs) =
                 len((print " "; printVal((printVal i
                                          before print " $ ") + 1)),
                     (print " & "; printVal xs)
                    )
                     before print "#\n"
          | len (i, []) = (print " * "; printVal i
                                           before print " %\n")
    in len(0, xs)
    end

lengthi [1,2,3];
 0 $ 1 & [2, 3] 1 $ 2 & [3] 2 $ 3 & [] * 3 %
#
#
#
```

Nyomkövetés kiírással: `length` és `lengthi` összehasonlítása

- `length` és `lengthi` kiértékelésének összehasonlítása

```
length [1,2,3];              lengthi [1,2,3];

 & [2, 3] & [3] & [] * 0 %    0 $ 1 & [2, 3] 1 $ 2 & [3] 2 $ 3 & [] * 3 %
0 $ 1 #                      #
1 $ 2 #                      #
2 $ 3 #                      #
```

Hibakeresés Poly/ML-ben

- Példafüggvény a Poly/ML debugger használatához

```
(* length : 'a list -> int
   length zs = a zs elemeinek száma *)
fun length zs =
      let (* len : 'a list -> int
                len xs = az xs elemeinek száma *)
          fun len []        = 0
            | len (_ :: xs) = 1 + len xs
      in
          len zs
      end;
```

- Töréspontot elhelyezni egy olyan segédfüggvényben lehet, amelyet egy másik függvény törzsében egy `let`-kifejezésben definálunk.
- A fontosabb hibakereső függvényeket lásd a következő fólián (konkretizálva a `length` és a `len` függvényre utaló hivatkozásokkal).
- A `PolyML.profiling : int -> unit` függvénnyel egy kifejezés kiértékelési idejét, ill. egyes függvények futási idejét és helyfoglalását monitorozhatjuk (részletek a PolyML-leírásban).

Hibakeresés Poly/ML-ben (folyt.)

`PolyML.Compiler.debug := true;` `open PolyML.Debug;`	Hibakeresés engedélyezése; engedélyezett állapotban kell definiálni a vizsgálandó függvényt
`breakIn "len";`	Töréspont elhelyezése, rövid változat
`breakIn "length()len";`	Töréspont elhelyezése, teljes változat
`continue();`	Folytatás a töréspont következő előfordulásáig
`down();`	Áttérés az előző hívási szintre a veremben
`up();`	Áttérés a következő hívási szintre a veremben
`dump();`	A verem teljes tartalmának kiírása
`stack();`	A hívások kiírása a veremtartalom alapján
`variables();`	A változók értékének kiírása
`clearIn "length()len";`	Töréspont törlése, teljes változat
`trace true;`	Nyomkövetés bekapcsolása
`step();`	Adott hívási szinten tovább vagy beljebb
`stepOver();`	Adott hívási szinten tovább
`stepOut();`	Előző hívási szintre vissza

Részletesen ld. <http://dp.iit.bme.hu/polyml/docs/Debugging.html>. A példa megtalálható a <http://dp.iit.bme.hu/sml/eloadas_anyagok/dp03s-fp08-10.sml> címről letölthető fájlban.

Hibakeresés Poly/ML-ben (folyt.)

- A listaelemek értékének megjelenítéséhez *típusmegkötéssel* meg kell adni a típusukat.

```
(* length : real list -> int
   length zs = a zs elemeinek száma *)
fun length (zs : real list) =
      let (* len : real list -> int
             len xs = az xs elemeinek száma *)
          fun len []        = 0
            | len (_ :: xs : real list) = 1 + len xs
      in len zs
      end;
```

- `length` egy hibás változata a hibakeresés kipróbálásához

```
(* length : 'a list -> int
   length zs = a zs elemeinek száma *)
fun length zs =
      let (* len : 'a list * int -> int
             len xs = n + az xs elemeinek száma -- HIBÁS! *)
          fun len ([], n)      = n
            | len (_ :: xs, n) = len(xs, n)
      in len(zs,0)
      end;
```

Hibakeresés Poly/ML-ben (folyt.)

- `length` egy másik hibás változata a hibakeresés kipróbálásához

```
(* length : real list -> int
   length zs = a zs elemeinek száma *)
fun length (zs : real list) =
      let (* len : real list * int -> int
             len xs = n + az xs elemeinek száma -- HIBÁS! *)
          fun len ([], n)      = n
            | len (_ :: xs : real list, n : int) = len(xs, n)
      in len(zs,0)
      end;
```

- `length` egy jó változata a hibakeresés, ill. a nyomkövetés kipróbálásához

```
(* length : real list -> int
   length zs = a zs elemeinek száma *)
fun length (zs : real list) =
      let (* len : real list * int -> int
             len xs = n + az xs elemeinek száma *)
          fun len ([], n)      = n
            | len (_ :: xs : real list, n : int) = len(xs, n+1)
      in len(zs,0)
      end;
```

NYOMKÖVETÉS KIÍRÁSSAL: BINÁRIS FÁK

Nyomkövetés kiírással: bináris fák

- Korábban tárgyaltuk a `nodes` és `depth` függvényeket, valamint akkumulátort használó `nodesa` és `deptha` változatukat.
- A következő fóliákon e függvények kiértékelésének nyomkövetésére mutatunk megoldást.
- A szöveg olvashatóságát (szintenként növekvő) *behúzással* javítjuk. A megfelelő számú szóköz beszúrására szolgál a `tab` függvény. A változó számú szóközből álló füzért paraméterként adjuk át, ezért olyan segédfüggvényeket vezetünk be, amelyeknek az őket meghívó függvényhez képest eggyel több paraméterük van.
- A függvények *kiírást szolgáló részek nélküli* szövegét **félkövér** szedéssel jelöljük.

Nyomkövetés kiírással: nodes (akkumulátort nem használ)

```
(* tab : string -> string
   tab i = a sorok behúzásához használandó i füzér szóközökkel kiegészítve *)
fun tab i = i ^ "    "

fun nodes f =
      let (* nodes0 : string -> 'a tree -> int
             nodes0 i f = a csomópontok száma az f fában;
                          i a behúzáshoz használt füzér *)
          fun nodes0 i (N(a, t1, t2)) =
                (print("\n" ^ i ^ "<"); printVal a : int; print "> ";
                 printVal(1 +
                          nodes0 (tab i) (printVal t2 before print " *") +
                          nodes0 (tab i) (printVal t1 before print " %")
                          before print "$ "
                         )
                 before print(" #\n" ^ i)
                )
            | nodes0 i L = (print("\n" ^ i); 0)
      in
          nodes0 "" f
      end
```

Nyomkövetés kiírással: `nodesa` (akkumulátort használ)

```
fun nodesa f =
  let (* nodes0 i (f, n) = n + a csomópontok száma f-ben;
                           i a behúzáshoz használt füzér
         nodes0 : string -> 'a tree * int -> int
       *)
      fun nodes0 i (N(a, t1, t2), n) =
            (print("\n" ^ i ^ "<"); printVal a : int; print "> ";
             nodes0 (tab i) (printVal t1 before print(" %\n" ^ (tab i)),
                             nodes0 (tab i) (printVal t2 before print(" *\n" ^
                                                                     (tab i)),
                                             printVal(n+1) before print " $"
                                            )
                            )
             before print(" #" ^ i)
            )
        | nodes0 i (L, n) = (* (print("\n" ^ i); n) *) n
  in
      nodes0 "" (f, 0)
  end
```

- A következő fóliákon `nodes`-t és `nodesa`-t hét csomópontból álló teljes fára alkalmazzuk.

Nyomkövetés kiírással: `nodes` és `nodesa` egy alkalmazása

```
f7 = N(1, N(2, N(4, L, L), N(5, L, L)), N(3, N(6, L, L), N(7, L, L))) : int tree
```

```
- nodes f7;                             | - nodesa f7;
                                        |
<1> N(3, N(6, L, L), N(7, L, L)) *     | <1> N(2, N(4, L, L), N(5, L, L)) %
    <3> N(7, L, L) *                    |     N(3, N(6, L, L), N(7, L, L)) *
        <7> L *                         |     1 $
            L %                         |     <3> N(6, L, L) %
            $ 1 #                       |         N(7, L, L) *
        N(6, L, L) %                    |         2 $
        <6> L *                         |         <7> L %
            L %                         |             L *
            $ 1 #                       |             3 $ #
        $ 3 #                           |         <6> L %
    N(2, N(4, L, L), N(5, L, L)) %      |             L *
                                        |             4 $ #          #
```

Folytatása a következő lapon.

Nyomkövetés kiírással: `nodes` és `nodesa` egy alkalmazása (folyt.)

```
f7 = N(1, N(2, N(4, L, L), N(5, L, L)), N(3, N(6, L, L), N(7, L, L))) : int tree
```

```
 (nodes f7)                           |  (nodesa f7)
                                      |
    <2> N(5, L, L) *                  |     <2> N(4, L, L) %
        <5> L *                       |         N(5, L, L) *
            L %                       |         5 $
            $ 1 #                     |         <5> L %
        N(4, L, L) %                  |             L *
        <4> L *                       |             6 $ #
            L %                       |         <4> L %
            $ 1 #                     |             L *
        $ 3 #                         |             7 $ #         #     #
    $ 7 #                             |
                                      |
> val it = 7 : int                    | > val it = 7 : int
```

Nyomkövetés kiírással: `depth` (akkumulátort nem használ)

```
fun depth f =
  let (* depth0 i f = az f fa mélysége; i a behúzáshoz használt füzér
         depth0 : string -> 'a tree -> int
      *)
      fun depth0 i (N(a : int, t1, t2)) =
            (print("\n" ^ i ^ "<"); printVal a : int; print "> ";
             printVal(1 +
                      Int.max(depth0 (tab i) (printVal t2 before print " *"),
                              depth0 (tab i) (printVal t1 before print " %")
                             )
                     )
             before print(" #\n" ^ i))
        | depth0 i L = (print( "\n" ^ i) ; 0)
  in
      depth0 "" f
  end
```

Nyomkövetés kiírással: `deptha` (akkumulátort használ)

```
fun deptha f =
  let (* depth0 i (f, d) = d + az f fa mélysége; i a behúzáshoz használt füzér
         depth0 : string -> 'a tree * int -> int *)
      fun depth0 i (N(a : int, t1, t2), d) =
            (print("\n" ^ i ^ "<"); printVal a : int; print "> ";
             printVal(Int.max(depth0 (tab i) (printVal t2 before print(" *\n" ^
                                                                       (tab i)),
                                               printVal(d+1) before print " $ "
                                              ),
                                 depth0 (tab i) (printVal t1 before print(" %\n" ^
                                                                       (tab i)),
                                               printVal(d+1) before print " & "
                                              )
                                )
                     )
             before print(" #\n" ^ i)
            )
        | depth0 i (L, d) = (print( "\n" ^ i) ; d)
  in
      depth0 "" (f, 0)
  end
```

- A következő fóliákon `depth`-t és `deptha`-t hét csomópontból álló teljes fára alkalmazzuk.

Nyomkövetés kiírással: `depth` és `deptha` egy alkalmazása

```
f7 = N(1, N(2, N(4, L, L), N(5, L, L)), N(3, N(6, L, L), N(7, L, L))) : int tree
```

```
- depth f7;

<1> N(3, N(6, L, L), N(7, L, L)) *
    <3> N(7, L, L) *
        <7> L *
            L %
            1 #
        N(6, L, L) %
        <6> L *
            L %
            1 #
        2 #
    N(2, N(4, L, L), N(5, L, L)) %
```

```
- deptha f7;

<1> N(3, N(6, L, L), N(7, L, L)) *
    1 $
    <3> N(7, L, L) *
        2 $
        <7> L *
            3 $
            L %
            3 &
            3 #
        N(6, L, L) %
        2 &
        <6> L *
            3 $
            L %
            3 &
            3 #
        3 #
    N(2, N(4, L, L), N(5, L, L)) %
    1 &
```

Nyomkövetés kiírással: `depth` és `deptha` egy alkalmazása (folyt.)

Folytatás az előző lapról.

```
f7 = N(1, N(2, N(4, L, L), N(5, L, L)), N(3, N(6, L, L), N(7, L, L))) : int tree
```

```
 (depth f7)                            |  (deptha f7)
                                       |
    <2> N(5, L, L) *                   |    <2> N(5, L, L) *
        <5> L *                        |        2 $
            L %                        |        <5> L *
            1 #                        |            3 $
        N(4, L, L) %                   |            L %
        <4> L *                        |            3 &
            L %                        |            3 #
            1 #                        |        N(4, L, L) %
        2 #                            |        2 &
    3 #                                |        <4> L *
                                       |            3 $
                                       |            L %
                                       |            3 &
                                       |            3 #
                                       |        3 #
                                       |    3 #
> val it = 3 : int                     | > val it = 3 : int
```

KIVÉTELKEZELÉS

Kivételkezelés

- Kivételt az `exception` kulcsszóval deklarálunk, a `raise` kulcsszóval jelzünk, a `handle` kulcsszóval bevezetett kifejezésben kezelünk.
- A kivételt általában hibák jelzésére használjuk, de használhatjuk visszalépés kezelésére is (az utóbbira példa a `valtas` függvényben látható a következő fóliák egyikén).
- A kivételdeklaráció az adattípus-deklarációra (`datatype`-deklarációra) emélkeztet: `exception` *`name`*`;` `exception` *`name`* `of` *`ty`*.
- Példák kivétel deklarálására: `exception Valt; exception Hiba of char * int`.
- A kivételkonstruktor állandó vagy függvény lehet. Példák: `Valt : exn`, `Hiba : char * int -> exn`.
- A kivételdeklaráció speciális adattípus-deklaráció, ui. az utóbbival ellentétben dinamikusan *bővíti* a kivételkonstruktorok halmazát.
- Kivétel jelzésére a `raise` kulcsszóval kezdődő speciális kifejezést kell használunk.
- Példák kivétel jelzésére: `raise Valt`, `raise Hiba(#"N", 4)`.
- `raise` (hipotetikus) típusa: `exn -> 'a`.

Kivételkezelés (folyt.)

- `raise` alkalmazásának eredménye az ún. *kivételcsomag*. Mivel a kivételcsomag polimorf típusú, bármely más típussal kompatíbilis.
- A kivétel kezelése a `case`-szerkezetre emlékeztet: `E handle P1 => E1 | ··· | Pn => En`
- Ha `E` „közönséges” értéket ad eredményül, a kivételkezelő egyszerűen továbbadja az eredményt.
- Ha `E` eredménye *kivételcsomag*, az SML megpróbálja illeszteni a `P1, ···, Pn` mintákra.
  - Ha `Pi` (`1 <= i <= n`) az első illeszkedő minta, akkor `Ei` a kivételkezelő eredménye.
  - Ha egyetlen minta sem illeszkedik a kivételcsomagra, a kivételkezelő továbbpasszolja.
- Példák kivétel kezelésére:
  - ```
    erme :: valtas (erme::ermelista) (osszeg-erme)
              handle Valt => valtas ermelista osszeg
    ```
  - `(fn i => kivKez i handle Hiba(c, i) => (print(str c); i-1)) 0`
- `handle` (hipotetikus) típusa: `exn -> 'a`.
- Legyen `Ex` `exn` típusú kivétel, `e` pedig tetszőleges kifejezés; ekkor az `e handle Ex => c` (kivételkezelőt tartalmazó) kifejezésben `c`-nek `e`-vel azonos típusúnak kell lennie.
    ```

Kivételkezelés (folyt.)

- A következő programrészlet példa kivétel deklarálására, jelzésére és kezelésére

```
exception Hiba of char * int;

fun kivKez  0 = raise Hiba(#"N", 4)
  | kivKez ~9 = raise Hiba(#"M", 9)
  | kivKez  n = n;

fun kivKezel i =
        kivKez i handle Hiba(#"N", i) => (print "N"; i)
                      | Hiba(#"M", i) => (print "M"; i-1);

kivKezel 0  = 4;
kivKezel ~9 = 8;
kivKezel 7  = 7;
```

Kivételkezelés (folyt.)

- Példa visszalépés programozására kivételkezeléssel

```
exception Valt;

(* valtas : int list -> int -> int list
   valtas ermelista osszeg = a lehető legkevesebb érmét tartalmazó olyan
                             érmelista, amely elemeinek összege osszeg
   PRE : ermelista = a váltásra használható érmék csökkenő értéksorrendben
         osszeg >= 0
*)
fun valtas _ 0  = []
  | valtas [] _ = raise Valt
  | valtas (erme::ermelista) osszeg =
      if (* ha az adott érme túl nagy, a következővel próbálkozunk *)
         erme > osszeg then valtas ermelista osszeg
         (* ha az adott érmétől kezdve sikerül felváltani, az jó;
            ha nem, a következő érmével kezdjük újra az adott ponttól *)
      else erme :: valtas (erme::ermelista) (osszeg-erme)
                            handle Valt => valtas ermelista osszeg;

valtas [50, 20, 10, 5, 2] 197 = [50, 50, 50, 20, 20, 5, 2];
```

Kivételkezelés (folyt.)

- A leggyakoribb belső kivételek

Név	*Művelet, amely a kivételt kiválthatja*
`Bind`	Értékdeklarációban a jobb oldali kifejezés nem illeszkedik a bal oldali mintára.
`Chr`	`chr pred succ`
`Div`	`/ div mod`
`Domain`	Az érték kilóg az értelmezési tartományból.
`Empty`	`hd tl last`
`Fail`	`compile load loadOne     Fail : string -> exn`
`Interrupt`	Megszakítás ctrl/c-vel.
`Io`	Ki/beviteli hiba. `Io : {cause : exn, function : string, name : string}`
`Match`	Mintaillesztési hiba `case` és `handle` kifejezésben, vagy függvényalkalmazásban.
`Option`	Hiba egy `Option` könyvtárbeli függvény alkalmazásakor.
`Overflow`	`~ + - * / div mod abs ceil floor round trunc`
`Size`	`^ array concat fromList implode tabulate translate vector`
`Subscript`	`copy drop extract nth sub substring take update`

- `Fail` és `Io` kivételkonstruktorfüggvények, a többi `exn` típusú kivételkonstruktorállandó.
- `Option` csak `Option.Option` néven használható, ha nem nyitjuk meg az `Option` könyvtárat.

HALMAZMŰVELETEK

Halmazműveletek: „benne van-e?” (`isMem`) és „ha új, tedd bele” (`newMem`)

- `isMem` igaz értéket ad eredményül, ha a keresett elem benne van a listában.

```
(* isMem : ''a * ''a list -> bool
   isMem(x, ys) = x eleme-e ys-nek
*)
fun isMem (_, []) = false
  | isMem (x, y::ys) = x = y orelse isMem(x, ys)

infix isMem
```

- `newMem` egy új elemet rak be egy listába, ha még nincs benne.

```
(* newMem : ''a * ''a list -> ''a list
   newMem(x, xs) = [x] és xs listaként ábrázolt uniója
*)
fun newMem (x, xs) = if x isMem xs
                     then xs
                     else x::xs
```

`newMem`, ha a sorrendtől eltekintünk, halmazt hoz létre.

Halmazműveletek: „listából halmaz” (setof)

- `setof` halmazt készít egy listából úgy, hogy kiszedi belőle az ismétlődő elemeket. Rossz hatékonyságú.

```
(* setof : ''a list -> ''a list
   setof xs = xs elemeinek listaként ábrázolt halmaza
*)
fun setof []       = []
  | setof (x::xs) = newMem(x, setof xs)
```

- Öt halmazműveletet definiálunk:
  - unió (`union`, $S \cup T$),
  - metszet (`inter`, $S \cap T$),
  - részhalmaza-e (`isSubset`, $T \subseteq S$),
  - egyenlők-e (`isSetEq`, $S = T$),
  - hatványhalmaz (`powerSet`, pS).

Halmazműveletek: „unió” (`union`) és „metszet” (`inter`)

- Listaként kezeljük a halmazokat, később hatékonyabb ábrázolást választhatunk, pl. rendezett listát vagy bináris fát.
- Két halmaz uniója

```
(* union : ''a list * ''a list -> ''a list
   union(xs, ys) = az xs és ys elemeiből álló halmazok uniója
*)
fun union ([], ys)     = ys
  | union (x::xs, ys) = newMem(x, union(xs, ys))
```

- Két halmaz metszete

```
(* inter : ''a list * ''a list -> ''a list
   inter(xs, ys) = az xs és ys elemeiből álló halmazok metszete
*)
fun inter ([], _)      = []
  | inter (x::xs, ys) = let val zs = inter(xs, ys)
                        in
                           if x isMem ys then x::zs else zs
                        end
```

Halmazműveletek: „részhalmaza-e” (`isSubset`) és „egyenlők-e” (`isSetEq`)

- Részhalmaza-e egy halmaz egy másiknak?

```
(* isSubset : ''a list * ''a list -> bool
   isSubset (xs, ys) = az xs elemeiből álló halmaz részhalmaza-e
                       az ys elemeiből álló halmaznak
*)
fun isSubset ([], _)     = true
  | isSubset (x::xs, ys) = (x isMem ys) andalso isSubset(xs, ys)

infix isSubset
```

- Két halmaz egyenlősége (a listák egyenlőségvizsgálata beépített művelet az SML-ben, halmazokra mégsem használható, mert pl. `[3, 4]` és `[4, 3]` listaként ugyan különböznek, de halmazként egyenlők)

```
(* isSetEq : ''a list * ''a list -> bool
   isSetEq(xs, ys) = az xs elemeiből álló halmaz egyenlő-e
                     az ys elemeiből álló halmazzal
*)
fun isSetEq (xs, ys) = (xs isSubset ys) andalso (ys isSubset xs)
```

Halmazműveletek: „halmaz hatványhalmaza” (`powerSet`)

A hatványhalmaz megvalósítása SML-ben ezen és a következő két fólián csak olvasmány haladóknak, nem vizsgaanyag.

