Deklaratív Programozás

Szeredi Péter[1] Hanák Péter[2]

[1] szeredi@cs.bme.hu
BME Számítástudományi és Információelméleti Tanszék

[2] hanak@emt.bme.hu
BME Egészségipari Mérnöki Tudásközpont

2018. ősz

Az előadók köszönetüket fejezik ki Kápolnai Richárdnak

I. rész

Bevezetés

A tárgy témája

- Deklaratív programozási nyelvek – gyakorlati megközelítésben
- Két fő irány:
  - funkcionális programozás **Erlang** nyelven
  - logikai programozás **Prolog** nyelven
- Bevezetésként röviden foglalkozunk a C++ egy deklaratív résznyelvével, a Cékla nyelvvel – C(É) deKLAratív része
- A **két fő nyelv**ként az **Erlang** és a **Prolog** nyelvekre hivatkozunk majd (lásd követelmények)

Tartalom

Honlap, ETS, levelezési lista

- Honlap: `https://dp.iit.bme.hu`
  a jelen félév honlapja: `https://dp.iit.bme.hu/dp-current`
- ETS, az Elektronikus TanárSegéd
  `https://dp.iit.bme.hu/ets`
- Levelezési lista:
  `http://lists.iit.bme.hu/mailman/listinfo/dp-l`
- A listára automatikusan felvesszük a tárgy hallgatóit az ETS-beli címükkel. Címet módosítani csak az ETS-ben lehet.
- A listára levelet küldeni a `dp-l@iit.bme.hu` címre lehet.
- Csak a feliratkozási címről küldött levelek jutnak el moderátori jóváhagyás nélkül a listatagokhoz.

Prolog-jegyzet

- Szeredi Péter, Benkő Tamás: Deklaratív programozás. Bevezetés a logikai programozásba. Budapest, 2005
  - Elektronikus változata letölthető a honlapról (ps, pdf)
  - Nyomtatott változata kifogyott
  - Kellő számú további igény esetén megszervezzük az újranyomtatást
- A SICStus Prolog kézikönyve (angol):
  `http://www.sics.se/isl/sicstuswww/site/documentation.html`

Magyar nyelvű Prolog szakirodalom

- Farkas Zsuzsa, Futó Iván, Langer Tamás, Szeredi Péter:
  Az MProlog programozási nyelv.
  Műszaki Könyvkiadó, 1989
  jó bevezetés, sajnos az MProlog beépített eljárásai nem szabványosak.
- Márkusz Zsuzsa: Prologban programozni könnyű.
  Novotrade, 1988
  mint fent
- Futó Iván (szerk.): Mesterséges intelligencia. (9.2 fejezet, Szeredi Péter)
  Aula Kiadó, 1999
  csak egy rövid fejezet a Prologról
- Peter Flach: Logikai Programozás. Az intelligens következtetés példákon keresztül.
  Panem — John Wiley & Sons, 2001
  jó áttekintés, inkább elméleti érdeklődésű olvasók számára

Angol nyelvű Prolog szakirodalom

- Logic, Programming and Prolog, 2nd Ed., by Ulf Nilsson and Jan Maluszynski, Previously published by John Wiley & Sons Ltd. (1995)
  Letölthető a `http://www.ida.liu.se/~ulfni/lpp` címről.
- Prolog Programming for Artificial Intelligence, 3rd Ed., Ivan Bratko, Longman, Paperback - March 2000
- The Art of PROLOG: Advanced Programming Techniques, Leon Sterling, Ehud Shapiro, The MIT Press, Paperback - April 1994
- Programming in PROLOG: Using the ISO Standard, C.S. Mellish, W.F. Clocksin, Springer-Verlag Berlin, Paperback - July 2003

Erlang-szakirodalom (egy kivételével angolul)

- Simon St. Laurent: Introducing Erlang. Getting Started in Functional Programming. O´Reilly, 2013.
  `http://shop.oreilly.com/product/0636920025818.do`
- Learn You Some Erlang for great good! (online is olvasható)
  `http://learnyousomeerlang.com`
- Joe Armstrong: Programming Erlang. Software for a Concurrent World. Second Edition. The Pragmatic Programmers, 2013.
  `http://www.pragprog.com/book/jaerlang2/programming-erlang`
- Francesco Cesarini, Simon Thompson: Erlang Programming. O´Reilly, 2009.
  `http://oreilly.com/catalog/9780596518189/`

További irodalom:

- On-line Erlang documentation
  `http://erlang.org/doc.html` vagy `erl -man <module>`
- Wikibooks on Erlang Programming
  `http://en.wikibooks.org/wiki/Erlang_Programming`
- ERLANG összefoglaló magyarul
  `http://nyelvek.inf.elte.hu/leirasok/Erlang/`

Fordító- és értelmezőprogramok

- SICStus Prolog – 4.4 verzió (licensz az ETS-en keresztül kérhető)
  A kiegészítő komponensek (Jasper, Tcl/Tk és ODBC) installálására nincs szükség, glibc esetén a megadottnál frissebb verzió is jó
- Más Prolog rendszer is használható (pl. SWI Prolog `http://www.swi-prolog.org/`, Gnu Prolog `http://www.gprolog.org/`), de a házi feladatokat csak akkor fogadjuk el, ha azok a SICStus rendszerben (is) helyesen működnek