- Az S halmaz hatványhalmaza *összes* részhalmazának a halmaza, az S-t és a $\{\}$-t is beleértve.
- S hatványhalmaza úgy állítható elő, hogy kivesszük S-ből az x elemet, majd *rekurzív módon* előállítjuk az $S - \{x\}$ hatványhalmazát.
- Ha tetszőleges T halmazra $T \subseteq S - \{x\}$, akkor $T \subseteq S$ és $T \cup \{x\} \subseteq S$, így mind T, mind $T \cup \{x\}$ eleme S hatványhalmazának.
- Miközben a fenti elvet rekurzív módon alkalmazzuk, tehát fölsoroltatjuk az $S - \{x\}$ stb. részhalmazait, gyűjtjük a *már kiválasztott* elemeket. Egy-egy rekurzív lépésben a gyűjtő vagy változatlan (T), vagy kiegészül az x elemmel ($T \cup \{x\}$).
- A `pws` függvényben a `base` argumentumban gyűjtjük a halmaz *már kiválasztott* elemeit; kezdetben üres.
- pws(xs, base) = $\{S \cup \mathtt{base} \mid S \subseteq \mathtt{xs}\}$, azaz $\mathtt{xs} \cup \mathtt{base}$ azon részhalmazainak a listája, amelyek teljes egészében tartalmazzák a base halmazt.

Halmazműveletek: „halmaz hatványhalmaza” (folyt.)

- Ezzel a `pws` függvény:

```
(* pws : 'a list * 'a list -> 'a list list
   pws(xs, base) = mindazon halmazok listája, amelyek előállnak xs egy
                   részhalmazának és a base halmaznak az uniójaként
*)
fun pws ([], base) = [base]
  | pws (x::xs, base) = pws(xs, base) @ pws(xs, x::base)
```

- `pws(xs, base)` valósítja meg az $S - \{x\}$ rekurzív hívást (hiszen `x::xs` felel meg S-nek), azaz állítja elő az összes olyan halmazt, amelyekben `x` nincs benne.
- `pws(xs, x::base)` rekurzív módon `base`-ben gyűjti az `x` elemeket, vagyis előállítja az összes olyan halmazt, amelyben `x` benne van.
- `powerSet`-nek már csak megfelelő módon hívnia kell `pws`-t:

```
(* powerSet : 'a list -> 'a list list
   powerSet xs = az xs halmaz hatványhalmaza
*)
fun powerSet xs = pws(xs, [])
```

Halmazműveletek: „halmaz hatványhalmaza”, hatékonyabban

- pws rossz hatékonyságú, mert kétfelé ágazó rekurziót használ. Pl. egy 19 egész számból álló lista hatványhalmazának előállítását nem lehet kivárni. Írjunk hatékonyabb változatot.
- Az insAll segédfüggvény egy elemet szúr be egy listákból álló lista minden eleme elé.

```
(* insAll : 'a * 'a list list * 'a list list -> 'a list list
   insAll(x, yss, zss) = az yss lista ys elemeinek zss elé fűzött
                         listája, amelyben minden ys elem elé x van beszúrva *)
fun insAll (x, [], zss) = zss
  | insAll (x, ys::yss, zss) = insAll(x, yss, (x::ys)::zss)
```

- powerSet insAll-t használó rekurzív változata

```
fun powerSet [] = [[]]
  | powerSet (x::xs) = let val pws = powerSet xs
                       in  pws @ insAll(x, pws, [])
                       end
```

- powerSet insAll-t használó iteratív változata

```
fun powerSet [] = [[]]
  | powerSet (x::xs) = let val pws = powerSet xs
                       in insAll(x, pws, pws)
                       end
```

EGYIDEJŰ DEKLARÁCIÓ

Egyidejű deklaráció

- Típusok, ill. értékek *egyidejűleg* is deklarálhatók az `and` kulcsszó alkalmazásával.
- Vegyük a következő deklarációsorozatokat:

```
type sor = int; type osz = int;
datatype fa = L | B of fa * fa;
    datatype 'a verem = >| | >> of 'a * 'a verem;
val v1 = "a"; val v2 = "z";
fun f1 i = i +1; fun f2 i = i - 1;
```

Ezeket a deklarációkat az SML-értelmező a *megadott sorrendben* értékeli ki.

```
type sor = int and osz = int;
datatype fa = L | B of fa * fa and
    'a verem = >| | >> of 'a * 'a verem;
val v1 = "a" and v2 = "z";
fun f1 i = i +1 and f2 i = i - 1;
```

Az `and` szócskával elválasztott deklarációkat az SML-értelmező *egyidejűleg* értékeli ki.

Egyidejű deklaráció (folyt.)

- Egyidejű deklarációt kell használnunk kölcsönösen rekurzív függvények definiálására. Példa:

```
fun even 0 = true | even n = odd(n-1)
and odd 0 = false | odd n = even(n-1);
```

- Egyidejű deklarációt használhatunk két vagy több kötés egyidejű felcserélésére. Példa:

```
val v1 = "a"; val v2 = "z"; val v1 = v2 and v2 = v1;
```

- Egyidejű deklarációt használhatunk, ha fölülről lefelé haladva akarunk programot írni. Példa:

```
fun length zs = len zs 0
and len [] i = i | len (_ :: xs) i = len xs (i+1);
```

- A polimorf függvényeket a szekvenciális és az egyidejű deklaráció eltérően kezeli, mivel a típuslevezetést az SML-értelmező a teljes kifejezésre alkalmazza. Példa:

```
fun id x = x; fun hi () = id 3; fun nr () = id 4.0;
fun id x = x  and hi () = id 3  and nr () = id 4.0;
```

  A első sor kiértékelésekor `id` `'a -> 'a` típusú. A második sor kiértékelésekor `id` `int -> int` és `real -> real` típusú lenne egyszerre, ami lehetetlen.

AZ ORDER TÍPUS

Az `order` típus

Az `order` típus definíciója (ld. `General.sig`)

```
datatype order = LESS | EQUAL | GREATER

[order] is used as the return type of comparison functions.
```

Példák az SML-alapkönyvtárból (SML Basis Library)

```
Int.compare     : int * int -> order
Char.compare    : char * char -> order
Real.compare    : real * real -> order
String.compare  : string * string -> order
Time.compare    : time * time -> order
```

LISTÁK RENDEZÉSE

Listák rendezése

- **`inssort` (beszúró rendezés),**
- **`selsort` (kiválasztó rendezés),**
- **`quicksort` (gyorsrendezés),**
- **`tmsort` (felülről lefelé haladó összefésülő rendezés),**
- `bmsort` (alulról felfelé haladó összefésülő rendezés),
- `smsort` (simarendezés).

Beszúró rendezés

- Az `ins` segédfüggvény az `x` elemet a megfelelő helyre rakja be az `ys` listában:

```
(* ins : real * real list -> real list
   ins (x, ys) = ys kibővítve x-szel a <= reláció szerint
   PRE: ys a <= reláció szerint rendezve van *)
fun ins (x, y::ys) = if x <= y then x::y::ys else y::ins(x, ys)
  | ins (x : real, []) = [x]
```

- `inssort`-tal rekurzívan rendezzük a lista maradékát; végrehajtási ideje $O(n^2)$:

```
(* inssort : ('a * 'b list -> 'b list) -> 'a list -> 'b list
   inssort f xs = az xs elemeiből álló, az f felhasználásával
                  rendezett lista *)
fun inssort f (x::xs) = f(x, inssort f xs)
  | inssort _  [] = []
```

- Példa `inssort` alkalmazására:

```
inssort ins [4.24, 4.1, 5.67, 1.12, 4.1, 0.33, 8.0]
```

Beszúró rendezés, generikus változat

- Az `ins` függvényt generikussá tesszük:

```
(* ins : ('a * 'a -> bool) -> 'a * 'a list -> 'a list
   ins cmp (x, ys) = ys kibővítve x-szel a cmp reláció szerint
   PRE: ys a cmp reláció szerint rendezve van *)
fun ins cmp (x, ys) =
      let fun ins0 (y::ys) =
                if cmp(x, y) then x::y::ys else y::ins0 ys
            | ins0 [] = [x]
      in  ins0 ys
      end
```

- Ezzel `inssort` egy újabb változata:

```
(* inssort : ('a * 'a -> bool) -> 'a list -> 'a list
   inssort cmp xs = az xs elemeiből álló, a cmp reláció
                    szerint rendezett lista *)
fun inssort cmp (x::xs) = ins cmp (x, inssort cmp xs)
  | inssort _ [] = []
```

Beszúró rendezés, generikus változat (folyt.)

- `inssort` eddigi változatai előbb elemeire szedik szét a rendezendő listát, majd hátulról visszafelé haladva, rendezés közben építik fel az újat.
- A jobbrekurziót és akkumulátort használó változatnak (`inssort2`) kisebb veremre van szüksége, mivel a listáról leválasztott elemeket balról jobbra haladva azonnal berakja a helyükre az eredménylistában. (A két megoldás futási idejét később összehasonlítjuk).

```
(* inssort2 : ('a * 'a -> bool) -> 'a list -> 'a list
   inssort2 cmp xs = az xs elemeiből álló, a cmp reláció
                     szerint rendezett lista *)
fun inssort2 cmp xs =
      let (* sort :  'a list -> 'a list -> 'a list
             sort xs zs = zs kibővítve az xs-nek a cmp reláció
                             szerint rendezett elemeivel
             PRE: zs cmp szerint rendezve van *)
          fun sort (x::xs) zs = sort xs (ins cmp (x, zs))
            | sort [] zs = zs
      in
          sort xs []
      end
```

Beszúró rendezés `foldr`-rel és `foldl`-lel

- A második argumentumát akkumulátorként használó `foldl` kisebb vermet használ `foldr`-nél, ezért `inssortL` hosszabb listákat tud rendezni:

```
fun inssortR cmp = foldr (ins cmp) []
fun inssortL cmp = foldl (ins cmp) []
```

- Példák `insort`-tal és `insort2`-vel:

```
inssort op<= [4.24, 4.1, 5.67, 1.12, 4.1, 0.33, 8.0];
inssort2 op>= [4, 4, 5, 1, 0, 8];
inssort op< (explode "qwerty")
```

- Példák `foldr` és `foldl` felhasználásával:

```
fun inssortRi cmp = foldr (ins cmp)[];
fun inssortLr cmp = foldl (ins cmp)([] : real list)

inssortRi op>= [4, 4, 5, 1, 0, 8];
inssortLr op>= [4.24, 4.1, 5.67, 1.12, 4.1, 0.33, 8.0]
```

A futási idők mérése, összehasonlítása

- 2000 elemet tartalmazó, véletlenszerűen előállított, illetve eredetileg éppen fordított sorrendű listák rendezéséhez szükséges futási időt mérünk.
  - Véletlen eloszlású egészlistát állít elő a `Random` könyvtárbeli `rangelist` függvény:

```
val xs2000R =
      Random.rangelist (1, 100000) (2000, Random.newgen());
```

  - Növekvő sorrendű egészlistát állít elő a `--` operátor:

```
infix --;
fun fm -- to =
      let fun upto to zs =
                    if to < fm then zs else upto (to-1) (to::zs)
      in
          upto to []
      end;

val xs2000N = 1 -- 2000;
```

A futási idők mérése, összehasonlítása (folyt.)

- A futási időt az alábbi függvénnyel mérhetjük:

```
fun futIdo (sort, sortFn) (cmp, cmpFn) (xs, kind) =
      let val starttime = Timer.startCPUTimer()
          val zs = sort cmp xs
          val usr=tim,... = Timer.checkCPUTimer starttime
      in
          "Int sort with " ^ sortFn ^ ", " ^ cmpFn ^
          ", length = " ^ Int.toString(length xs) ^ " (" ^
          kind ^ "), time = " ^ Time.fmt 2 tim ^ " sec\n"
      end;
```

```
val t1N =
      futIdo (inssort, "inssort") (op>=, "op>=") (xs2000N, "increasing");
val t2N =
      futIdo (inssort2, "inssort2") (op>=, "op>=") (xs2000N, "increasing");
val t1R =
      futIdo (inssort, "inssort") (op>=, "op>=") (xs2000R, "random");
val t2R =
      futIdo (inssort2, "inssort2") (op>=, "op>=") (xs2000R, "random");
```

A futási idők mérése, összehasonlítása (folyt.)

- A 2000 elemű, fordított sorrendű lista rendezése az akkumulátort nem használó `inssort`-változatokkal több mint 5 s-ig, az akkumulátort használó változatokkal csak 0.01 s-ig tart (linux, 233 MHz-es Pentium).

```
Int sort with inssort, op>=, length = 2000 (increasing), time = 5.18 sec
Int sort with inssort2, op>=, length = 2000 (increasing), time = 0.01 sec
Int sort with inssortRi, op>=, length = 2000 (increasing), time = 5.14 sec
Int sort with inssortLi, op>=, length = 2000 (increasing), time = 0.01 sec
```

- Eltűnik a különbség, ha ugyanolyan hosszú, de véletlenszerűen előállított listákat rendezünk.

```
Int sort with inssort, op>=, length = 2000 (random), time = 2.39 sec
Int sort with inssort2, op>=, length = 2000 (random), time = 2.26 sec
Int sort with inssortRi, op>=, length = 2000 (random), time = 2.40 sec
Int sort with inssortLi, op>=, length = 2000 (random), time = 2.24 sec
```

Kiválasztó rendezés

```
(* selsort : ('a * 'a -> order) -> 'a list -> 'a list
   selsort cmp xs = az xs elemei cmp szerint növekvő sorrendben
*)
fun selsort cmp xs =
      let
          (* max : 'a * 'a -> 'a
             max (x, y) = x és y közül cmp szerint a nagyobb
          *)
          fun max (x, y) = if cmp(x, y) = GREATER then x else y

          (* min : 'a * 'a -> 'a
             min (x, y) = x és y közül cmp szerint a kisebb
          *)
          fun min (x, y) = if cmp(x, y) = LESS then x else y

          (* maxSelect : 'a * 'a list * 'a list -> 'a * 'a list
             maxSelect (x, ys, zs) = pár, amelynek első tagja az
                (x::ys) cmp szerinti legnagyobb eleme, második
                tagja az x::ys többi eleméből és a zs
                elemeiből álló lista                            *)
          fun maxSelect (x, [], zs) = (x, zs)
            | maxSelect (x, y::ys, zs) =
                           maxSelect(max(x, y), ys, min(x,y)::zs)
```

Kiválasztó rendezés (folyt.)

```
        (* sSort : 'a list * 'a list -> 'a list
           sSort (xs, ws) = az xs elemei cmp szerint növekvő
                         sorrendben a ws elé fűzve              *)
        fun sSort ([], ws) = ws
          | sSort (x::xs, ws) =
              let val (z, zs) = maxSelect(x, xs, [])
              in
                 sSort (zs, z::ws)
              end
    in
        sSort (xs, [])
    end

app load ["Int","Char","Real"];

selsort Int.compare [1,2,3,4,5,6,7,8,9];
selsort Int.compare [9,8,7,6,5,4,3,2,1];
selsort Real.compare [4.5,6.7,3.6,4.3,1.2,0.9,8.9,9.8,2.0];
selsort Char.compare (explode "Ej mi a ko tyukanyo");
```

Gyorsrendezés akkumulátor nélkül

```
(* quicksort1 cmp xs = az xs elemeinek cmp szerint rendezett listája
   quicksort1 : ('a * 'a -> order) -> 'a list -> 'a list
*)
fun quicksort1 cmp xs =
      let (* qs : 'a list -> 'a list
             qs ys = ys elemeinek cmp szerint rendezett listája
          *)
          fun qs (m::ys) =
                let (* partition : 'a list * 'a list * 'a list -> 'a list
                       partition (xs, ls, rs) = olyan pár, amelynek első tagja
                         az xs m-nél kisebb elemeinek a listája ls elé fűzve,
                         második tagja pedig az xs többi eleme rs elé fűzve *)
                    fun partition (x::xs, ls, rs) =
                          if cmp(x, m) = LESS then partition(xs, x::ls, rs)
                                              else partition(xs, ls, x::rs)
                      | partition ([], ls, rs) = qs ls @ (m::qs rs)
                in
                    partition (ys, [], [])
                end
            | qs [] = []
      in
          qs xs
      end;
```

Gyorsrendezés akkumulátorral

```
(* quicksort2 cmp xs = az xs elemeinek cmp szerint rendezett listája
   quicksort2 : ('a * 'a -> order) -> 'a list -> 'a list
*)
fun quicksort2 cmp xs =
      let (* qs : 'a list -> 'a list -> 'a list
             qs ys zs = ys elemeinek cmp szerint rendezett listája zs elé fűzve
           *)
          fun qs (m::ys) zs =
                let (* partition : 'a list * 'a list * 'a list -> 'a list
                       partition (xs, ls, rs) = olyan pár, amelynek első tagja
                         az xs m-nél kisebb elemeinek a listája ls elé fűzve,
                         második tagja pedig az xs többi eleme rs elé fűzve *)
                    fun partition (x::xs, ls, rs) =
                          if cmp(x, m) = LESS then partition(xs, x::ls, rs)
                                               else partition(xs, ls, x::rs)
                      | partition ([], ls, rs) = qs ls (m :: qs rs zs)
                in
                    partition (ys, [], [])
                end
            | qs [] zs = zs
      in
          qs xs []
      end;
```

A futási idők mérése, összehasonlítása

```
val t1 = futIdo (inssort2, "inssort2") (op>=, "op>=") (xs2000R, "random");
                                                     (* ~ 2 M összehasonlítás! *)
val t3 = futIdo (quicksort2, "quicksort2")
                (Int.compare, "Int.compare") (xs20000R, "random");
val t4 = futIdo (Listsort.sort, "Listsort.sort")
                (Int.compare, "Int.compare") (xs20000R, "random");
                                                     (* ~ 300 E összehasonlítás *)

Int sort with inssort2, op>=, length = 2000 (random), time = 2.30 sec

Int sort with quicksort1, Int.compare, length = 20000 (random), time = 2.18 sec
Int sort with quicksort2, Int.compare, length = 20000 (random), time = 1.72 sec
Int sort with Listsort.sort, Int.compare, length = 20000 (random), time = 1.76 sec

Int sort with quicksort2, Int.compare, length = 200000 (random), time = 27.13 sec
Int sort with quicksort1, Int.compare, length = 200000 (random), time = 32.59 sec

val t7 = futIdo (Listsort.sort, "Listsort.sort") (Int.compare, "Int.compare")
         (Random.rangelist (1, 100000) (200000, Random.newgen()), "random");
! Uncaught exception:
! Out_of_memory
```

Összefésülő rendezések

- Az összefésülő rendezéshez kell egy olyan függvény, amely két listát növekvő sorrendben egyesít.

```
(* merge(xs, ys) = xs és ys elemeinek <= szerint
                   egyesített listája
   merge : int list * int list -> int list
*)
fun merge (xxs as x::xs, yys as y::ys)=
      if x <= y
      then x::merge(xs, yys)
      else y::merge(xxs, ys)
  | merge ([], ys) = ys
  | merge (xs, []) = xs;
```

- Korlátot jelent, ha a részeredményeket a veremben tároljuk.
- Akkumulátor használata esetén meg kell fordítani az eredménylistát.

Fölülről lefelé haladó összefésülő rendezés

- A fölülről lefelé haladó összefésülő rendezés *(top-down merge sort)* akkor hatékony, ha közel azonos hosszúságú az a két lista, amelyekre a rendezendő listát szétszedjük.

```
(* tmsort xs = az xs elemeinek a <= reláció szerint
               rendezett listája
   tmsort : int list -> int list
*)
fun tmsort xs = let val h = length xs
                    val k = h div 2
                in
                   if h > 1
                   then merge(tmsort(List.take(xs, k)),
                              tmsort(List.drop(xs, k)))
                   else xs
                end;
```

- A legrosszabb esetben $O(n \cdot log\, n)$ lépésre van szükség.

TÖBB MEGOLDÁS ELŐÁLLÍTÁSA VISSZALÉPÉSSEL

n vezér a sakktáblán

- Hányféleképpen rakható *n* vezér a sakktáblára úgy, hogy ne üssék egymást?
  - A vezéreket tartalmazó mezők sorának `j` sorszámát az egyes oszlopokon belül egy `n` hosszú sorvektor adott oszlophoz rendelt mezőjébe írt szám adja meg, ahol `j<=s< n`. Példa `n=4` esetén:

```
   +---+---+---+---+
   | 3 | 1 | 4 | 2 |
   +---+---+---+---+

     0   ---->  n-1
   +---+---+---+---+
 0 |   | q |   |   |
   +---+---+---+---+
 | |   |   |   | q |
 | +---+---+---+---+
 V | q |   |   |   |
   +---+---+---+---+
n-1|   |   | q |   |
   +---+---+---+---+
```

  - A sorvektort (egy egyre bővülő) listával valósítjuk meg. Egy listához balról könnyű új elemeket fűzni, ezért a táblát és a vezérek helyzetét leíró listát hossztengelye mentén tükrözzük.

```
   ...-+---+---+---+
       | 4 | 1 | 3 |
   ...-+---+---+---+

    n-1  <----   0
   ...-+---+---+---+
 0     |   | q |   |
   ...-+---+---+---+
 |     |   |   |   |
 | ...-+---+---+---+
 V     |   |   | q |
   ...-+---+---+---+
n-1    | q |   |   |
   ...-+---+---+---+
```

n vezér a sakktáblán (folyt.)

Azt, hogy az új vezért üti-e egy korábban a táblára rakott másik vezér, a sorvektor vizsgálatával dönthetjük el: a sorvektor azt adja meg, hogy a listaelem indexe által meghatározott oszlopban és a listaelem értéke által meghatározott sorban vezér van.

1. Az új vezér sorának sorszáma, azaz az új listalem értéke nem fordulhat elő a lista már felépített részében.
2. Az új vezér átlós irányban sem lehet egy vonalban más vezérrel a táblán. Ez azt jelenti, hogy ha a sorvektort jelentő lista elejére az `s` sorindexet akarjuk rakni, akkor az `i`-edik elemének az értéke, ha van ilyen eleme, nem lehet `s-(i+1)`, ill. `s+(i+1)`.
3. A következő példa segít megvilágítani az esetet.

Ha a `2`-es oszlopba és az `s=1`-es sorba akarjuk lerakni az új vezért, akkor az `x`-szel jelölt mezőket kell megvizsgálnunk. Az eddig létrehozott listának (sorvektornak) két eleme van, ahol a lista fejének az indexe 0. A listafej értéke nem lehet s-1, sem s+1. A lista rekurzív algoritmussal dolgozható fel.

```
               ...-+---+---+
                 s |   |   |
               ...-+---+---+

          n-1 <--- 1   0
          ...-+---+---+---+
     0        |   | x |   |
          ...-+---+---+---+
     1        | q |   |   |
          ...-+---+---+---+
     |        |   | x |   |
     V    ...-+---+---+---+
    n-1       |   |   | x |
          ...-+---+---+---+
```

n vezér a sakktáblán: „ütésben van”-vizsgálat

```
(* utesbenVan : int list -> bool
   utesbenVan zs = igaz, ha a (hd zs) vezért legalább egy
                   (tl zs)-beli vezér üti
*)
fun utesbenVan [] = false
  | utesbenVan (z::zs) =
      let (* uV : int -> int -> int list -> bool
             uV s1 s2 rs = igaz, ha a z vezért s1, s2 vagy r, vagy
                    egy másik rs-beli vezér közül legalább egy üti
          *)
          fun uV _ _ [] = false
            | uV s1 s2 (r::rs) = z = r orelse
                                 s1 = r orelse
                                 s2 = r orelse
                                 uV (s1-1) (s2+1) rs
      in
          uV (z-1) (z+1) zs
      end
```

n vezér a sakktáblán: egy megoldás előállítása

```
exception Zsakutca

(* vezerek0 : int -> int list
   vezerek0 n = a feladvány egy megoldása n vezér esetén
*)
fun vezerek0 n =
  let (* vez: int -> int list -> int list
         vez z zs: egy megoldás n vezér esetén
      *)
      fun vez z zs =
            if z = 0 andalso utesbenVan zs orelse z = n
            then raise Zsakutca
            else if length zs = n
            then rev zs
            else vez 0 (z::zs) handle Zsakutca => vez (z+1) zs
  in
      vez 0 []
  end
```

n vezér a sakktáblán: több megoldás előállítása visszalépéssel

```
(* vezerek1 : int -> int list list
   vezerek1 n = a feladvány összes megoldásának listája
                n vezér esetén
*)
fun vezerek1 n =
  let (* vez: int -> int list -> int list list
         vez z zs: az összes megoldás listája n vezér esetén
      *)
      fun vez z zs =
            if z = 0 andalso utesbenVan zs orelse z = n
            then raise Zsakutca
            else if length zs = n
            then [rev zs]
            else (vez 0 (z::zs) handle Zsakutca => []) @
                 (vez (z+1) zs handle Zsakutca => [])
  in
      vez 0 []
  end
```

n vezér a sakktáblán: több megoldás előállítása listák listájával

```
(* vezerek2 : int -> int list list
   vezerek2 n = a feladvány összes megoldásának listája
               n vezér esetén
*)
fun vezerek2 n =
  let (* vez: int -> int list -> int list list
         vez z zs: az összes megoldás listája n vezér esetén
      *)
      fun vez z zs =
            if z = 0 andalso utesbenVan zs orelse z = n
            then []
            else if length zs = n
            then [rev zs]
            else vez 0 (z::zs) @ vez (z+1) zs
  in
      vez 0 []
  end
```

n vezér a sakktáblán: több megoldás előállítása listák listájával (folyt.)

Akkumulátor alkalmazásával:

```
(* vezerek3 : int -> int list list
   vezerek3 n = a feladvány összes megoldásának listája
               n vezér esetén
*)
fun vezerek3 n =
  let (* vez: int -> int list -> int list list -> int list list
         vez z zs: az összes megoldás listája n vezér esetén
      *)
      fun vez z zs zss =
            if z = 0 andalso utesbenVan zs orelse z = n
            then zss
            else if length zs = n
            then rev zs :: zss
            else vez 0 (z::zs) (vez (z+1) zs zss)
  in
     vez 0 [] []
  end
```

FÜGGVÉNYEK KOMPOZÍCIÓJA

Függvények kompozíciója

- Az $f \circ g$ függvénykompozíció az SML-ben

```
(* f o g = az f és g függvények kompozíciója
*)
```

```
infix 2 o;
```

`fun (f o g) = fn x => f(g x);` vagy

```
fun (f o g) x = f(g x);
```

- Az o típusa `? * ? -> ?` szerkezetű. Mit írjunk a `?`-ek helyébe? Vezessük le!
  - A függvénydefiníció jobb oldalán álló kifejezés elemzésével kezdjük.

    ```
    x : 'a      g : 'a -> 'b      (g x) : 'b      f : 'b -> 'c
    ```

  - A `fun (f o g) x = f(g x)` függvénydefinícióban az egyenlőségjel (=) bal és jobb oldalán álló kifejezéseknek azonos értéket kell eredményül adniuk, ezért `f o g` és `f` eredményének azonos a típusa (azaz `'c`).

    ```
    (f o g) : 'a -> 'c    o : ('b -> 'c) * ('a -> 'b) -> ('a -> 'c)
    ```

- Példa: `round : real -> int, chr : int -> char`
  `chr o round : real -> char`

ÖSSZEFOGLALÓ: TÍPUSOK, ÁLLANDÓK, NEVEK, KÖTÉSEK

Típusok az SML-ben (összefoglaló)

- Típusok és programozási nyelvek
  - Típus nélküli nyelvek, pl. assembly, LISP, Prolog
  - Gyengén típusos nyelvek, pl. Fortran, Algol, BASIC, C, C++, Pascal
  - Erősen típusos nyelvek, pl. Ada, **SML**, clean, haskell
  - Erős típus: a típusok ($\sim$ halmazok) diszjunktak, azaz nincs közös elemük
- Egyszerű SML-típusok
  - `int` – előjeles egész szám, a Z egy részhalmaza
  - `word`, `word8` – előjel nélküli nemnegatív egész szám, az N_0 egy részhalmaza
  - `real` – előjeles racionális (valós?!) szám, a Q egy részhalmaza
  - `bool`, `char`, `order`, `unit`, `string`, `substring`, `Time.time`, `Date.date`, ...
  - felsorolásos típus, pl. `datatype color = Red | White | Green`
- Polimorf összetett SML-típusok
  - rekord, ennes, pl. `type ('a, 'b) par = 'a * 'b`
  - lista, vektor (nem frissíthető), tömb (frissíthető), pl. `'a list`, `'b vector`, `'c array`
  - fák és más rekurzív típusok, pl. `datatype 'a t = L | N of 'a t * 'a t * 'a`

Különleges állandók az SML-ben (összefoglaló)

- Előjeles egész állandó

Példák:	`0`	`~0`	`4`	`~04`	`999999`	`0xFFFF`	`~0x1ff`	
Ellenpéldák:	`0.0`	`~0.0`	`4.0`	`1E0`	`-317`	`0XFFFF`	`-0x1ff`	

- Valós állandó

Példák:	`0.7`	`~0.7`	`3.32E5`	`3E~7`	`~3E~7`	`3e~7`	`~3e~7`	
Ellenpéldák:	`23`	`.3`	`4.E5`	`1E2.0`	`1E+7`	`1E-7`		

- Előjel nélküli egész állandó

Példák:	`0w0`	`0w4`	`0w999999`	`0wxFFFF`	`0wx1ff`	
Ellenpéldák:	`0w0.0`	`~0w4`	`-0w4`	`0w1E0`	`0wXFFFF`	`0WxFFFF`

- Füzérállandó: `"`-ek között álló nulla vagy több nyomtatható karakter, szóköz vagy `\` jellel kezdődő *escape-szekvencia* (l. a táblázatot a következő lapon).

- Karakterállandó: `#` jelet közvetlenül követő, egykarakteres füzérállandó.

Példák:	`#"a"`	`#"\n"`	`#"\^Z"`	`#"\255"`	`#"\""`
Ellenpéldák:	`# "a"`	`#c`	`#"""`		

Escape-szekvenciák az SML-ben (összefoglaló)

- Escape-szekvenciák

`\a`	Csengőjel (BEL, ASCII 7).
`\b`	Visszalépés (BS, ASCII 8).
`\t`	Vízszintes tabulátor (HT, ASCII 9).
`\n`	Újsor, soremelés (LF, ASCII 10).
`\v`	Függőleges tabulátor (VT, ASCII 11).
`\f`	Lapdobás (FF, ASCII 12).
`\r`	Kocsi-vissza (CR, ASCII 13).
`\^`*c*	Vezérlő karakter, ahol $64 \leq c \leq 95$ (@ … _), és `\^`*c* ASCII-kódja 64-gyel kevesebb *c* ASCII-kódjánál.
`\`*ddd*	A *ddd* kódú karakter (*d* decimális számjegy).
`\u`*xxxx*	A *xxxx* kódú karakter (*x* hexadecimális számjegy).
`\"`	Idézőjel (`"`).
`\\`	Hátratört-vonal (`\`).
`\`$f \cdots f$`\`	Figyelmen kívül hagyott sorozat. $f \cdots f$ nulla vagy több formázókaraktert (szóköz, HT, LF, VT, FF, CR) jelent.

Név képzése az SML-ben (összefoglaló)

- Alfanumerikus *(alphanumeric)* név: kis- és nagybetűk, számjegyek, percjelek (`'`) és aláhúzás-jelek (_) olyan sorozata, amely betűvel vagy percjellel kezdődik
  - Példák: `tothGyorgy` `Toth_3_Gyorgy` `toth'gyorgy`
- Írásjelekből álló *(symbolic)* név: az alábbi írásjelek tetszőleges, nem üres sorozata

```
! % & $ # + - / : < = > ? @ \ ~ ' ^ | *
```

  - Példák: `++` `<->` `|||` `##` `|=|`
- Speciális a szerepe az alábbi *fenntartott írásjeleknek*

```
( ) [ ] { } , ; . ...
```

- Más jelentés nem rendelhető az alábbi *fenntartott nevekhez*

```
abstype and andalso as case do datatype else end eqtype exception
fn fun functor handle if in include infix infixr let local nonfix
of op open orelse raise rec sharing sig signature struct structure
then type val where with withtype while : :: :> _ | = => -> #
```

Értékdeklaráció – név kötése értékhez – az SML-ben (összefoglaló)

- Tetszőleges típusú érték köthető tetszőleges névhez:

`val harom = 2 + 1`	`: int`	
`val MHz = 94.5`	`: real`	
`val veege = true`	`: bool`	`true`, `false`
`val kisA = #"a"`	`: char`	
`val palindrom = "ABBA"`	`: string`	
`val kisebb = LESS`	`: order`	`LESS`, `EQUAL`, `GREATER`
`val ezNemSemmi = ()`	`: unit`	Egyetlen értéke a `()`, azaz nullas!
`val rat = {num = 3, den = 4}`	`: {den : int, num : int}`	Mezőnevek ábécében.
`val bLista = [2,3,4] @ [3,2]`	`: int list`	
`val telenek = [0w123, 0wxcd]`	`: word list`	

- Függvényérték is köthető tetszőleges névhez:

`val incMod = fn i => fn n => (i + 1) mod n`	`: int -> int -> int`	λ-jelöléssel
`fun incMod i n = (i + 1) mod n`	`: int -> int -> int`	A szokásos alakban

- Típusmegkötés:

`val id = fn (n : int) => n`	`: int -> int`	Pl. `id 3`, de `id 4.5` nem!
`val telenek = [0w65, 0wx41 : word8]`	`: word8 list`	

Függvénynév helyzete és kötése

- Függvénynév (másnéven függvényjel) helyzete és kötése általában
  - Egy függvénynév *prefix*, *infix* vagy *postfix* helyzetű lehet.
  - Az infix helyzetű függvénynevet gyakran *operátornak* nevezik.
  - Egy (infix helyzetű) operátor lehet *asszociatív* vagy *nem-asszociatív*; köthet balra vagy jobbra, vagy semerre. Asszociatív operátor esetén a kötési iránynak nincs jelentősége.
- Infix Prolog-operátor kötése
  - `xfx` = `f` mindkét oldalán `f` csak zárójelben ismétlődhet (`f` „nem köt”),
  - `yfx` = `f` bal oldalán `f` zárójelezés nélkül ismétlődhet (`f` „balra köt”),
  - `xfy` = `f` jobb oldalán `f` zárójelezés nélkül ismétlődhet (`f` „ jobbra köt”).

Függvénynév helyzete és kötése az SML-ben

- Kifejezések és típuskifejezések az SML-ben
  - Az SML-ben a szokásos kifejezések mellett vannak *típuskifejezések* is.
  - A függvények *értékekre,* a típusfüggvények *típusokra* alkalmazhatók.
- Függvénynév és típusfüggvénynév helyzete és kötése az SML-ben
  - Függvénynév: *prefix* vagy *infix*.
  - Típusfüggvénynév: *infix* vagy *postfix*.
  - Az *infix* helyzetű függvénynév és típusfüggvénynév (szokásos nevén operátor, ill. típusoperátor) balra vagy jobbra köt, vagy semerre nem köt.
- Típusoperátorok
  - A két infix helyzetű beépített típusoperátor közül a `->` jobbra, a `*` semerre nem köt.
  - A `*` operátornak magasabb a precedenciája, mint a `->` operátornak.
  - A típusoperátoroknak magasabb a precedenciájuk a többi operátorénál.
  - Példák:

`int * real * string`	Egy hármas
`int * (real * string)`	Egy pár, amelynek a második tagja is egy pár
`(int * real) * string`	Egy pár, amelynek az első tagja is egy pár
`int * real -> string`	Függvény, amelynek egy pár az argumentuma
`int * (real -> string)`	Egy pár, amelynek a második tagja egy függvény

Függvénynév helyzete és kötése az SML-ben

- Tetszőleges kétargumentumú függvénynévet lehet meghatározott preferenciájú (infix helyzetű) operátorként deklarálni az `infix` vagy az `infixr` deklaratívával.
- Az `infix` balra, az `infixr` jobbra kötő operátort deklarál.
- Az `op` deklaratíva egy (esetleg *infix* helyzetű) operátort átmenetileg *prefix* helyzetűvé alakít.
- A `nonfix` deklaratíva egy (esetleg *infix* helyzetű) operátort tartósan *prefix* helyzetűvé alakítja.
- Egy minősített nevet, vagy egy olyan nevet, amelyet az `op` deklaratíva előz meg, csak *prefix* helyzetben lehet alkalmazni.
- Táblázatban összefoglalva:

`infix`	<*d*>	$id_1 \ldots id_n$	balra köt	binds to the left
`infixr`	<*d*>	$id_1 \ldots id_n$	jobbra köt	binds to the right
`nonfix`		$id_1 \ldots id_n$	prefix	prefix

- A táblázatban $\texttt{id}_i$ tetszőleges nevet jelöl ($n \geq 1$). A *d* 0 és 9 közötti számjegy, az operátor precedenciája (opcionális, alapértelmezés szerinti értéke 0). Nagyobb szám nagyobb precedenciát jelent (éppen fordítva, mint a Prologban!).

A beépített operátorok és precedenciájuk az SML-ben

Az alábbi táblázatban `wordint`, `num` és `numtxt` az alábbi típusnevek helyett állnak.

`wordint` = `int`, `word`, `word8`. `num` = `int`, `real`, `word`, `word8`.
`numtxt` = `int`, `real`, `word`, `word8`, `char`, `string`.

Prec.	*Operátor*	*Típus*	*Eredmény*	*Kivétel*
7	`*`	`num * num -> num`	szorzat	`Overflow`
	`/`	`real * real -> real`	hányados	`Div`, `Overflow`
	`div, mod`	`wordint * wordint -> wordint`	hányados, maradék	`Div`, `Overflow`
	`quot, rem`	`int * int -> int`	hányados, maradék	`Div`, `Overflow`
6	`+, -`	`num * num -> num`	összeg, különbség	`Overflow`
	`^`	`string * string -> string`	egybeírt szöveg	`Size`
5	`::`	`'a * 'a list -> 'a list`	elemmel bővített lista (jobbra köt)	
	`@`	`'a list * 'a list -> 'a list`	összefűzött lista (jobbra köt)	
4	`=, <>`	`''a * ''a -> bool`	egyenlő, nem egyenlő	
	`<, <=`	`numtxt * numtxt -> bool`	kisebb, kisebb-egyenlő	
	`>, >=`	`numtxt * numtxt -> bool`	nagyobb, nagyobb-egyenlő	
3	`:=`	`'a ref * 'a -> unit`	értékadás	
	`o`	`('b -> 'c) * ('a -> 'b) -> ('a -> 'c)`	a két függvény kompozíciója	
0	`before`	`'a * 'b -> 'a`	a bal oldali argumentum	

EGYSZERŰSÍTETT SML-SZINTAXIS

SML-szintaxis: szintaktikai kategóriák (egyszerűsítve)

- A nevek *szintaktikai kategóriákba* sorolhatók

vid	értéknév	value identifier	long
tyvar	típusváltozó	type variable	
tycon	típuskonstruktor	type constructor	long
lab	mezőnév	record label	
strid	struktúranév	structure identifier	long
sigid	szignatúranév	signature identifier	
unitid	állománynév	unit identifier	

- Az *értéknév* tetszőleges név; jelölhet állandó értéket, függvényértéket, adatkonstruktort, kivételkonstruktort. Példák: `pi`, `+`, `sin`, `nil`, `true`, `Match`
- A *típusváltozó* percjellel kezdődő alfanumerikus név. Példa: `'a`.
- A *típuskonstruktor* tetszőleges név; jelölhet típusállandót vagy típusfüggvényt. Példák: `int`, `order`, `*`, `->`, `list`
- A *mezőnév* tetszőleges név vagy (nem 0-val kezdődő) pozitív egész szám. Példák: `num`, `2`
- A *strid* tetszőleges név: SML-kódot tartalmazó „implementációs” modult (ún. SML-struktúrát) azonosít. A fájlnév-kiterjesztés célszerűen `.sml`, de ez nem kötelező. Példák: `Int.sml`, `Rat.ml`

SML-szintaxis: szintaktikai kategóriák (folyt.)

- A *sigid* tetszőleges név: SML-kódot tartalmazó „interfész”- modult (ún. SML-szignatúrát) azonosít. A fájlnév-kiterjesztés kötelezően `.sig`. Példák: `Int.sig`, `Rat.sig`.
- A *unitid* egy struktúra, ill. szignatúra lefordításával létrejövő, tárgykódot tartalmazó fájl neve. A fájlnév-kiterjesztés szignatúra esetén `.ui`, struktúra esetén `.uo`. Példák: `Int.ui`, `Rat.uo`.
- Minden, az előző felsorolásban „long”-gal megjelölt *X* szintaktikai kategóriának van egy *longX* párja. A *longX* szintaktikai kategóriába tartozó nevek rövid és hosszú (ún. minősített) alakban is felírhatók. A *rövid alak* csak egy névből, a *hosszú alak* egy hosszú struktúranévből, egy pontból és egy névből áll:

longx	::=	*x*	név	identifier
		longstrid.x	teljes név	qualified identifier

Példák:

- `explode`, `Misc.explode`
- `Real.toString`
- `Int.+`
- `List.filter`

SML-szintaxis: nemterminális szimbólumok, nyelvtani jelölések

- Minden nemterminális szimbólumot *változatok* sorozataként definiálunk, soronként egy változattal. Üres sor üres változatot jelent.
- A < és a > csúcsos zárójelpárok opcionális kifejezést fognak közre.
- Bármely *X* nemterminális szimbólumra az alábbiak szerint definiáljuk az *Xseq* nemterminális szimbólumot:

Xseq	::=	X	egyelemű sorozat	singleton sequence
			üres sorozat	empty sequence
		X_1 , . . . , X_n	sorozat, $n \geq 1$	sequence, $n \geq 1$

- A változatokat csökkenő prioritási sorrendben soroljuk föl.
- A változatokat számozzuk, a példákban utalunk az alkalmazott változatra.
- A függvénynevek és operátorok általában balra kötnek, az eltérést jelezzük.
- Minden ismétlődő konstrukció (pl. a *klózsorozat)* a lehető legmesszebb terjeszkedik jobbra. Ezért pl. egy `case`-kifejezést egy másik `case`- vagy `fn`-kifejezésen, valamint egy `fun`-definíción belül zárójelbe kell tenni.

SML-szintaxis: kifejezések és klózsorozatok (egyszerűsítve)

- Kifejezés (*exp:* expression)

(1)	*exp* ::=	*infexp*		
(2)		*exp* : *ty*	típusmegkötés	type constraint
(3)		`raise` *exp*	kivételjelzés	raise exception
(4)		`case` *exp* `of` *match*	esetszétválasztás	case analysis
(5)		`fn` *match*	függvénykifejezés	function expression

- Példák:

```
fn (n : int) => n;                                          vö. (2), (5)
case c of 00 => 01 | 01 => 11 | 11 => 10 | 10 => 00;        vö. (4), (19)
fn 00 => 01 | 01 => 11 | 11 => 10 | 10 => 00;               vö. (5), (19)
fn 00 => 01 | 01 => 11 | 11 => 10 | 10 => 00
                                | _ => raise Domain;  vö. (3), (5), (19)
```

SML-szintaxis: kifejezések és klózsorozatok (folyt.)

- Infix kifejezés (*infexp:* infix expression)

(6)	*infexp* ::=	*appexp*		
(7)		$infexp_1$ *id* $infexp_2$	infix alkalmazás	infixed application

- Applikatív kifejezés (*appexp:* applicative expression)

(8)	*appexp* ::=	*atexp*		
(9)		*appexp atexp*	(prefix) alkalmazás	(prefixed) application

- Példák:

`3 + 4;`	vö. (7)
`Real.toString 3.56;`	vö. (9)
`Int.toString(round 3.56);`	vö. (9), (17)

SML-szintaxis: kifejezések és klózsorozatok (folyt.)

- Atomi kifejezés (*atexp:* atomic expression)

(10)	*atexp* ::=	*scon*	különleges állandó	special constant
(11)		`<op>` *longvid*	értéknév	value identifier
(12)		`{`<*exprow*>`}`	rekord	record
(13)		`#` *lab*	rekordszelektor	record selector
(14)		`(`exp_1 `,` exp_2`)`	pár	pair
(15)		`()`	nullas	0-tuple
(16)		`[`exp_1`,` ... `,` exp_n`]`	lista, $n \geq 0$	list, $n \geq 0$
(17)		`(`*exp*`)`	kifejezés zárójelben	parenthesized expr.

- Példák:

`1.12`, `#"Z"`, `0w123`	vö. (10)
`Math.pi`, `false`, `Math.sin`, `sin`	vö. (11)
`#den {num=1, den=2}`	vö. (12), (13), (18)
`(2, 3.5)`, `()`, `[1, 2, 3]`	vö. (14), (15), (16)

SML-szintaxis: kifejezések és klózsorozatok (folyt.)

- Kifejezéssor (*exprow:* expression row)

(18) *exprow* ::= *lab* = *exp* <`,` *exprow*>

- Klózsorozat (*match*)

(19) *match* ::= *mrule* <| *match*>

- Klóz (*mrule:* match rule)

(20) *mrule* ::= *pat* => *exp*

- Példák:

```
num=1, den=2
00 => 01 | 01 => 11 | 11 => 10 | 10 => 00
```

vö. (18)

vö. (19), (20)

SML-szintaxis: deklarációk és kötések

- Deklaráció (*dec:* declaration)

(20)	*dec* ::=	`val` *tyvarseq valbind*	értékdeklaráció	value declaration
(21)		`fun` *tyvarseq fvalbind*	függvénydeklaráció	function declaration
(22)		`type` *tyvarseq typbind*	típusdeklaráció	type declaration
(23)			üres deklaráció	empty declaration
(24)		dec_1 <`;`> dec_2	deklaráció-sorozat	sequential declaration
(25)		`infix` <*d*> $id_1 \ldots id_n$	infix-direktíva, $n \geq 1$	infix (left) directive
(26)		`infixr` <*d*> $id_1 \ldots id_n$	infixr-direktíva, $n \geq 1$	infix (right) directive
(27)		`nonfix` $id_1 \ldots id_n$	nonfix-direktíva, $n \geq 1$	nonfix directive

- Példák:

`val xy = "XY"; fun ++ x y = x ^ y`	vö. (20), (21), (24)
`type Rat = {num : int, den : int}`	vö. (22)
`infixr 4 ++; fun x ++ y = x ^ y`	vö. (21), (26)

SML-szintaxis: deklarációk és kötések (folyt.)

- Értékkötés (*valbind:* value binding)

(28)	*valbind* ::=	*pat* = *exp* <`and` *valbind*>	értékkötés	value binding
(29)		`rec` *valbind*	rekurzív kötés	recursive binding

- Függvényérték-kötés (*fvalbind:* function value binding)

(30) *fvalbind* ::= <`op`> *var* $atpat_{11} \ldots atpat_{1n}$ <`:`*ty*> = exp_1 | $m, n \geq 1$
| <`op`> *var* $atpat_{21} \ldots atpat_{2n}$ <`:`*ty*> = exp_2
| $\ldots$
| <`op`> *var* $atpat_{m1} \ldots atpat_{mn}$ <`:`*ty*> = exp_m
<`and` *fvalbind*>

Megjegyzés: Ha *var* infix, akkor egy *fvalbind* definícióban vagy infix helyzetben kell használni, vagy elé kell írni az `op` direktívát; azaz a definícióban a bal oldalon `(`*atpat var atpat'*`)` vagy `op` *var* `(`*atpat*`,` *atpat'*`)` írható. A zárójelek elhagyhatók, ha *atpat'* után közvetlenül `:`*ty* vagy = áll.

- Példák:

```
val even = fn 0 => true  | x => not(odd(x-1))
and odd = fn 0 => false | y => not(even(y-1));   vö. (28)
fun (f o g) x = g(f x);                          vö. (30)
```

LISTÁK RENDEZÉSE

Listák rendezése (folyt.)

- `inssort` (beszúró rendezés),
- `selSort` (kiválasztó rendezés),
- `quicksort` (gyorsrendezés),
- `tmsort` (felülről lefelé haladó összefésülő rendezés),
- **`bmsort` (alulról felfelé haladó összefésülő rendezés),**
- **`smsort` (simarendezés).**

Összefésülő rendezések (folyt.)

- Az összefésülő rendezéshez kell egy olyan függvény, amely két listát növekvő sorrendben egyesít. Korábban már definiáltuk a `merge` függvényt.

```
(* merge(xs, ys) = xs és ys elemeinek <= szerint
                   egyesített listája
   merge : int list * int list -> int list
*)
fun merge (xxs as x::xs, yys as y::ys)=
      if x <= y
      then x::merge(xs, yys)
      else y::merge(xxs, ys)
  | merge ([], ys) = ys
  | merge (xs, []) = xs
```

- Korlátot jelent, ha a részeredményeket a veremben tároljuk.
- Akkumulátor használata esetén meg kell fordítani az eredménylistát.

Alulról fölfelé haladó összefésülő rendezés

- Az alulról fölfelé haladó összefésülő rendezés *(bottom-up merge sort)* legegyszerűbb változata az eredeti k hosszúságú listát k darab egyelemű listára bontja, majd a szomszédos listákat összefuttatja, így 2, 4, 8, 16 stb. elemű listákat állít elő.
- R. O´Keefe algoritmusa (1982) lépésről lépésre futtatja össze az egyforma hosszú részlistákat, de csak az utolsó lépésben rendezi az összeset. Az alábbi példában az összefuttatott részlistákat *egymás mellé írással* jelöljük:

```
A B C D E F G H I J K
AB  C D E F G H I J K
AB  CD  E F G H I J K
ABCD    E F G H I J K
ABCD    EF  G H I J K
ABCD    EF  GH  I J K
ABCD    EFGH    I J K
ABCDEFGH        I J K
ABCDEFGH        IJ  K
...
```

Alulról fölfelé haladó összefésülő rendezés (folyt.)

- `bmsort` a `sorting` segédfüggvényt használja, amelynek
  - első argumentuma a rendezendő lista,
  - második argumentuma a már rendezett részlisták akkumulátora,
  - harmadik argumentuma az adott lépésben összefuttatandó elem sorszáma.

```
(* bmsort xs = az xs elemeinek a <= reláció szerint
               rendezett listája
   bmsort : int list -> int list
*)
fun bmsort xs = sorting(xs, [], 0)
```

Alulról fölfelé haladó összefésülő rendezés (folyt.)

- Ha a rendezendő lista (`xs`) még nem fogyott el, soron következő eleméből `sorting` egyelemű listát (`[x]`) képez, és ezt a már rendezett részlisták listája (`lss`) elé fűzve meghívja a `mergepairs` segédfüggvényt. `mergepairs` az argumentumként átadott lista két azonos hosszúságú bal oldali részlistáját fűzi egybe, feltéve persze, hogy vannak ilyenek. `k` az éppen átadott elem sorszáma. Ha a rendezendő lista kiürült, `sorting` a kétszintű lista egyetlen elemét, a rendezett listát adja eredményül.

```
(* sorting(xs, lss, k) = a még rendezetlen xs lista elemeit
                         berakja a rendezett részlisták összesen
                         már k elemet tartalmazó lss listájába
   sorting : int list * int list list * int -> int list
   PRE: k >= 0
*)
fun sorting (x::xs, lss, k) =
            sorting(xs, mergepairs([x]::lss, k+1), k+1)
  | sorting ([], lss, k) = hd(mergepairs(lss, 0))
```

Alulról fölfelé haladó összefésülő rendezés (folyt.)

- `mergepairs` egyetlen listában gyűjti a már összefuttatott részlistákat. Az éppen átadott elem `k` sorszámából dönti el, hogy mit kell csinálnia a következő részlistával.

```
(* mergepairs(llss, n)= az n elemet tartalmazó, már
              rendezett llss lista első két részlistáját,
              ha egyforma a hosszuk, összefuttatja
   mergepairs : int list list -> int list list
   PRE: n >= 0
*)
fun mergepairs (llss as ls1::ls2::lss, n) =
      (* legalább kételemű a lista *)
      if n mod 2 = 1
      then llss
      else mergepairs(merge(ls1, ls2)::lss, n div 2)
  | mergepairs (lss, _) = lss (* egyelemű a lista *)
```

- Ha `n` páratlan, `mergepairs` a listát változtatás nélkül adja vissza, ha páros, akkor az `llss` lista elején álló két, egyforma hosszú listát egyetlen rendezett listává futtatja össze. `n=0`-ra `mergepairs` az összes listák listáját olyan listává futtatja össze, amelynek egyetlen eleme maga is lista.

Alulról fölfelé haladó összefésülő rendezés (folyt.)

- A legrosszabb esetben $O(n \cdot log\, n)$ lépésre van szükség.
- A függvények működését egy példán is bemutatjuk. A kezdőhívás legyen

```
bmsort [1,2,3,4,5,6,7,8,9]
    ---> sorting ([1,2,3,4,5,6,7,8,9], [], 0)
```

- Amíg `sorting` első argumentuma a nem üres `(x::xs)` lista, `sorting` saját magát hívja meg. A rekurzív hívás
  - első argumentuma a lépésenként egyre rövidülő `xs` lista,
  - második argumentuma a `mergepairs([x]::lss, k+1)` függvényalkalmazás eredménye, ahol kezdetben `lss = []`,
  - harmadik argumentuma (`k+1`) a már feldolgozott listaelemek száma.

```
fun sorting (x::xs, lss, k) =
            sorting(xs, mergepairs([x]::lss, k+1), k+1)
  | sorting ([], lss, k) = hd(mergepairs(lss, 0))
```

Alulról fölfelé haladó összefésülő rendezés (folyt.)

- A következő táblázatos elrendezés
  - `mergepairs` mindkét argumentumát,
  - a rekurzív `sorting` hívás itt `j`-vel jelölt 3. argumentumát, `k+1`-et, és
  - bináris számként `k`-t mutatja lépésről lépésre.
- A `sorting` függvény hívja `mergepairs`-t azokban a sorokban, amelyekben a `j` új értéket vesz föl, a többi helyen `mergepairs` hívása rekurzív.
- Ne feledjük, hogy `mergepairs`-nek listák listája az első argumentuma!
- A táblázat utolsó oszlopa a vonatkozó magyarázatra hivatkozik.
- Vegyük észre, hogy kapcsolat van az `llss` első eleme utáni listaelemek hossza és a `k` bitjei között! Ha `k` valamelyik bitje 1, akkor (balról jobbra haladva) az `llss` megfelelő listaelemének a hossza az adott bit helyiértékével egyenlő. A 0 értékű biteknek megfelelő listaelemek „hiányoznak” `llss`-ből.

```
fun sorting (x::xs, lss, k) =
            sorting(xs, mergepairs([x]::lss, k+1), k+1)
  | sorting ([], lss, k) = hd(mergepairs(lss, 0))
```

Alulról fölfelé haladó összefésülő rendezés (folyt.)

llss	n	j	k	
[[1]]	1	1	0	m1
[[2],[1]]	2	2	1	m2
[[1,2]]	1			m3
[[3],[1,2]]	3	3	10	m3
[[4],[3],[1,2]]	4	4	11	m2
[[3,4],[1,2]]	2			m2
[[1,2,3,4]]	1			m3
[[5],[1,2,3,4]]	5	5	100	m3
[[6],[5],[1,2,3,4]]	6	6	101	m2
[[5,6],[1,2,3,4]]	3			m3
[[7],[5,6],[1,2,3,4]]	7	7	110	m3
[[8],[7],[5,6],[1,2,3,4]]	8	8	111	m2
[[7,8],[5,6],[1,2,3,4]]	4			m2
[[5,6,7,8],[1,2,3,4]]	2			m2
[[1,2,3,4,5,6,7,8]]	1			m3
[[9],[1,2,3,4,5,6,7,8]]	9	9	1000	m3
[[9],[1,2,3,4,5,6,7,8]]	0	0		m4
[[1,2,3,4,5,6,7,8,9]]				

```
fun sorting (x::xs, lss, k) =
      sorting(
             xs,
             mergepairs([x]::lss, k+1),
             k+1
             )
  | sorting ([], lss, k) =
      hd(mergepairs(lss, 0))
```

m1: Az argumentumként átadott listának egyetlen eleme van (maga is lista), ezért az argumentumot mergepairs második klóza változtatás nélkül visszaadja az őt hívó `sorting`-nak.

m2: `n` páros, ez azt jelzi, hogy az argumentumként átadott lista első két eleme egyforma hosszú lista, amelyeket `merge` egyetlen rendezett listává futtat össze, majd az eredménnyel `mergepairs` első klóza meghívja saját magát.

m3: `n` páratlan, ez azt jelzi, hogy az argumentumként átadott lista első két eleme nem egyforma hosszú lista, ezért az argumentumot `mergepairs` első klóza változtatás nélkül visszaadja az őt hívó `sorting`-nak.

m4: `n=0`, az összes listák listáját olyan listává kell összefuttatni, amelynek egyetlen lista az eleme.

Simarendezés

- Az applikatív simarendezés (*smooth sort)* algoritmusa O'Keefe alulról fölfelé haladó rendezéséhez hasonló, de nem egyelemű listákat, hanem növekvő *futamokat* állít elő.
- Ha a futamok száma n-től független, azaz a lista majdnem rendezve van, akkor az algoritmus végrehajtási ideje $O(n)$, és a legrosszabb esetben is legfeljebb csak $O(n \cdot log\, n)$.

```
(* nextrun (run, xs) = olyan pár, amelynek első tagja xs egy
                       növekvő sorrendű futama, második tagja
                       pedig xs maradéka
   nextrun : int list * int list -> int list * int list
*)
fun nextrun (run, x::xs) =
      if x < hd run
      then (rev run, x::xs)
      else nextrun(x::run, xs)
  | nextrun (run, []) = (rev run, [])
```

- `nextrun` eredménye egy pár, amelynek első tagja a futam (egy növekvő számsorozat), a második tagja pedig a rendezendő lista maradéka.
- A futam csökkenő sorrendben bővül, kilépéskor a futamot meg kell fordítani.

Simarendezés (folyt.)

- `smsorting` a futamokat ismételten előállítja és összefuttatja:

```
(* smsorting(xs, lss, k) = a még rendezetlen xs lista elemeit
                           berakja a rendezett részlisták összesen
                           már k elemet tartalmazó lss listájába
   smsorting : int list * int list list * int -> int list
   PRE: k >= 0
*)
fun smsorting (x::xs, lss, k) =
         let val (run, tail) = nextrun([x], xs)
         in smsorting(tail, mergepairs(run::lss, k+1), k+1)
         end
  | smsorting ([], lss, k) = hd(mergepairs(lss, 0))
```

- ```
  (* smsort xs = az xs elemeinek <= szerint rendezett listája
     smsort : int list -> int list
  *)
  fun smsort xs = smsorting(xs, [], 0)
  ```

- A simarendezés egy változata `sort` néven megtalálható a `Listsort` könyvtárban.
  ```

A futási idők összehasonlítása

```
fun futIdo2 (sort, sortFn) (xs, kind) =
      let val starttime = Timer.startCPUTimer()
          val zs = sort xs
          val usr=tim,... = Timer.checkCPUTimer starttime
      in  "Int sort with " ^ sortFn ^ ", length = " ^ Int.toString(length xs) ^
          " (" ^kind ^ "), time = " ^ Time.fmt 2 tim ^ " sec\n"
      end

val t101 = futIdo2 (tmsort, "tmsort")
             ((Random.rangelist (1, 100000) (100000, Random.newgen())), "random");
val t102 = futIdo2 (bmsort, "bmsort")
             ((Random.rangelist (1, 100000) (100000, Random.newgen())), "random");
val t103 = futIdo2 (smsort, "smsort")
             ((Random.rangelist (1, 100000) (100000, Random.newgen())), "random")

Int sort with tmsort, length = 100000 (random), time = 10.96 sec
Int sort with bmsort, length = 100000 (random), time = 7.69 sec
Int sort with smsort, length = 100000 (random), time = 7.70 sec
Int sort with quicksort2, Int.compare,
                      length = 100000 (random), time = 11.98 sec
Int sort with Listsort.sort, Int.compare,
                      length = 100000 (random), time = 14.17 sec
```

EGYSZERŰSÍTETT SML-SZINTAXIS

SML-szintaxis: típuskifejezések

- Típus (*ty:* type)

(31)	*ty* ::=	*tyvar*	típusváltozó	type variable
(32)		*tycon*	típuskonstruktor	type constructor
(33)		`{` <*tyrow*> `}`	rekordtípus-kifejezés	record type expression
(34)		ty_1 `*` ty_2	pár-típus	pair type
(35)		ty_1 `->` ty_2	függvénytípus-kifejezés	function type expression
(36)		`(` *ty* `)`	típus zárójelben	parenthesized type

- Típuskifejezés-sor (*tyrow:* type-expression row)

(37) *tyrow* ::= *lab* `:` *ty* <`,` *tyrow*>

- Példák:

`'a`, `'c`, `'gamma`	vö. (31)
`int`, `real`, `word`, `word8`, `char`, `bool`, `string`, `order`	vö. (32)
`int * int -> int`, `unit -> unit`	vö. (34), (35)
`('a -> 'b) -> ('a list -> 'b list)`	vö. (35), (36)
`{num : int, den : int}`, `num : int, den : int`	vö. (33), (37)

SML-szintaxis: minták

- Atomi minta (*atpat:* atomic pattern)

(38)	*atpat* ::=	_	mindenesjel	wildcard
(39)		*scon*	különleges állandó	special constant
(40)		<`op`> *longvid*	értéknév	value identifier
(41)		`{` <*patrow*> `}`	rekord	record
(42)		`(`pat_1 `*` pat_2`)`	pár	pair
(43)		`()`, `{}`	nullas	0-tuple
(44)		`[`pat_1`,` ...`,` pat_n`]`	lista, $n \geq 0$	list, $n \geq 0$
(45)		`(` *pat* `)`	minta zárójelben	parenthesized pattern

- Példák:

```
fun le GREATER = false | le EQUAL = true | le LESS = true;         vö. (40)
fun le GREATER = false | le _ = true;                              vö. (38), (40)
fun neg Bool.false = true | neg (true) = Bool.false;               vö. (40), (45)
fun prod [a, b] = a*b | prod [a, b, c] = a*b*c
  | prod [a] = a | prod () = 1;                                    vö. (43), (44)
```

SML-szintaxis: minták (folyt.)

- Mintasor (*patrow:* pattern row)

(46)	*patrow* ::=	`...`	mindenesjel	wildcard
(47)		*lab* = *pat* <`,` *patrow*>	mintasor	pattern row
(48)		*lab* <`:` *ty*> <`,` *patrow*>	mezőnév mint változó	label as variable

- Példák:

```
fun // {den = 0, ...} = raise Domain
  | // {num = n, den = d} = (real n) / (real d);  vö. (46), (47)
fun // {den = 0, ...} = raise Domain
  | // {num, den} = (real num) / (real den);      vö. (46), (48)
```

SML-szintaxis: minták (folyt.)

- Minta (*pat:* pattern)

(49)	*pat* ::=	*atpat*	atomi minta	atomic pattern
(50)		`<op>` *longvid* *atpat*	értékkonstrukció	value construction
(51)		pat_1 *vid* pat_2	infix értékkonstrukció	infixed value constr.
(52)		*pat* `:` *ty*	minta típusmegkötéssel	typed pattern
(53)		`<op>` *var* `<:` *ty*`>` `as` *pat*	réteges minta	layered pattern

- Példa:

```
fun sum [] = 0                                        vö. (50)
  | sum [a : real] = a                                vö. (52)
  | sum (x::z::(yxs as y::xs)) = x + z + sum yxs      vö. (51), (53)
  | sum (x::y::xs) = x + y + sum xs                   vö. (51)
  | sum (op::(x, xs)) = x + sum xs                    vö. (50)
```

SML-szintaxis: szintaktikai korlátozások

- Nem illeszthető minta kétszer ugyanarra a névre *(vid)*. Nem illeszthető kifejezéssor, mintasor vagy típuskifejezés-sor kétszer ugyanarra a mezőnévre *(lab)*.
- Ugyanaz a név nem köthető le kétféleképpen egy *valbind, typbind, datbind* vagy *exbind* deklarációban. A *datbind* deklarációban ugyanez érvényes az adatkonstruktorokra is.
- Ugyanaz a típusváltozó *(tyvar)* nem szerepelhet kétszer egy *tyvarseq* sorozatban valamely *typbind* vagy *datbind* deklaráció bal oldali *tyvarseq tycon* részében. Minden olyan típusváltozónak *(tyvar),* amelyik előfordul a jobb oldalon, szerepelnie kell *tyvarseq*-ben.
- A `rec`-et követő minden *pat* = *exp* értékkötésben az *exp*-nek, szükség esetén zárójelben, `fn` *match* alakúnak kell lennie, ahol egy vagy több névhez típusmegkötés is társítható.
- `true`, `false`, `nil`, `::` és `ref` nem kaphat értéket *valbind, datbind* vagy *exbind*, `it` pedig *datbind* vagy *exbind* deklarációban.

AZ SML MODULNYELVE

Modulok

Mi a modul?

- fordítási egység
- a *csoportosítás* és az *elrejtés*, azaz az *absztrakció* eszköze

Modulok az SML-ben

- Szignatúra (`signature`): specifikációs modul; a struktúra *specifikációja*, *„típusa”*.
- Struktúra (`structure`): implementációs modul; a szignatúra *megvalósítása*.
- Funktor (`functor`): generikus, azaz *struktúrával* paraméterezhető modul; eredménye is egy *struktúra*.

Egy struktúra akkor és csak akkor valósít meg egy szignatúrát, ha a struktúra kielégíti a szignatúra által támasztott összes követelményt. (Később pontosítjuk.)

Szignatúra és struktúra

A szignatúra alapváltozata

`sig` *`specs`* `end` alakú *szignatúrakifejezés,*

ahol a *`specs`* specifikációsorozat az alábbi elemeket tartalmazhatja:

- típusspecifikáció `type (`*`tyvar`*$_1$`, ..., `*`tyvar`*$_n$`)` *`tycon`* `[ =` *`typ`* `]` alakban, ahol *`typ`* opcionális;
- adattípus-specifikáció (a `datatype`-deklarációval azonos alakban);
- kivételspecifikáció `exception` *`excon`* `of` *`typ`* alakban;
- értékspecifikáció `val` *`id`* `:` *`typ`* alakban.

A struktúra alapváltozata

`struct` *`decs`* `end` alakú *struktúrakifejezés,*

ahol a *`decs`* deklarációsorozat az alábbi elemeket tartalmazhatja:

- típuskonstruktort létrehozó típusdeklaráció;
- új (felhasználói) adattípust létrehozó adattípus-deklaráció (`datatype`-deklaráció);
- kivételkonstruktort (állandót vagy függvényt) létrehozó kivételdeklaráció;
- megadott típusú új nevet (névkonstruktort) létrehozó értékdeklaráció.

Szignatúra és struktúra (folyt.)

A szignatúra-deklaráció

- `signature` *`sigid`* `=` *`sigexp`* alakú, ahol
  - *`sigid`* egy szignatúranév,
  - *`sigexp`* pedig egy szignatúrakifejezés.
- A szignatúranév a szignatúrakifejezés rövidítése, szinonimája.

A struktúra-deklaráció egyszerű változata

- `structure` *`strid`* `=` *`strexp`* alakú, ahol
  - *`strid`* egy struktúranév,
  - *`strexp`* pedig egy struktúrakifejezés.
- A struktúranév a struktúrakifejezés rövidítése, szinonimája.

A struktúra-deklaráció bonyolultabb változata

- struktúra szignatúrához kötése; amely kétféle lehet:
  - áttetsző (opál, opaque): `structure` *`strid`* `:>` *`sigid`* `=` *`strexp`*
  - átlátszó (transzparens, transparent): `structure` *`strid`* `:` *`sigid`* `=` *`strexp`*

Példa: a `KCsiga` és a `Csiga` szignatúra

- A `KCsiga` struktúra (a keretprogram) szignatúrája

```
signature KCsiga =
sig
  val csigaBe : string -> TCsiga.feladvanyleiro
  val csigaKi : string * TCsiga.csigatabla list -> unit
  val megold  : string * string -> string
end
```

- A `Csiga` struktúra (a főmodul) szignatúrája

```
signature Csiga =
sig
  val buvosCsiga :
        TCsiga.feladvanyleiro -> TCsiga.csigatabla list
end
```

Mindkét szignatúra csupán `val` *`id`* `:` *`typ`* alakú *értékspecifikációkat* tartalmaz.

Példa: a `TCsiga` struktúra és törzsszignatúrája

- A `TCsiga` struktúra (a típusleíró modul) és *törzsszignatúrája*

```
structure TCsiga =
struct
  type meret          = int
  type ciklus         = int
  type sorszam        = int
  type oszlopszam     = int
  type ertek          = int
  type adottElem      =
    sorszam * oszlopszam * ertek

  type feladvanyleiro =
    meret * ciklus * adottElem list

  type ertekVagyUres  = int
  type sor            =
    ertekVagyUres list

  type csigatabla     =
    sor list
end
```

```
(* TCsiga.sml
   törzsszignatúrája *)
type meret          = int
type ciklus         = int
type sorszam        = int
type oszlopszam     = int
type ertek          = int
type adottElem      =
  int * int * int

type feladvanyleiro =
  int * int * (int * int * int) list

type ertekVagyUres  = int
type sor            =
  int list

type csigatabla     =
  int list list
```

Példa: a `TCsiga` struktúra és törzsszignatúrája (folyt.)

- *Törzsszignatúra* (principal signature): egy struktúra összetevőinek legspecifikusabb leírása.
- `TCsiga` csupa típusspecifikációt tartalmaz

  `type (`tyvar_1`, ...,` tyvar_n`)` *tycon* `[ =` *typ* `],`

  pontosabban

  `type` *tycon* `=` *typ*

  alakban.
- Egy struktúra szignatúra-megkötés nélkül nem rejti el a részleteket, azaz *gyenge absztrakciót* valósít meg.

Példa: változatok a `TCsiga` struktúrára és szignatúrára

- Struktúra *átlátszó* szignatúrával

```
structure TCsiga : TCsiga =
struct
  type meret           = int
  ...
  type adottElem       =
       sorszam * oszlopszam * ertek
  type feladvanyleiro =
       meret * ciklus * adottElem list
  type ertekVagyUres   = int
  type sor             =
       ertekVagyUres list
  type csigatabla      = sor list
end
```

- Struktúra *áttetsző* szignatúrával

```
structure TCsiga :> TCsiga =
struct
  type meret           = int
  ...
  type adottElem       =
       sorszam * oszlopszam * ertek
  type feladvanyleiro =
       meret * ciklus * adottElem list
  type ertekVagyUres   = int
  type sor             =
       ertekVagyUres list
  type csigatabla      = sor list
end
```

- Szignatúra (a részleteket *elrejtő)* absztrakt adattípus megvalósításához

```
signature TCsiga =
sig
    type feladvanyleiro
    type csigatabla
end
```

AZ SML MODULNYELVE

Példa: sort megvalósító szignatúra és struktúra

```
signature QUEUE =
sig
    type 'a queue                                típusspecifikáció
    exception Empty                              kivételspecifikáció
    val empty : 'a queue                         értékspecifikációk
    val insert : 'a * 'a queue -> 'a queue
    val remove : 'a queue -> 'a * 'a queue       Minden típus és érték polimorf!
end

structure Queue_as_lists =
struct
    type 'a queue = 'a list * 'a list            típuskonstruktor deklarálása
    exception Empty                              kivételkonstruktor deklarálása
    val empty = (nil, nil)                       névkonstruktorok deklarálása
    fun insert (x, (bs, fs)) = (x::bs, fs)
    fun remove (nil, nil) = raise Empty
      | remove (bs, nil) = remove (nil, rev bs)
      | remove (bs, f::fs) = (f, (bs, fs))
end
```

Példa: sort megvalósító szignatúra és struktúra (folyt.)

- Struktúra áttetsző szignatúrával

```
structure Queue_as_lists
            :> QUEUE =
struct
  type 'a queue =
         'a list * 'a list
  exception Empty
  val empty = (nil, nil)
  fun insert (x, (bs, fs)) =
        (x::bs, fs)
  fun remove (nil, nil) =
        raise Empty
    | remove (bs, nil) =
        remove(nil, rev bs)
    | remove (bs, f::fs) =
        (f, (bs, fs))
end
```

- Struktúra átlátszó szignatúrával

```
structure Queue_as_lists
             : QUEUE =
struct
  type 'a queue =
         'a list * 'a list
  exception Empty
  val empty = (nil, nil)
  fun insert (x, (bs, fs)) =
        (x::bs, fs)
  fun remove (nil, nil) =
        raise Empty
    | remove (bs, nil) =
        remove(nil, rev bs)
    | remove (bs, f::fs) =
        (f, (bs, fs))
end
```

Példa: sort megvalósító szignatúra és struktúra (folyt.)

- Struktúra *bővített* áttetsző szignatúrával

```
structure Queue_as_lists :>
            QUEUE where type 'a queue = 'a list * 'a list =
struct type 'a queue = 'a list * 'a list
       exception Empty
       val empty = (nil, nil)
       fun insert (x, (bs, fs)) = (x::bs, fs)
       fun remove (nil, nil) = raise Empty
         | remove (bs, nil) = remove(nil, rev bs)
         | remove (bs, f::fs) = (f, (bs, fs))
end
```

- Áttetsző szignatúra-kötésnél a típusok megvalósítása rejtve marad, vagyis a *látható szignatúra* **független** a struktúra megvalósításától (pl. `type 'a queue = 'a queue`);
- átlátszó szignatúra-kötésnél a típusok megvalósítása láthatóvá válik, vagyis a *látható szignatúra* **függ** a struktúra megvalósításától (pl. `type 'a queue = 'a list * 'a list`).
- A megvalósítástól független modulrendszer kialakításához áttetsző szignatúra-kötést kell alkalmazni. Ezt garantálja az `mosmlc` fordító `structure`-módban.

Példa: sort megvalósító szignatúra és struktúra (folyt.)

- Szignatúra-öröklődés specializációval, 1. változat

```
signature QUEUE_AS_LISTS =
    QUEUE where type 'a queue = 'a list * 'a list
```

- Szignatúra-öröklődés specializációval, 2. változat (ekvivalens az 1. változattal)

```
signature QUEUE_AS_LISTS =
sig
    include QUEUE
end where type 'a queue = 'a list * 'a list
```

- Struktúra áttetsző szignatúrával

```
structure Queue_as_lists :> QUEUE_AS_LISTS =
struct
    type 'a queue = 'a list * 'a list
    exception Empty
    val empty = (nil, nil)
    fun insert (x, (bs, fs)) = (x::bs, fs)
    fun remove (nil, nil) = raise Empty
      | remove (bs, nil) = remove (nil, rev bs)
      | remove (bs, f::fs) = (f, (bs, fs))
end
```

Példa: sort megvalósító szignatúra és struktúra (folyt.)

- Szignatúra-öröklődés inklúzióval (és az eredeti szignatúra bővítésével)

```
signature QUEUE_AS_LISTS_WITH_EMPTY =
sig
    include QUEUE
    val is_empty : 'a queue -> bool
end where type 'a queue = 'a list * 'a list
```

- Struktúra-öröklődés (hibás: a `Q`-beli nevek rövid változata nem látszik `Queue_as_listsWithEmpty`-ben, pedig specifikálva vannak `Queue_as_lists`-ben)

```
structure Queue_as_listsWithEmpty :> QUEUE_AS_LISTS_WITH_EMPTY =
struct
   structure Q = Queue_as_lists :
                       QUEUE where type 'a queue = 'a list * 'a list
end
```

- Struktúra-öröklődés (hibás: `val 'a is_empty :  'a list * 'a list -> bool` nincs deklarálva `Queue_as_lists`-ben)

```
structure Queue_as_listsWithEmpty :> QUEUE_AS_LISTS_WITH_EMPTY =
struct
    structure Q = Queue_as_lists
    open Q
end
```

Példa: sort megvalósító szignatúra és struktúra (folyt.)

- Struktúra-öröklődés

```
structure Queue_as_listsWithEmpty :> QUEUE_AS_LISTS_WITH_EMPTY =
struct  structure Q = Queue_as_lists
        open Q
        fun is_empty (nil, nil) = true | is_empty _ = false
end
```

- Struktúra-öröklődés, ekvivalens az előzővel

```
structure Queue_as_listsWithEmpty :> QUEUE_AS_LISTS_WITH_EMPTY =
struct  structure Q : QUEUE_AS_LISTS = Queue_as_lists
        open Q
        fun is_empty (nil, nil) = true | is_empty _ = false
end
```

- Struktúra-öröklődés, ekvivalens az előzővel

```
structure Queue_as_listsWithEmpty :> QUEUE_AS_LISTS_WITH_EMPTY =
struct  structure Q = Queue_as_lists : QUEUE_AS_LISTS
        open Q
        fun is_empty (nil, nil) = true | is_empty _ = false
end
```

Modulfogalmak és elnevezések

- Eddig kétféle modulkonstrukcióval foglalkoztunk, a szignatúrával és a struktúrával:
  - szignatúra (`signature`): a struktúra *specifikációja*, *„típusa”*,
  - struktúra (`structure`): a szignatúra *megvalósítása*.
- Az SML egy harmadik modulkonstrukciót is ismer, a funktort (`functor`):
  - olyan generikus konstrukció, amelynek *struktúra* a paramétere (és az eredménye is);
  - akkor használjuk, amikor a polimorfizmus kevés újrafelhasználható algoritmusok írásához.
- Az MOSML további két elnevezést használ (ld. *Moscow ML Language Overview):*
  - modul *(module):* a struktúra és a funktor *közös* megnevezése;
  - (fordítási, ill. lefordított) *egység* (compilation, ill. compiled *unit):* egy struktúra vagy szignatúra lefordítható, ill. lefordított (tárgykódú) változata.
- Állománynév-kiterjesztések
  - `.sml` (SML, opcionális): struktúra vagy funktor,
  - `.sig` (SML, kötelező): szignatúra,
  - `.ui` (MOSML, kötelező): szignatúra lefordított változata (unit interface code),
  - `.uo` (MOSML, kötelező): struktúra lefordított változata (unit object code).

Szignatúra-illeszkedés

- Mikor tekinthető egy struktúra egy szignatúra megvalósításának?

  Akkor, ha a struktúra *az összes olyan komponenst definiálja* és az *összes olyan típusdefiníciót kielégíti,* amelyeket a szignatúra elvár. Másszóval definiálja a szignatúrában megadottal

  - ekvivalens típusú *kivételkomponenseket,*
  - kompatíbilis (azaz legalább annyira általános) típusú *értékkomponenseket,*
  - azonos aritású (paraméterszámú) és – ha definiálja – ekvivalens definíciójú *típuskomponenseket.*

- Csakhogy egy struktúra a szignatúrájához képest, többek között

  - *több komponenst* definiálhat;
  - *általánosabb típusú értékeket* definiálhat (ami az újrafelhasználást segíti elő);
  - `datatype`-*deklarációt* használhat `type`-deklaráció helyett, *értékkonstruktort* definiálhat érték helyett (ami az adatabsztrakciót teszi lehetővé);
  - a *deklarációk sorrendje* tetszőleges lehet (ami növeli a flexibilitást).

- A feltett kérdésre ezért pontosabb a következő válasz:

  Egy struktúra akkor és csak akkor tekinthető egy szignatúra megvalósításának, ha a struktúra ún. *törzsszignatúrája* illeszkedik az adott szignatúrára.

Törzstípus, törzsszignatúra

- Egy érték *törzstípusa* (principal type) az adott értékhez rendelhető *legáltalánosabb* típus.
- Minden jóldefiniált értéknek van törzstípusa.
  Pl. ha `fun I x = x`, akkor `I : 'a -> 'a`.
- Egy struktúra *törzsszignatúrája* (principal signature) a komponenseihez rendelhető *legspecifikusabb* leírás.
- Minden jóldefiniált struktúrának van törzsszignatúrája.
- A típusellenőrzéshez elegendő a törzsszignatúra ismerete, a struktúrát magát nem kell vizsgálni.
- Egy struktúra törzsszignatúrája a következőképpen állítható elő: ha a deklaráció
  - `type (`*tyvar*$_1$`, ..., `*tyvar*$_n$`)` *tycon* `=` *typ* alakú, akkor a törzsszignatúra az ezzel azonos specifikációt tartalmazza;
  - `datatype (`*tyvar*$_1$`, ..., `*tyvar*$_n$`)` *tycon* `=` *con*$_1$ `of` *typ*$_1$ `| ... |` *con*$_k$ `of` *typ*$_k$ alakú, akkor a törzsszignatúra az ezzel azonos specifikációt tartalmazza;
  - `exception` *id* `of` *typ* alakú, akkor a törzsszignatúra az ezzel azonos specifikációt tartalmazza;
  - `val` *id* `=` *exp* alakú, akkor a törzsszignatúra a `val` *id* `:` *typ* specifikációt tartalmazza, ahol *typ* az *exp* kifejezés törzstípusa.

Szignatúra-illeszkedés (folyt.)

- Egy *szignatúra-jelölt* (candidate signature) akkor és csak akkor illeszkedik egy *célszignatúrára* (target signature), ha az összes olyan komponenst és típusdefiníciót tartalmazza, amelyet a *célszignatúra* specifikál.
- Pontosabban, a szignatúra-jelöltnek tartalmaznia kell a célszignatúra
  - összes típuskonstruktorát, mégpedig azonos aritással (paraméterszámmal) és – ha definiálja – ekvivalens definícióval;
  - összes `datatype`-deklarációját, mégpedig úgy, hogy az adatkonstruktoroknak ekvivalens típusúaknak kell lenniük;
  - összes `exception` deklarációját, mégpedig úgy, hogy az argumentumaiknak, ha vannak, ekvivalens típusúaknak kell lenniük;
  - minden értékdeklarációját, mégpedig úgy, hogy a típusuknak legalább annyira általánosnak kell lenniük, mint a célszignatúrában.
- A szignatúra-jelöltnek a célszignatúránál lehet több komponense, és több típusdefiníciót tartalmazhat, de nem lehet benne kevesebb egyikből sem.
- A szignatúra-jelölt a célszignatúra *gyengítése*, mivel a célszignatúra összes tulajdonsága igaz a szignatúra-jelöltre is.

Szignatúra-illeszkedés: QUEUE, QUEUE_WITH_EMPTY, QUEUE_AS_LISTS

- ```
  signature QUEUE =
  sig  type 'a queue
       exception Empty
       val empty : 'a queue
       val insert : 'a * 'a queue -> 'a queue
       val remove : 'a queue -> 'a * 'a queue
  end

  signature QUEUE_WITH_EMPTY =
  sig  include QUEUE
       val is_empty : 'a queue -> bool
  end

  signature QUEUE_AS_LISTS =
       QUEUE where type 'a queue = 'a list * 'a list
  ```
- `QUEUE_WITH_EMPTY` illeszkedik `QUEUE`-ra, mert kielégíti `QUEUE` összes elvárását.

  `QUEUE` azonban a hiányzó `is_empty` miatt nem illeszkedik `QUEUE_WITH_EMPTY`-re.
- `QUEUE_AS_LISTS` illeszkedik `QUEUE`-ra, csak abban különbözik tőle, hogy `'a queue`-t specifikálja.

  `QUEUE` azonban nem illeszkedik `QUEUE_AS_LISTS`-re, mert a `QUEUE`-beli `'a queue` nem ekvivalens `'a list * 'a list`-tel.
  ```

Szignatúra-illeszkedés: QUEUE, QUEUE_AS_LIST

- ```
  signature QUEUE =
  sig  type 'a queue
       exception Empty
       val empty : 'a queue
       val insert : 'a * 'a queue -> 'a queue
       val remove : 'a queue -> 'a * 'a queue
  end
  ```

  ```
  signature QUEUE_AS_LIST =
  sig  type 'a queue = 'a list
       exception Empty
       val empty : 'a list
       val insert : 'a * 'a list -> 'a list
       val remove : 'a list -> 'a * 'a list
  end
  ```

- Úgy vélhetjük, hogy `QUEUE_AS_LIST` nem illeszkedik `QUEUE`-ra, annyira különbözik tőle.
- Csakhogy az előzővel ekvivalens az alábbi definíció:

  ```
  signature QUEUE_AS_LIST =
       QUEUE where type 'a queue = 'a list
  ```

  és az utóbbi nyilvánvalóan illeszkedik `QUEUE`-ra.
  ```

Szignatúra-illeszkedés: MERGEABLE_QUEUE, MERGEABLE_INT_QUEUE

- Említettük, hogy a szignatúra-jelöltben az értékek típusa általánosabb lehet, mint a célszignatúrában.
- A szignatúra-illeszkedés együtt járhat azzal, hogy a polimorf típusokat konkrét típusokra cseréljük.
-

```
signature MERGEABLE_QUEUE =
sig
    include QUEUE
    val merge : 'a queue * 'a queue -> 'a queue
end

signature MERGEABLE_INT_QUEUE =
sig
    include QUEUE
    val merge : int queue * int queue -> int queue
end
```

- A `MERGEABLE_QUEUE` szignatúra-jelölt illeszkedik a `MERGEABLE_INT_QUEUE` célszignatúrára, mert az előbbiben specifikált polimorf `merge` függvény típusát leíró típuskifejezés típusváltozója leköthető az `int` típussal.

Szignatúra-illeszkedés: RBT_DT, RBT

- ```
  signature RBT_DT =
  sig  datatype 'a rbt = Empty
                       | Red of 'a rbt * 'a * 'a rbt
                       | Black of 'a rbt * 'a * 'a rbt
  end
  ```
  ```
  signature RBT =
  sig  type 'a rbt
       val Empty : 'a rbt
       val Red : 'a rbt * 'a * 'a rbt -> 'a rbt
  end
  ```
- Az `RBT_DT` szignatúra-jelölt illeszkedik az `RBT` célszignatúrára, mert az `RBT_DT`-ben a `datatype` deklarációval specifikált típus és adatkonstruktorai illeszkednek az `RBT`-ben specifikált `'a rbt` absztrakt típusra és a két értékspecifikációra (`Empty` és `Red`). Fordítva nem igaz.
- `RBT_DT` ugyanis a következő típust, ill. adatkonstruktorokat specifikálja:
  ```
  type 'a rbt
  con 'a Empty : 'a rbt
  con 'a Red : 'a rbt * 'a * 'a rbt -> 'a rbt
  con 'a Black : 'a rbt * 'a * 'a rbt -> 'a rbt
  ```
  ```

Szignatúra-illeszkedés (folyt.)

- Most már még pontosabban válaszolhatunk a kérdésre:
- Mikor tekinthető egy *struktúra-jelölt* egy *célszignatúra* megvalósításának?
- Akkor és csak akkor, ha a struktúra-jelölt *törzsszignatúrája* illeszkedik a célszignatúrára.
- Nyilvánvaló, hogy minden struktúra kielégíti a törzsszignatúráját (az illeszkedési reláció reflexív).
- Bármely szignatúra, amelyet egy struktúra megvalósít, *gyengébb* az adott struktúra törzsszignatúrájánál.
- A törzsszignatúra ezért a *legerősebb* szignatúra, amelyet egy struktúra megvalósíthat.

Szignatúra-kötés

- *Szignatúra-kötéssel* (signature ascription) írjuk elő, hogy egy struktúra valósítson meg egy szignatúrát.
- A szignatúra-kötés *gyengíti* a struktúra szignatúráját az összes további felhasználás számára.
- Kétféle szignatúra-kötés van az SML-ben:
  - *átlátszó* vagy *leíró* (transparent, descriptive): a struktúra *látható szignatúrája* az adott struktúrában definiált típusokkal *bővített* célszignatúra lesz,
  - *áttetsző* vagy *korlátozó* (opaque, restrictive): a struktúra *látható szignatúrája* a célszignatúra lesz, bővítés nélkül.
- A szignatúra-kötés mindkét változata elrejti azokat a komponenseket, amelyek a célszignatúra nem specifikál.
- A moduláris programozás biztonsága megköveteli a típusinformációk gondos kezelését. A láthatóvá tételnek és az elrejtésnek egyformán fontos a szerepe.
- Az áttetsző szignatúra-kötéssel a típusinformáció láthatóságát korlátozzuk.
- Az átlátszó szignatúra-kötéssel a típusinformációt láthatóvá tesszük.

Struktúra-deklaráció szignatúra-kötéssel

- Már láttuk a kétféle szignatúra-kötés használatát struktúra-deklarációkban:
  - átlátszó: `structure` *`strid`* `:` *`sigexp`* `=` *`strexp`*
  - áttetsző: `structure` *`strid`* `:>` *`sigexp`* `=` *`strexp`*
- A típusellenőrzés lépései szignatúrához kötött struktúra-deklaráció esetén a következők:
  - *strexp* megvalósítja-e *sigexp*-et? Ennek eldöntéséhez a fordító
    - meghatározza *strexp* $sigexp_0$ törzsszignatúráját, és megpróbálja illeszteni a *sigexp* célszignatúrára; valamint
    - előállítja a bővített *sigexp'* szignatúrát úgy, hogy *sigexp*-et bővíti a $sigexp_0$-ban lévő típusdeklarációkkal;
  - a struktúranévhez köti a szignatúrát a kötés előírt módja szerint: a struktúra látható szignatúrája
    - átlátszó szignatúra-kötés esetén *sigexp'*,
    - áttetsző szignatúra-kötés esetén *sigexp* lesz.

Struktúra-deklaráció szignatúra-kötéssel (folyt.)

- A szignatúrához kötött struktúra-deklaráció kiértékelését a fordító így folytatja:
  - kiértékeli *strexp*-et;
  - előállítja az eredményül kapott érték egy *nézetét* úgy, hogy eldobja azokat az értékeket, amelyeket a *sigexp* célszignatúra nem tartalmaz;
  - a *strid* nevet ehhez a nézethez köti.
- A leírtakból is kitűnik, hogy az átlátszó szignatúra-kötés az áttetsző szignatúra-kötés *speciális esete:* a bővített szignatúrát a programozó maga is előállíthatná (technikai nehézségektől eltekintve, ui. néha nem férhet hozzá a szükséges információhoz).
- Az *áttetsző szignatúra-kötés* legfontosabb célja az adatabsztrakció elősegítése. Tekintsük a példát a következő dián!
- Az áttetsző szignatúra-kötés garantálja `'a Queue_as_lists.queue` *absztrakt* voltát, így *kizárólag* az `empty`, `insert` és `remove` műveleteket lehet alkalmazni ilyen típusú értékekre.
- A programozó *nem használhatja ki,* hogy most a `'a Queue_as_lists.queue` típust listákból álló párral valósítjuk meg.
- Ezért a szignatúrát megvalósító struktúra szabadon, a többi programrész konzisztenciájának megsértése nélkül módosítható.

Struktúra-deklaráció áttetsző szignatúra-kötéssel: QUEUE, Queue_as_lists

- Az elmondottak illusztrálására nézzük a már látott példát:

```
signature QUEUE =
sig
    type 'a queue
    exception Empty
    val empty : 'a queue
    val insert : 'a * 'a queue -> 'a queue
    val remove : 'a queue -> 'a * 'a queue
end

structure Queue_as_lists :> QUEUE =
struct
    type 'a queue = 'a list * 'a list
    exception Empty
    val empty = (nil, nil)
    fun insert (x, (bs, fs)) = (x::bs, fs)
    fun remove (nil, nil) = raise Empty
      | remove (bs, nil) = remove (nil, rev bs)
      | remove (bs, f::fs) = (f, (bs, fs))
end
```

Struktúra-deklaráció áttetsző szignatúra-kötéssel (folyt.)

- A típusinformáció elrejtése a reprezentáció (ábrázolás) invariánsait is elszigeteli az absztrakció megvalósításától.
  - Az `'a Queue_as_lists.queue` típust egy olyan absztrakt gép állapottípusának tekinthetjük, amelynek csak három parancs adható: `empty` (amely a kezdőállapotot hozza létre), `insert` és `remove`.
  - A `Queue_as_lists` struktúrán belül invariáns állításokkal jellemezhetjük az absztrakt gép belső állapotát.
  - Az adatabsztrakció elegáns eljárást nyújt az invariáns állítások alkalmazásához; az *assume–ensure* vagy *rely–guarantee* néven ismert eljáráshoz két követelményt kell kielégíteni:
    - minden inicializáló parancsnak *garantálnia kell* az invariáns teljesülését a végrehajtása után;
    - minden állapotmódosító parancs *felteheti,* hogy az invariáns teljesül a parancs végrehajtásának kezdetén, és minden ilyen parancsnak *garantálnia kell* az invariáns teljesülését a végrehajtása után.
  - Teljes indukcióval belátható, hogy az invariáns állítás az összes állapotra teljesül, azaz valóban invariáns!

Struktúra-deklaráció áttetsző szignatúra-kötéssel: prioritási sor

- Olyan absztrakt prioritásisor-típust akarunk létrehozni, amely tetszőleges típusú elemekből állhat.
- A műveletek (függvények) nem lehetnek politípusúak, mert az elemek relatív prioritását összehasonlítással tudjuk megállapítani. Ezt a függőséget fejezi ki az alábbi szignatúra:

```
signature PQ =
sig
    type elt
    val lt : elt * elt -> bool
    type queue
    exception Empty
    val empty : queue
    val insert : elt * queue -> queue
    val remove : queue -> elt * queue
end
```

- Egy lehetséges megvalósítás vázlatát mutatja a következő példa, ahol az elemek `string` típusúak.

Struktúra-deklaráció áttetsző szignatúra-kötéssel: prioritási sor (folyt.)

- A megvalósítástól független absztrakt típus *áttetsző szignatúrát* igényel:

```
structure PrioQueue :> PQ =
struct  type elt = string
        val lt : string * string -> bool = (op <)
        type queue = ...
end
```

- Csakhogy így `PrioQueue.queue` mellett `PrioQueue.elt` is absztrakt típus lett, így nem tudunk `PrioQueue.elt` típusú értéket létrehozni, és pl. nem hívhatjuk a `PrioQueue.insert` függvényt. Ezért `PrioQueue.elt`-nek nem kellene absztrakt típusnak lennie.
- Egy lehetséges megoldás az, hogy a PQ szignatúrát bővítjük, és a bővített szignatúrát kötjük a struktúrához:

```
signature STRING_PQ = PQ where type elt = string
structure PrioQueue :> STRING_PQ = ...
```

  vagy

```
structure PrioQueue :> PQ where type elt = string = ...
```

- A tanulság: megfontolást igényel, hogy mely típusokat válasszuk absztraktnak, és melyeket ne.

Struktúra-deklaráció átlátszó szignatúra-kötéssel: `ORDERED`, `MyString`

- Átlátszó szignatúra-kötéssel csökkenthető az explicit típusspecifikációk száma a szignatúrában. De az se jó, ha túl sokat használjuk, ui. a típusinformációk láthatóvá tételével csökken a modulok függetlensége.
- Az átlátszó szignatúra-kötés tipikusan arra való, hogy egy struktúra *nézetét* állítsuk elő vele. E nézet célja, hogy elrejtse azokat a komponenseket, amelyek az adott szövegkörnyezetben feleslegesek, de ne rejtse el azokat a típusdefiníciókat, amelyekre szükség van.
- Az `ORDERED` szignatúra specifikálja a `t` típust és a `t` típusú értékekből álló párokra alkalmazható `lt` összehasonlító műveletet.

```
signature ORDERED =
sig
    type t
    val lt : t * t -> bool
end
```

- Az ilyen szignatúrát, mint láttuk, *csak átlátszóan* érdemes egy struktúrához kötni, különben nem tudnánk `t` típusú értékeket létrehozni.

Struktúra-deklaráció átlátszó szignatúra-kötéssel: `ORDERED`, `MyString` (folyt.)

- Nézzük a következő példát:

```
structure MyString : ORDERED =
struct
    type t = string
    val clt = Char.<
    fun lt (s, t) = ... clt ...
end
```

- `MyString` a füzérek összehasonlítását karakterek összehasonlítására vezeti vissza, `clt`-t elrejti. `String.t` a külvilág számára is ekvivalens `string`-gel, bár ez az `ORDERED` szignatúrából nem látszik: `MyString` tényleges, *látható* szignatúrája ugyanis:

```
ORDERED where type t = string
```

- Arra is érdemes átlátszó szignatúra-kötést használni, hogy *dokumentáljuk* egy típus jelentését (anélkül, hogy absztrakttá tennénk).

Struktúra-deklaráció átlátszó szignatúra-kötéssel: `ORDERED`, `IntLt`, `IntDiv`

- Tegyük föl, hogy egészeket kétféle alapon akarunk összehasonlítani, de nem akarjuk elrejteni, hogy egészekről van szó:
- Összehasonlítás aritmetikai alapon

```
structure IntLt : ORDERED =
struct
    type t = int
    val lt = (op <)
end
```

- Összehasonlítás oszthatóság alapján

```
structure IntDiv : ORDERED =
struct
    type t = int
    fun lt (m, n) = (n mod m = 0)
end
```

- Mind `IntLt.t`, mind `IntDiv.t` ekvivalens `int`-tel.

Átlátszóság, áttetszőség, függőség

- Az átlátszó szignatúra-kötés a típuslevezetéshez hasonlóan megkönnyíti a programozó dolgát: kevesebbet kell írnia. *De ára van:*
- átlátszó szignatúra-kötés esetén a szignatúra önmagában nem fordítható le, csak a struktúrával együtt: csak így állítható elő a struktúra tényleges, *látható* szignatúrája.
- Vagyis az összes olyan programrész, amely e struktúra látható szignatúrájára hivatkozik, *függ* e struktúra *megvalósításától!*
- Amíg az átlátszó szignatúra-kötés függőséget okoz, az áttetsző szignatúra-kötés kiküszöböli a függőséget.
- Ha egy struktúrához áttetsző módon kötjük a szignatúrát, a rá hivatkozó programrészek megbízhatnak a szignatúrában (a struktúra látható szignatúrája ui. ekvivalens az áttetsző szignatúrával).
- A megvalósítástól való függés gátolja, nehezíti a modularitást. A modularitás célja ui. az, hogy elszigetelje egymástól az egyes programrészeket, csökkentse az egyes programrészek hatását a többire. Ekkor egymástól függetlenül legyenek fejleszthetők, módosíthatók. Minél kevésbé függnek egymástól a modulok, annál könnyebben rakhatók össze a végén egyetlen rendszerré.

MODULOK HIERARCHIÁJA

Modulok hierarchiája

- Egy nagy program architektúrája rendszerint nem lineáris, hanem faszerkezetű (hierarchikus). Az SML modulnyelv faszerkezetű modulrendszer leírását is lehetővé teszi.
- A modulok egymásba skatulyázhatók; a beágyazott struktúrát *alstruktúrának* (substructure) nevezzük.
- Egy struktúra más struktúra-deklarációkat tartalmazhat (akár átlátszó, akár áttetsző szignatúra-kötéssel).
- Egy szignatúrában egy struktúra `structure` *`strid`* `:` *`sigexp`* alakban specifikálható (szignatúráról lévén szó, itt nincs különbség átlátszó és áttetsző kötés között).
- Az alstruktúrákra a struktúrák típusellenőrzési és a kiértékelési szabályait rekurzív módon alkalmazza a fordítóprogram.
- Ebben a részben arról lesz szó, hogyan lehet alstruktúrákkal kifejezni az egyes absztrakciók egymástól való függését.

- A következő példák egy polimorf szótárat megvalósító programból valók.

Polimorf szótár `string` típusú keresési kulccsal

- Az első változatban a *keresési kulcs* `string` típusú. A szignatúra és lehetséges megvalósítása:

```
signature MY_STRING_DICT =
sig
    type 'a dict
    val empty : 'a dict
    val insert : 'a dict * string * 'a -> 'a dict
    val lookup : 'a dict * string -> 'a option
end

structure MyStringDict :> MY_STRING_DICT =
struct
    datatype 'a dict = Empty
                     | Node of 'a dict * string * 'a * 'a dict
    val empty = Empty
    fun insert (d, k, v) = ...
    fun lookup (d, k) = ...
end
```

- A hiányzó függvénydefiníciók a füzérek lexikografikus összehasonlító műveleteit használják.

Polimorf szótár `int` típusú keresési kulccsal

- A második változatban a *keresési kulcs* `int` típusú. A szignatúra és lehetséges megvalósítása:

```
signature MY_INT_DICT =
sig
    type 'a dict
    val empty : 'a dict
    val insert : 'a dict * int * 'a -> 'a dict
    val lookup : 'a dict * int -> 'a option
end

structure MyIntDict :> MY_INT_DICT =
struct
    datatype 'a dict = Empty
                     | Node of 'a dict * int * 'a * 'a dict
    val empty = Empty
    fun insert (d, k, v) = ...
    fun lookup (d, k) = ...
end
```

- A hiányzó függvénydefiníciók az egészek aritmetikai összehasonlító műveleteit használják.

Polimorf szótár *absztrakt* típusú keresési kulccsal

- A két változat, a típustól és az összehasonlító műveletektől eltekintve, azonos.
- A harmadik változatban a *keresési kulcs absztrakt* típusú. A *generikus* szignatúra és két leszármazottja (példánya, instanciája):

```
signature MY_GEN_DICT =
sig
    type key
    type 'a dict
    val empty : 'a dict
    val insert : 'a dict * key * 'a -> 'a dict
    val lookup : 'a dict * key -> 'a option
end

signature MY_STRING_DICT =
    MY_GEN_DICT where type key = string

signature MY_INT_DICT =
    MY_GEN_DICT where type key = int
```

Polimorf szótár `string` típusú keresési kulcssal (folyt.)

- A szignatúra egy megvalósítása `string` típusú kulcsokra:

```
structure MyStringDict :> MY_STRING_DICT =
struct
    type key = string
    datatype 'a dict = Empty
                     | Node of 'a dict * key * 'a * 'a dict
    val empty = Empty
    fun insert (None, k, v) = Node (Empty, k, v, Empty)
    fun lookup (Empty, _) = NONE
      | lookup (Node (dl, l, v, dr), k) =
          if k < l then      (* string comparison *)
              lookup (dl, k)
          else if k > l then (* string comparison *)
              lookup (dr, k)
          else
              SOME v
end
```

- A `MY_INT_DICT` szignatúrájú `MyIntDict` hasonlóan valósítható meg.

Polimorf szótár `int` típusú kulccsal, *oszthatóságon alapuló* összehasonlítással

```
structure MyIntDivDict :> MY_INT_DICT =
struct
    type key = int
    datatype 'a dict = Empty
                     | Node of 'a dict * key * 'a * 'a dict
    fun divides (k, l) = (l mod k = 0)
    val empty = Empty
    fun insert (None, k, v) = Node (Empty, k, v, Empty)
    fun lookup (Empty, _) = NONE
      | lookup (Node (dl, l, v, dr), k) =
          if divides (k, l) then      (* divisibility test *)
              lookup (dl, k)
          else if divides (l, k) then (* divisibility test *)
              lookup (dr, k)
          else
              SOME v
end
```

- Függetlenítsük a megvalósítást a keresési kulcs típusától és az összehasonlító műveletektől!

Egy rendezett absztrakt típus és néhány megvalósítása

- A `t` típus és két összehasonlító művelet

```
signature ORDERED =
sig
  type t
  val lt : t * t -> bool
  val eq : t * t -> bool
end
```

- Egészek aritmetikai összehasonlítása

```
structure LessInt : ORDERED =
struct
  type t = int
  val lt = (op <)
  val eq = (op =)
end
```

- Füzérek lexikografikus összehasonlítása

```
structure LexString : ORDERED =
struct
  type t = string
  val lt = (op <)
  val eq = (op =)
end
```

- Egészek oszthatóságon alapuló összehasonlítása

```
structure DivInt : ORDERED =
struct
  type t = int
  fun lt (m, n) = (n mod m = 0)
  fun eq (m, n) = lt (m, n)
                  andalso lt (n, m)
end
```

- Ezekben a példákban indokolt az átlátszó szignatúra-kötés alkalmazása.

Polimorf szótár generikus szignatúrája

- A `DICT` szignatúra „paramétere” az `ORDERED` szignatúrájú `Key` absztrakt keresési kulcs (a `DICT` szignatúra *örökli* a keresési kulcs `ORDERED` szignatúráját!):

```
signature DICT =
sig
    structure Key : ORDERED
    type 'a dict
    val empty : 'a dict
    val insert : 'a dict * Key.t * 'a -> 'a dict
    val lookup : 'a dict * Key.t -> 'a option
end
```

- A szignatúra két specializált változata segíti az absztrakciót:

```
signature STRING_DICT =
     DICT where type Key.t = string

signature INT_DICT =
    DICT where type Key.t = int
```

Polimorf szótár: a specializált szignatúra megvalósítása `string` kulccsal

```
structure StringDict :> STRING_DICT =
struct
    structure Key : ORDERED = LexString
    datatype 'a dict = Empty
                     | Node of 'a dict * Key.t * 'a * 'a dict
    val empty = Empty
    fun insert (None, k, v) = Node (Empty, k, v, Empty)
    fun lookup (Empty, _) = NONE
      | lookup (Node (dl, l, v, dr), k) =
          if Key.lt (k, l) then
              lookup (dl, k)
          else if Key.lt (l, k) then
              lookup (dr, k)
          else
              SOME v
end
```

(Félkövér szedéssel e változat és a következő két változat közötti **különbséget** emeljük ki.)

Polimorf szótár: a specializált szignatúra megvalósítása `int` kulccsal (1. változat)

```
structure LessIntDict :> INT_DICT =
struct
    structure Key : ORDERED = LessInt
    datatype 'a dict = Empty
                     | Node of 'a dict * Key.t * 'a * 'a dict
    val empty = Empty
    fun insert (None, k, v) = Node (Empty, k, v, Empty)
    fun lookup (Empty, _) = NONE
      | lookup (Node (dl, l, v, dr), k) =
          if Key.lt (k, l) then
              lookup (dl, k)
          else if Key.lt (l, k) then
              lookup (dr, k)
          else
              SOME v
end
```

Polimorf szótár: a specializált szignatúra megvalósítása `int` kulccsal (2. változat)

```
structure DivIntDict :> INT_DICT =
struct
    structure Key : ORDERED = DivInt
    datatype 'a dict = Empty
                     | Node of 'a dict * Key.t * 'a * 'a dict
    val empty = Empty
    fun insert (None, k, v) = Node (Empty, k, v, Empty)
    fun lookup (Empty, _) = NONE
      | lookup (Node (dl, l, v, dr), k) =
          if Key.lt (k, l) then
              lookup (dl, k)
          else if Key.lt (l, k) then
              lookup (dr, k)
          else
              SOME v
end
```

A funktorok tárgyalásakor látni fogjuk, hogyan írhatjuk meg e három struktúra közös generikus (azaz paraméterezhető) változatát.

FUNKTOROK

Paraméterezhető, más néven generikus modulok

- Az újrafelhasználhatóságot segíti elő a *paraméterezhető,* más néven *generikus* modul, azáltal hogy a megvalósítás egy vagy több elemét specifikálatlanul hagyja. A spefifikálatlan elemek specifikálása a modul egy *példányát* hozza létre. A közös részt *csak egyszer* kell megírni.
- Az SML-ben az ilyen generikus modult *funktornak* (`functor`) nevezik. A funktornak struktúra a paramétere is, az eredménye is. A funktor egy *példányát* úgy hozzuk létre, hogy alkalmazzuk egy (létező) struktúrára.
- A *funktordeklarációnak* (vagy *funktorkötésnek)* két változata van, az *átlátszó*:

```
functor funid (decs) : sigexp = strexp
```

- és az *áttetsző*:

```
functor funid (decs) :> sigexp = strexp
```

- A funktor típusának ellenőrzéséhez a fordító megvizsgálja, hogy a funktor törzse megfelel-e a szignatúra-kötés által előírt szignatúrának, feltéve hogy a funktor paramétereinek megfelelő a szignatúrája.
- Mint tudjuk, az *áttetsző* szignatúra-kötés a megadott szignatúrát eredményezi, az *átlátszó* szignatúra-kötés pedig ennek a törzsszignatúra szerinti típusokkal bővített változata.

Példa: polimorf szótár megvalósítása funktorral

- Egy korábbi példánk olyan polimorf szótár volt, ahol a keresési kulcsot és a rajta végrehajtható műveleteket egy *alstruktúra* specifikálta. A félkövér szedés a változatok közötti eltérésre utal.

```
structure StringDict :> DICT where type Key.t = string =
struct
    structure Key : ORDERED = LexString
    datatype 'a dict = Empty
                     | Node of 'a dict * Key.t * 'a * 'a dict
    val empty = Empty
    fun insert (None, k, v) = Node (Empty, k, v, Empty)
    fun lookup (Empty, _) =                  NONE
      | lookup (Node (dl, l, v, dr), k) =
               if Key.lt (k, l) then      lookup (dl, k)
               else if Key.lt (l, k) then lookup (dr, k)
               else                       SOME v
end
```

- Látható, hogy különbség csak a keresési kulcs típusában és a rajta végrehajtható műveletekben van; mindezt az `ORDERED` szignatúra specifikálja.

Példa: polimorf szótár megvalósítása funktorral (`DictFun`)

- Az alstruktúrát, ha funktort deklarálunk, paraméterként adhatjuk át. A struktúradeklaráció és a funktordeklaráció közötti különbségeket most is félkövér szedéssel emeljük ki.

```
functor DictFun (structure K : ORDERED) :>
                   DICT where type Key.t = K.t =
struct
    structure Key : ORDERED = K
    datatype 'a dict = Empty
                     | Node of 'a dict * Key.t * 'a * 'a dict
    val empty = Empty
    fun insert (None, k, v) = Node (Empty, k, v, Empty)
    fun lookup (Empty, _) =                NONE
      | lookup (Node (dl, l, v, dr), k) =
               if Key.lt(k, l) then        lookup (dl, k)
               else if Key.lt (l, k) then lookup (dr, k)
               else                        SOME v
end
```

- A `DICT where type Key.t = K.t` szignatúra az `'a dict` típus absztrakt voltát megőrzi. A `Key.lt` összehasonlító műveletet a paraméterként átadott struktúra valósítja meg.

Funktoralkalmazás szignatúrája, funktor generativitása, ill. applikativitása

- A funktoralkalmazás `funid (binds)` alakú kifejezés, ahol `binds` a funktorargumentumok kötésének egy sorozata.
- Egy *funktoralkalmazás szignatúrája* a következő eljárással határozható meg. Feltesszük, hogy ismerjük a funktorparaméterek szignatúráját, valamint a funktor látható szignatúráját (a megadottat áttetsző, a bővítettet átlátszó szignatúrakötés esetén).
  - Minden argumentum szignatúráját illesztjük a funktor megfelelő paraméterének szignatúrájára. Ezzel minden argumentumra megkapjuk a paraméterszignatúrák egy bővített változatát.
  - Ha az eredmény szignatúrája hivatkozik a funktorparaméter valamely típuskomponensére, akkor a bővített paraméterszignatúrában lévő típusdefiníciónak meg kell jelennie az eredmény szignatúrájában.
- Az így előállított szignatúra átlátszó kötéssel kapcsolódik a funktoralkalmazáshoz. Ez azt jelenti, hogy ha a funktor eredményszignatúrája egy típust absztraktként specifikál, akkor e funktor minden alkalmazása e típusból egy új példányt hoz létre. Ezt a viselkedést a funktor *generativitásának* nevezzük. (Ezzel szemben a funktor *applikativitása* azt jelenti, hogy a funktor összes példánya megosztva „használja” ugyanazt az absztrakt típust.)

Példa: polimorf szótár (LtIntDict, LexStringDict, DivIntDict)

- A szótár három változatát a `DictFun` funktor alkalmazásával könnyű előállítani:

```
structure LtIntDict = DictFun (structure K = LessInt)
structure LexStringDict = DictFun (structure K = LexString)
structure DivIntDict =  DictFun (structure K = DivInt)
```

- Idézzük föl `LexString`, `LessInt` és `DivInt` egy-egy megvalósítását:

```
structure LexString : ORDERED =
struct  type t = string
    val lt = (op <)
    val eq = (op =)
end
```

```
structure LessInt : ORDERED =
struct  type t = int
    val lt = (op <)
    val eq = (op =)
end
```

```
structure DivInt : ORDERED =
struct  type t = int
    fun lt (m, n) = (n mod m = 0)
    fun eq (m, n) = lt (m, n) andalso lt (n, m)
end
```

- Például `LessInt` bővített szignatúrája ez: `ORDERED where type t = int`.
- Ha a `K` paraméter aktuális értéke `LessInt`, akkor `K.t` és `int` ekvivalensek lesznek, és így `DictFun` aktuális szignatúrája ez: `ORDERED where type Key.t = int`.

LUSTA LISTÁK

Lusta lista

- Olyan lista, amelynek a farka függvény, ezáltal késleltetjük a kiértékelését.
- Ily módon *végtelen listákat* hozhatunk létre.
- A lusta listának hátrányai, veszélyei is vannak, pl.
  - egy lusta lista bármely részét megjeleníthetjük, de sohasem az egészet;
  - két lusta lista elemeiből páronként képezhetünk egy harmadikat, de nem számíthatjuk ki egy lusta lista elemeinek az összegét, nem kereshetjük meg benne a legkisebbet, nem fordíthatjuk meg az elemek sorrendjét;
  - úgy kell rekurziót definiálnunk, hogy nincs alapeset;
  - egy program befejeződése helyett csak azt igazolhatjuk, hogy az eredmény tetszőleges véges része véges idő alatt előáll.
- A lusta listát sorozatnak *(sequence)* nevezzük, és a `seq` típusoperátort használjuk a létrehozására.

```
datatype 'a seq = Nil | Cons of 'a * (unit -> 'a seq)
```

Lusta lista (folyt.)

- Egy sorozat fejét adja eredményül a `head` függvény; abortál, ha üres sorozatra alkalmazzuk.

```
(* head : 'a seq -> 'a
*)
fun head (Cons(x, _)) = x
```

- Egy sorozat farkát adja eredményül a `tail` függvény; abortál, ha üres sorozatra alkalmazzák.

```
(* tail : 'a seq -> 'a seq
*)
fun tail (Cons(_, xf)) = xf()
```

A sorozat farka `unit -> 'a seq` típusú *függvény*, erre illesztjük az `xf` mintát `tail` fejében; `tail` törzsében `xf`-et a `()` argumentumra kell alkalmazni.

Lusta lista (folyt.)

Most további függvényeket definiálunk. `consq(x, xq)` az `x`-et berakja az `xq` sorozatba:

```
(* consq : 'a * 'a seq -> 'a seq
*)
fun consq (x, xq) = Cons(x, fn () => xq)
```

- Ha a `consq` függvényt alkalmazzuk, mondjuk, az `(x, E)` argumentumra, az SML a `consq(x, E)` kifejezést *nem lustán* értékeli ki, hiszen alapvetően mohó kiértékelésű.
- Ha `E` kiértékelésének eredményét `xq`-val jelöljük, akkor `consq(x, E)` kiértékelése a fenti definíció szerint `Cons(x, fn () => xq)`-t eredményez.
- A `consq`-beli `fn () => xq` függvény nem késlelteti a farok (a példában `E`) kiértékelését `consq` alkalmazásakor.
- A lusta kiértékelés érdekében a híváskor is a `Cons(x, fn () => E)` alakot kell használnunk, `consq(x,E)` nem jó.
- Az explicit `fn () => E` alak késlelteti a kiértékelést: *szükség szerinti hivatkozást* valósít meg.

Lusta lista (folyt.)

- Példaként a korábban megismert `from` és `take` függvények lusta változatait mutatjuk be.
- A `fromq k` sorozat egészek `k`-tól induló végtelen sorozata.

```
(* fromq : int -> int seq
*)
fun fromq k = Cons(k, fn () => fromq(k+1))
```

- `takeq(xq, n)` az `xq` sorozat első `n` eleméből képzett listát adja vissza:

```
(* takeq : 'a seq * int -> 'a list
*)
fun takeq (xq, 0) = []
  | takeq (Nil, n) = []
  | takeq (Cons(x, xf), n) = x :: takeq(xf(), n-1)
```

- Az `'a seq` típus nem egészen lusta kiértékelésű: ***egy nemüres sorozat fejét a futtatórendszer mindig feldolgozza***.

Egyszerű függvények lusta listákra

- A kiszámíthatóság érdekében egy függvény eredményének tetszőleges véges része az argumentum véges részétől függhet csak.
- Amikor az eredményre szükség van, akkor ez az igény váltja ki az argumentum feldolgozását.
- Első példánkban egészeket egyesével emelünk négyzetre. Amikor szükség van rá, az eredmény farka (egy függvény) alkalmazza a `squareq` függvényt az argumentum farkára.

```
(* squareq : int seq -> int seq
*)
fun squareq Nil: int seq = Nil
  | squareq (Cons (x, xf)) = Cons(x * x, fn () => squareq(xf()))
```

- Két lusta lista hasonlóan adható össze.

```
(* addq : (int seq * int seq) -> int seq
*)
fun addq (Cons (x, xf), Cons(y, yf)) =
                            Cons(x+y, fn () => addq(xf(), yf()))
  | addq _: int seq = Nil
```

Egyszerű függvények lusta listákra (folyt.)

- Az `appendq` függvény addig nem nyúl `yq`-hoz, amíg `xq` ki nem ürül – vagyis csak akkor nyúl hozzá, ha `xq` véges. Véges sorozatot `consq`-val készíthetünk.

```
(* appendq : 'a seq * 'a seq -> 'a seq
*)
fun appendq (Nil, yq) = yq
  | appendq (Cons (x, xf), yq) =
                              Cons(x, fn () => appendq (xf(), yq))
```

- Most érthetjük meg, hogy miért kellett a típusdefinícióban a `Nil` konstruktorállandót definiálni.

Magasabb rendű függvények lusta listákra

- A `map` lusta változata:

```
(* mapq : ('a -> 'b) -> 'a seq -> 'b seq
*)
fun mapq f Nil = Nil
  | mapq f (Cons (x, xf)) = Cons(f x, fn () => mapq f (xf()))
```

- A `filter` lusta változata:

```
(* filterq : ('a -> bool) -> 'a seq -> 'a seq
*)
fun filterq p Nil = Nil
  | filterq p (Cons (x, xf)) =
        if p x
        then Cons(x, fn () => filterq p (xf()))
        else filterq p (xf())
```

Magasabb rendű függvények lusta listákra (folyt.)

- `squareq` a korábban látottnál sokkal egyszerűbben definiálható `mapq`-val:

```
val squareq = mapq (fn i => i * i)
```

- Olyan számsorozatot állítunk elő, amelyben 50-nél nagyobb, 7-esre végződő egészek vannak:

```
filterq (fn n => n mod 10 = 7) (fromq 50)
```

- Az `iterateq` függvény – a `fromq` egy általánosítása – a következő sorozatot állítja elő: $[x, f(x), f(f(x)), \cdots, f^k(x), \cdots]$.

```
(* iterateq : ('a -> 'a) -> 'a -> 'a seq
*)
fun iterateq f x = Cons(x, fn () => iterateq f (f x))
```

- `fromq`-t `iterateq`-val így definiálhatjuk:

```
(* fromq : int -> int seq
*)
val fromq = iterateq (fn i => i+1)
```

Prímszámok előállítása *eratosztenészi szitával*

1. Vegyük az egészek 2-vel kezdődő sorozatát: (2, 3, 4, 5, 6, 7, . . .).
2. Töröljük az összes 2-vel osztható számot: (3, 5, 7, 9, 11, . . .).
3. Töröljük az összes 3-mal osztható számot: (5, 7, 11, 13, 17, 19, . . .).
4. Töröljük az összes . . .

- A sorozat első eleme mindig a következő prím. A sorozatban azok a számok maradnak benne, amelyek az eddig előállított prímekkel nem oszthatók.

```
(* sift : int -> int seq -> int seq *)
fun sift p = filterq (fn n => n mod p <> 0)
```

- A `sift` a `p` argumentum többszöröseit törli egy lusta listából.
- A `sieve`-nek már csak ismételten alkalmaznia kell `sift`-et a megfelelő lusta listára. Mivel ez a lusta lista sohasem üres, nem kell az üres lusta listára illeszkedő változatot írnunk.

```
(* sieve : int seq -> int seq *)
fun sieve Nil = Nil
  | sieve (Cons (p, nf)) = Cons(p, fn () => sieve(sift p (nf())));

takeq(sieve(fromq 2), 10)
```

Álvéletlen számok

- Hagyományos álvéletlenszám-generátorok: olyan eljárások, amelyek egy *frissíthető változóban* tárolják a *seed* (mag) értéket – ebből állítják elő egy következő hívásnál a következő álvéletlen számot.
- Lusta listaként megvalósítva: a következő álvéletlen szám csak szükség esetén áll elő.

```
(* randseq : int -> real seq
*)
local val a = 16807.0 and m = 2147483647.0
      (* nextrandom : real -> real
      *)
      fun nextrandom seed =
            let val t = a * seed
            in t - real(floor(t/m)) * m
            end
in
   fun randseq s =
         mapq (fn x => x / m) (iterateq nextrandom (real s))
end
```

Álvéletlen számok (folyt.)

- Ha a `nextrandom`-ot 1.0 és 21474836467.0 közötti `seed`-re alkalmazzuk, ugyanebbe a tartományba eső más értéket állít elő az `a * seed mod m` művelettel. (A valós számokat a túlcsordulás elkerülésére használjuk.)
- A lusta lista előállítására `iterateq`-t `nextrandom`-ra és `seed` valós számmá alakított kezdőértékére alkalmazzuk. `mapq` gondoskodik arról, hogy a lusta listában minden értéket elosszunk `m`-mel, és így `randseq` 0.0-nál nem kisebb és 1.0-nél kisebb értékeket adjon eredményül. Látható, hogy a lusta lista a megvalósítás részleteit szépen elrejti a felhasználó elől.
- Az előállított álvéletlen-számok 0.0-nál nem kisebb és 1.0-nél kisebb valós számok; `mapq`-val alakíthatjuk át őket 0 és 1 közötti egészekké:

```
mapq (floor o (fn x => 10.0 * x)) (randseq 1)
```

Négyzetgyökvonás Newton-Raphson módszerrel

Innentől az előadáson nem hangzott el, csak olvasmány, nem vizsgaanyag!

- `nextapprox` $\mathtt{x}_k$-ból $\mathtt{x}_{k+1}$-et számítja ki az $\mathtt{x}_{k+1} = \frac{\frac{a}{\mathtt{x}_k}+\mathtt{x}_k}{2}$ képlet alapján.

```
(* nextapprox : real -> real -> real
*)
fun nextapprox a x = (a/x + x)/2.0
```

- A befejeződés megállapítására egyszerű tesztet írunk:

```
(* within : real -> real seq -> real
*)
fun within (eps: real) (Cons (x, xf)) =
      let val Cons (y, yf) = xf()
      in
         if abs (x-y) <= eps then y
         else within eps (Cons (y, yf))
      end
```

A `(Cons (y, yf))` és az `xf()` lusta lista ugyanaz: az `else`-ágban azért használjuk az elsőt, mert `xf()` meghívása költségesebb.

Négyzetgyökvonás Newton-Raphson módszerrel (folyt.)

- Ezzel

```
(* qroot : real -> real
*)
fun qroot a = within 1E~6 (iterateq (nextapprox a) 1.0)
```

- A példában világosan különválasztjuk a leállásvizsgálatot (termination test) a következő jelölt előállításától.
- Most az abszolút különbséget ($\mid \mathtt{x} - \mathtt{y} \mid < \varepsilon$) teszteljük, de vizsgálhatnánk pl. a relatív különbséget ($\mid \frac{\mathtt{x}}{\mathtt{y}} - 1 \mid < \varepsilon$) vagy az $\frac{|\mathtt{x}-\mathtt{y}|}{\frac{|\mathtt{x}|+|\mathtt{y}|}{2}+1} < \varepsilon$ feltételt.
- A feladat többi része független attól, hogy milyen leállásvizsgálatot alkalmazunk, és így is kell megfogalmazni a megoldást.

Négyzetgyökvonás Newton-Raphson módszerrel (folyt.)

- Írjunk függvényt a következő jelölt előállítására, és rejtsük el a részleteket:

```
(* approxq : real -> real seq
*)
fun approxq a =
      let (* nextapprox : real -> real
          *)
      fun nextapprox x = (a/x + x) / 2.0
      in iterateq nextapprox 1.0
      end
```

- Ezzel `qroot` egy „tisztább” változata:

```
(* qroot : real -> real
*)
val qroot = within 1E~6 o approxq
```

Keresztszorzatokból álló lista

- Legyen xq és yq egy-egy sorozat. Képezzünk új sorozatot az $(\mathtt{x}_i, \mathtt{y}_j)$ párokból, ahol $\mathtt{x}_i \in \mathtt{xq}$ és $\mathtt{y}_j \in \mathtt{yq}$!
- Először hagyományos listákra oldjuk meg a feladatot `map` és `pair` alkalmazásával.
- `xs` és `ys` egy-egy lista. Képezzünk listát az $(\mathtt{x}_i, \mathtt{y}_j)$ párokból, ahol $\mathtt{x}_i \in \mathtt{xs}$ és $\mathtt{y}_j \in \mathtt{ys}$!
- `map`-et, `pair`-t és `List.concat`-ot alkalmazva juthatunk el a keresett függvényhez.

```
(* pair : 'a -> 'b -> ('a * 'b)
*)
fun pair x y = (x, y)
```

- A `pair`-t a `map`-pel az `ys` lista elemeire alkalmazva olyan párokból álló listát kapunk eredményül, amelyben a párok első tagja a rögzített `x` érték, a második tagja pedig az `ys` egy-egy eleme.

```
map (pair x) ys
```

Keresztszorzatokból álló lista (folyt.)

- Hogyan érhetjük el, hogy az `x` végigfusson az `xs` lista összes elemén? Az eddig szabad `x`-et kössük le egy függvény argumentumaként:

```
fn x => map (pair x) ys
```

  majd alkalmazzuk újból a `map`-et erre a függvényre és `xs`-re:

```
map (fn x => map (pair x) ys) xs
```

- Listák listáját kapjuk eredményül, mert a belső `map` már listát adott vissza, amelynek minden eleméből újabb listát képeztünk a külső `map`-pel. `List.concat` elvégzi a szükséges simítást:

```
(* pairs : 'a list -> 'b list -> ('a * 'b) list
*)
fun pairs xs ys = List.concat (map (fn x => map (pair x) ys) xs)
```

Keresztszorzatokból álló lusta lista

- A `pairss`-hez hasonlóan állíthatjuk elő párok lusta listájának lusta listáját:

```
(* pairqq : 'a seq -> 'b seq -> ('a * 'b) seq seq
*)
fun pairqq xq yq = mapq (fn x => mapq (pair x) yq) xq
```

- Az eredmény véges része kiíratható `takeqq`-val, amely a bal felső saroktól számított első `m` sorból és `n` oszlopból álló téglalapot jeleníti meg az `xqq` lusta listából:

```
(* 'a takeqq : 'a seq seq * (int * int) -> 'a list list
*)
fun takeqq (xqq, (m, n)) =
              map (fn yq => takeq(yq, n)) (takeq(xqq, m))
```

- Példa: olyan lusta lista, amelyben a párok első tagja az egymás után következő egészek 30-tól kezdve, második tagja pedig a prímszámok 2-től kezdve:

```
- pairqq (fromq 30) (sieve(fromq 2));
> val it = Cons (Cons ((30, 2), fn), fn): (int * int) seq seq
```

Keresztszorzatokból álló lusta lista (folyt.)

- ```
  - takeqq(pairqq (fromq 30) (sieve(fromq 2)), (3, 5));
  > val it = [[(30, 2), ...,  (30, 11)],
              [(31, 2), ...,  (31, 11)],
              [(32, 2), ...,  (32, 11)]] : (int * int) list list
  ```
- Ha ki akarjuk símítani a lusta listát, egy `List.concat`-hoz hasonló, lusta listákra alkalmazható függvénnyel nem megyünk semmire:

  ha `xq` végtelen, `appendq (xq, yq) = xq`.

  Azonban két lusta lista elemei páronként egymásba ékelhetők:

  ```
  (* interleaveq : 'a seq * 'a seq -> 'a seq
  *)
  fun interleaveq (Nil, yq) = yq
    | interleaveq (Cons (x, xf), yq) =
                       Cons(x, fn () => interleaveq(yq, xf()))
  ```
- `interleaveq` a rekurzív hívásban váltogatja a két lusta listát.
- ```
  - takeq(interleaveq(fromq 0, fromq 50), 10);
  > val it = [0, 50, 1, 51, 2, 52, 3, 53, 4, 54] : int list
  ```

Keresztszorzatokból álló lusta lista (folyt.)

- `enumerate`: lusta listák lusta listájából egyetlen lusta listát állít elő. Legyen a kétszeres mélységű lusta lista feje `xq` és a farka `xqf`; alkalmazzuk `enumerate`-et rekurzívan `xqf`-re, majd az eredményt ékeljük `xq`-ba:

```
(* enumerate : 'a seq seq -> 'a seq
*)
fun enumerate Nil = Nil
  | enumerate (Cons (xq, xqf)) =
                                interleaveq (xq, enumerate(xqf()))
```

- Ez a „megoldás” nem jó, mert a „ végtelen” lusta lista miatt a rekurzió nem ér véget: az SML-ben, amely alapvetően mohó kiértékelésű, a rekurzív hívást késleltetni kell. Több esetet kell megkülönböztetnünk:

```
fun enumerate Nil = Nil
  | enumerate (Cons (Nil, xqf)) = enumerate (xqf())
  | enumerate (Cons (Cons (x, xf), xqf)) =
                  Cons(x, fn () =>
                               interleaveq(enumerate(xqf()),xf()))
```

Keresztszorzatokból álló lusta lista (folyt.)

- Ha a bemenő lusta lista üres, készen vagyunk. Ha nem üres, meg kell vizsgálni a lusta lista fejét: ha ez üres, akkor folytatni kell a rekurzív hívást, ha nem üres, akkor az explicit `fn () => ...` függvénydefinícióval *késleltetni kell* a rekurziót.
- Példa: pozitív egészekből álló párok egy lusta listáját!

```
- val posintqq = pairqq (fromq 1) (fromq 1);
> val posintqq = Cons (Cons ((1, 1), fn), fn):(int * int) seq seq
- takeq(enumerate posintqq, 15);
> val it = [(1,1), (2,1), (1,2), (3,1), (1,3), (2,2),
            (1,4), (4,1), (1,5), (2,3), (1,6), (3,2),
            (1,7), (2,4), (1,8)] : (int * int) list
```

MODULOK SZIMMETRIKUS ÖSSZEKAPCSOLÁSA

Típusmegosztás specifikálása

Innentől az előadáson nem hangzott el, csak olvasmány, nem vizsgaanyag!

- Ebben a részben *modulok szimmetrikus összekapcsolásával* foglalkozunk.
- A különböző modulokban (akár azonos néven) specifikált absztrakt típusok mind különbözők. Általában ezt akarjuk. De nem mindig.
- A különböző modulokban specifikált típusok azonosságát az ún. *típusmegosztási előírással* (type sharing constraint) adhatjuk meg.
- A következő példák egy mértani elemeket megvalósító programból valók.
- Csupán két térbeli elemet valósítunk meg: a pontot és gömböt.

```
signature GEOMETRY =
sig
    structure Point : POINT
    structure Sphere : SPHERE
end
```

- A mértani elemek ábrázolását a vektorra és a pontra alapozzuk.

Példa: mértani alapelemek ábrázolása (VECTOR, POINT)

- A `VECTOR` szignatúra egy vektor skalárral való szorzatát (`scale`), két vektor összegét (`add`) és skalárszorzatát (`dot`), továbbá a vektorösszeadás egységelemét (`zero`) specifikiálja.

```
signature VECTOR =
sig  type vector
     val zero : vector
     val scale : real * vector -> vector
     val add : vector * vector -> vector
     val dot : vector * vector -> real
end
```

- A `POINT` szignatúra egy pont eltolását egy vektor mentén (`translate`) és egy végpontjaival megadott vektor előállítását (`ray`) specifikiálja.

```
signature POINT =
sig  structure Vector : VECTOR
     type point
     val translate : point * Vector.vector -> point
     val ray : point * point -> Vector.vector
end
```

Példa: mértani alapelemek ábrázolása (`SPHERE`)

- A gömböt a középpontjával és a sugarával adjuk meg.
- A gömböt létrehozó függvényt (`sphere`) az alábbi szignatúra specifikiálja:

```
signature SPHERE =
sig
    structure Vector : VECTOR
    structure Point : POINT
    type sphere
    val sphere : Point.point * Vector.vector -> sphere
end
```

- Emlékeztető: a típusneveket és az értékneveket különböző névterek tárolják, ezért a `sphere` azonosító egyszerre használható típusnévként és értéknévként.
- Vegyük észre, hogy tér dimenziója nem része a specifikációnak!
- A dimenziót majd csak a modul megvalósításakor rögzítjük, ezzel elősegítjük a specifikáció *újrafelhasználását.*

Különböző modulokban specifikált absztrakt típusok különböző volta

- Két- és háromdimenziós mértant így kezdődő struktúra-deklarációkkal valósíthatunk majd meg:

```
structure Geom2D :> GEOMETRY = ...
structure Geom3D :> GEOMETRY = ...
```

- Az *áttetsző* szignatúrakötésnek köszönhetően a két struktúrának *különböző* lesz a látható szignatúrája: a típusellenőrzés gondoskodik róla, hogy pl. a háromdimenziós térben ábrázolt `Geom3D.Sphere.sphere` középpontja ne lehessen a kétdimenziós térben ábrázolt `Geom2D.Point.point` pont.
- Ez jó dolog, növeli a programozás biztonságát.
- Sajnos, nemcsak `Geom2D` különbözik `Geom3D`-től, hanem pl. `Geom2D.Sphere.Vector` is különbözik `Geom2D.Point.Vector`-tól!
- Ezért típushibát jelez a fordító a következő sor fordításakor (ahol `p` és `q` adott, `Geom2D.Point.point` típusú pontok):

```
Geom2D.Sphere.sphere (p, Geom2D.Point.ray (p, q))
```

- `Geom2D.Point.ray (p, q)` eredménye `Geom2D.Point.Vector.vector` típusú, `Geom2D.Sphere.sphere` ugyanakkor `Geom2D.Sphere.Vector.vector` típusú értéket vár. Ezt nyilvánvalóan nem akarjuk. Mi lehet az oka, hogyan küszöbölhetjük ki?

Különböző modulokban specifikált absztrakt típusok megosztása (`SPHERE`)

- Az ok az, hogy a szignatúrákban specifikáltuk azokat az alstruktúrákat, amelyektől e szignatúrák függnek, így a pont-absztrakciót *két,* a vektor-absztrakciót *három példányban* hoztuk létre!
- Mivel áttetsző szignatúrakötést használunk, a látható szignatúráik mind különböznek!
- *Általában ezt akarjuk, néha nem.* Az SML-ben előírhatjuk, hogy két alstruktúra valamely absztrakt típusa legyen azonos. Erre való a *típusmegosztási előírás* (type sharing constraint).
- `SPHERE` módosított specifikációja (a módosítást **félkövér szedés** jelöli):

```
signature SPHERE =
sig  structure Vector : VECTOR
     structure Point : POINT
     sharing type Point.Vector.vector = Vector.vector
     type sphere
     val sphere : Point.point * Vector.vector -> sphere
end
```

- A *típusmegosztási előírás* egy változatával, a *struktúramegosztási előírással* (structure sharing constraint) előírhatjuk, hogy két alstruktúra *összes* absztrakt típusa azonos legyen.

```
 ... sharing Point.Vector = Vector ...
```

Különböző modulokban specifikált absztrakt típusok megosztása (GEOMETRY)

- GEOMETRY módosított specifikációja (két változatban, a módosítást **félkövér szedés** jelöli):

```
signature GEOMETRY =
sig
    structure Point : POINT
    structure Sphere : SPHERE
    sharing type Point.point = Sphere.Point.point
    sharing type Point.Vector.vector = Sphere.Vector.vector
end
```

```
 ... sharing Point = Sphere.Point
     sharing Point.Vector = Sphere.Vector ...
```

- A megosztási előírás tehát garantálja, hogy
  - a típusegyenletek mindig teljesüljenek, amikor a GEOMETRY szignatúrát és összes komponensét megvalósítjuk;
  - a megosztási előírás által érintett összes absztrakt típus azonos legyen.
- VECTOR-t és POINT-ot *egy példányban* valósítjuk meg, és e példányokat *újra felhasználjuk* a magasabb szintű absztrakció során (ld. a következő fóliákon).

Példa: VECTOR, POINT, SPHERE és GEOMETRY egy 3D-s megvalósítása

- `structure Vector3D : VECTOR = ...`
- ```
  structure Point3D : POINT =
  struct
      structure Vector : VECTOR = Vector3D
          ...
  end
  ```
- ```
  structure Sphere3D : SPHERE =
  struct
      structure Vector : VECTOR = Vector3D
      structure Point : POINT = Point3D
          ...
  end
  ```
- ```
  structure Geom3D :> GEOMETRY =
  struct
      structure Point = Point3D
      structure Sphere = Sphere3D
  end
  ```
- Fordítási idejű típushibához vezetne egyes 2D-s elemek alkalmazása a 3D-s megvalósításban.
  Példa:

  ... structure Sphere = **Sphere2D** ...
  ```

A típusmegosztás elkerülése, a megosztási előírások számának csökkentése

- Fölvethető a kérdés, hogy a típusmegosztás elkerülhető-e a pont- és a vektor-absztrakció következtében létrejött példányszámok csökkentésével.
- A válasz: igen; azon az áron, hogy az egész programstruktúrát erőszakosan megváltoztatjuk.
- Első lépésként `SPHERE`-ben `Vector.vector`-t `Point.Vector.vector`-ra cseréljük:

```
signature SPHERE =
sig  structure Point : POINT
     type sphere
     val sphere : Point.point * Point.Vector.vector -> sphere
end
```

- Ezzel `GEOMETRY`-ben `sharing Point.Vector = Sphere.Vector` feleslegessé vált, a megosztási előírások száma eggyel csökkent:

```
signature GEOMETRY =
sig  structure Point : POINT
     structure Sphere : SPHERE
     sharing Point = Sphere.Point
end
```

A típusmegosztás elkerülése, a megosztási előírások számának csökkentése (folyt.)

- Ha a `Point` alstruktúra specifikációját is sikerülne feleslegessé tenni `SPHERE`-ben, egyáltalán nem kellene megosztási előírás. Ekkor ez maradna `SPHERE`-ből:

```
signature SPHERE =
sig
     type sphere
     val sphere : Point.point * Point.Vector.vector -> sphere
end
```

- Most `SPHERE`-ből hiányzik a `Point` specifikálása. Ha `Point` már definiálva van, akkor `Point` lefordítható.
- Csakhogy ettől kezdve a `SPHERE` szignatúra a `Point` struktúrától, azaz a `POINT` szignatúra *egy megvalósításától* függ. Pl. a 2D-s megvalósítástól, ami által a szignatúra dimenziótól való függetlensége megszűnt, az absztrakció csorbát szenvedett.
- Ez az út tehát járhatatlan, de semmiképpen nem javasolható.
- Az eset hasonló ahhoz, amikor egy függvénynek nem paraméterként, hanem globálisként adunk át egy értéket.
- A `Point` struktúra a `SPHERE` szignatúra *paraméterének* tekinthető az ismertetett értelemben.

A típusmegosztás elkerülése, a megosztási előírások számának csökkentése (folyt.)

- Egyetlen lehetőség maradt, hogy megszabaduljunk a megosztási előírásoktól, az, hogy a `GEOMETRY` szignatúrából töröljük a `Point` alstruktúrát. Ez lehetséges éppen, csak nem megoldás, mert csupán elhalasztja a problémát, de nem oldja meg a következők miatt.

  Pl. egy mértani elemeket megvalósító igazi programban több olyan elem van, amely a pont-fogalomra épít. Ezeknek feltétlenül szükségük lesz a megosztási előírásra.

- Lássunk egy további példát ennek alátámasztására, a `SEMI_SPACE` specifikációját. A `side` predikátummal vizsgálható meg, hogy *egy adott pont a tér melyik felében* van – feltéve, hogy ez lehetséges: ezért választjuk a `bool option` típusú eredményt.

```
signature SEMI_SPACE =
sig
    structure Point : POINT
    type semispace
    val side : Point.point * semispace -> bool option
end
```

- `SEMI_SPACE`-ből, `SPHERE`-hez hasonlóan, nem törölhetjük a `Point` alstruktúra specifikációját, ezért `Point`-ból mégiscsak két újabb példányt hozunk létre, azonosságukat pedig majd megosztási előírással kell kifejeznünk a `GEOMETRY` szignatúra új változatában.

A típusmegosztás elkerülése, a megosztási előírások számának csökkentése (folyt.)

- A `Point` alstruktúrák azonosságát tehát megosztási előírással kell kifejeznünk `EXTD_GEOMETRY`-ben, `GEOMETRY` kiegészített, de a `Point` alstruktúra nélküli változatában:

```
signature EXTD_GEOMETRY =
sig
    structure Sphere : SPHERE
    structure SemiSpace : SEMI_SPACE
    sharing Sphere.Point = SemiSpace.Point
end
```

- Amiről itt szó van, nem más, mint a moduláris programozás alapvető belső ellentmondása.
  - Egyrészt el akarjuk *szigetelni* egymástól a modulokat, hogy egymástól függetlenül legyenek kezelhetők, és ne befolyásolja az egyik modul megváltoztatása a többit. (A globális értékektől, változóktól való függés is az elszigetelés ellen hat!)
  - Másrészt a modulok kombinálásával programokat hozunk létre; ekkor a különböző modulok egyes programelemeinek azonosságát (SML: megosztási előírásokkal) ki kell kötnünk.
- A megosztási előírás olyan *eszköz,* amely valaminek a bekövetkezése (ti. a specifikáció rögzítése) után hoz létre kapcsolatot a különböző absztrakciók között, és teremti meg az egész program koherenciáját. Ez a megközelítés az SML – más nyelvekben ismeretlen – sajátossága.

Funktorok és a típusmegosztás specifikálása egy példán

- Korábban specifikáltuk a `GEOMETRY` szignatúrát és komponenseit.
- Mivel a célunk többféle (2D és 3D) megvalósításuk, érdemes őket funktorként definiálnunk.

```
functor PointFun
    (structure V : VECTOR) : POINT = ...

functor SphereFun
    (structure V : VECTOR
     structure P : POINT) : SPHERE =
struct
    structure Vector = V
    structure Point = P
        ...
end

functor GeomFun
    (structure P : POINT
     structure S : SPHERE) : GEOMETRY =
struct
    structure Point = P
    structure Sphere = S
end
```

Funktorok és a típusmegosztás specifikálása egy példán (folyt.)

- Az előző funktordefiníciókkal a 2D-s programcsomag így valósítható meg:

```
structure Vector2D : VECTOR = ...

structure Point2D : POINT =
     PointFun (structure V = Vector2D)

structure Sphere2D : SPHERE =
    SphereFun (structure V = Vector2D and P = Point2D)

structure Geom2D : GEOMETRY =
    GeomFun (structure P = Point2D and S = Sphere2D)
```

Funktorok és a típusmegosztás specifikálása egy példán (folyt.)

- Egyetlen baj van csupán: `SphereFun` és `GeomFun` típushibás! A hiba javítható: típusmegosztást kell előírnunk.

```
functor SphereFun
    (structure V : VECTOR
     structure P : POINT
     sharing P.Vector = V) : SPHERE =
struct
    structure Vector = V
    structure Point = P
        ...
end

functor GeomFun
    (structure P : POINT
     structure S : SPHERE
     sharing P.Vector = S.Vector
     sharing P = S.Point) : GEOMETRY =
struct
    structure Point = P
    structure Sphere = S
end
```

A típusmegosztás elkerülése funktor használatakor

- Most is felvetődik a kérdés: elkerülhető-e típusmegosztás?
- Igen, de azon az áron, hogy erőszakosan megváltoztatjuk a program szerkezetét.
- A típusmegosztás fő előnye, hogy közvetlenül és tömören fejezi ki az elvárt összefüggéseket, de a paraméterek szignatúrájának definiálásakor még nem kell velük foglalkozni. Ez a tulajdonság nagyon megkönnyíti az „előre gyártott” programrészek újrafelhasználását, hiszen ilyen esetekben a típusmegosztás konkrét igényét előre (azaz pl. a paraméterek definiálásakor) lehetetlen megmondani.
- Vegyük elő a már látott példát, amelyben a megosztási specifikációk számát egyre csökkentettük.

```
signature EXTD_GEOMETRY =
sig
    structure Sphere : SPHERE
    structure SemiSpace : SEMI_SPACE
    sharing Sphere.Point = SemiSpace.Point
end
```

A típusmegosztás elkerülése funktor használatakor (folyt.)

- Az EXTD_GEOMETRY szignatúrát ezzel a funktorral valósítjuk meg:

```
functor ExtdGeomFun
    (structure Sp : SPHERE
     structure Ss : SEMI_SPACE
     sharing Sp.Point = Ss.Point) =
struct
    structure Sphere = Sp
    structure SemiSpace = Ss
end
```

- Ahhoz, hogy a megosztási előírást elhagyhassuk a funktor paraméteréből, gondoskodnunk kell arról, hogy az EXTD_GEOMETRY szignatúra által előírt típusmegosztás teljesüljön.
- Megoldás lehet a POINT szignatúrát megvalósító struktúra „kiemelése”.
- Kétféle módon járhatunk el.

A típusmegosztás elkerülése funktor használatakor (folyt.)

- Az első lehetőség az, hogy `ExtdGeomFun` paraméterként `SPHERE` és `SEMI_SPACE` egy-egy megvalósítása helyett a közös elem, azaz `POINT` egy megvalósítását kapja, és a funktor törzsében hozza létre `SPHERE` és `SEMI_SPACE` egy-egy megvalósítását.
- Ehhez a `SphereFun` és a `SemiSpaceFun` funktorokat is megfelelően kell paraméterezni:

```
functor SphereFun
    (structure P : POINT) : SPHERE =
struct
    structure Vector = P.Vector
    structure Point = P
    ...
end

functor SemiSpaceFun
    (structure P : POINT) : SEMI_SPACE =
struct
    ...
end
```

A típusmegosztás elkerülése funktor használatakor (folyt.)

- Az `ExtdGeomFun` funktor első változatával, `ExtdGeomFun_1`-gyel több gond van:

```
functor ExtdGeomFun_1
    (structure P : POINT) : GEOMETRY =
struct
    structure Sphere = SphereFun (structure P = Point)
    structure SemiSpace = SemiSpaceFun (structure P = Point)
end
```

  - `ExtdGeomFun_1`-ben alstruktúra-definícióban fordul elő `SphereFun` és `SemiSpaceFun`, és ez olyan paraméterekre korlátozza `ExtdGeomFun_1`-et, amelyek e két funktorral állíthatók elő. – Ez erős korlátozás `ExtdGeomFun`-hoz képest, amely `SPHERE`, ill. `SEMI_SPACE` *bármely* megvalósításának alkalmazását lehetővé teszi.
  - `ExtdGeomFun_1`-nek paraméterként meg kell kapnia komponenseinek közös elemét, ill. elemeit (a példában a `POINT` szignatúrát megvalósító `P` struktúrát). Ez a megoldás kényelmetlenné válik, ha a programunk sok rétegből áll: a „ legtávolabbi” elemtől kezdve a teljes hierarchiát fel építenünk minden alkalommal.
  - Nincs igazi indok arra, hogy `ExtdGeomFun_1` miért éppen `POINT` egy megvalósítását kapja paraméterként. (Nem elég nyomós) oka az, hogy `ExtdGeomFun_1`-nek fel kell építenie az említett hierarchiát a megosztási előírások kielégítéséhez.

A típusmegosztás elkerülése funktor használatakor (folyt.)

- A második lehetőség az, hogy a paraméterként átadott közös elem, azaz `POINT` megvalósításához kötjük `SPHERE`, ill. `SEMI_SPACE` (ugyancsak paraméterként átveendő) megvalósítását, és így érjük el a típusegyenletek teljesülését.
- `ExtdGeomFun_2` alábbi deklarációja kielégíti a követelményeket, de láthatóan nincs semmi előnye a megosztási előírásokat tartalmazó kiinduló változathoz, `ExtdGeomFun`-hoz képest.

```
functor ExtdGeomFun_2
    (structure P : POINT
     structure Sp : SPHERE where Point = P
     structure Ss : SEMI_SPACE where Point = P) =
struct
    structure Sphere = Sp
    structure SemiSpace = Ss
end
```

- Inkább hátránynak tekinthető, hogy az eredeti változathoz képest egy harmadik paramétert vezettünk be, amelynek az egyetlen szerepe az, hogy elhagyhassuk a megosztási előírást.

A típusmegosztás elkerülése funktor használatakor (folyt.)

- `ExtdGeomFun_2` rafináltabb változata `ExtdGeomFun_3` és `ExtdGeomFun_4`. Mindkettőnek csak két paraméterre van szüksége azáltal, hogy a kettő közül valamelyiket bizonyos értelemben kiemeltük, és előírtuk, hogy a másiknak vele kompatíbilisnek kell lennie.

```
functor ExtdGeomFun_3
    (structure Sp : SPHERE
     structure Ss : SEMI_SPACE where Point = Sp.Point) =
struct
    structure Sphere = Sp
    structure SemiSpace = Ss
end

functor ExtdGeomFun_4
    (structure Ss : SEMI_SPACE
     structure Sp : SPHERE where Point = Ss.Point) =
struct
    structure Sphere = Sp
    structure SemiSpace = Ss
end
```

A típusmegosztás elkerülése funktor használatakor (folyt.)

- E két utóbbi megoldásnak megvannak ugyanazok az előnyei, mint a megosztási előírást alkalmazó megoldásnak. De meg kellett törnünk a megoldás természetes szimmetriáját. Ez mondanivalónk lényege:
- A megosztási előírással a programozó *szimmetrikus helyzetet szimmetrikus módon* oldhat meg.
- A programozó helyett a fordítóprogram töri meg a szimmetriát, amikor ilyen vagy olyan megvalósítást választ. A programozó nem kényszerül arra, hogy önkényes, semmivel alá nem támasztható döntést hozzon.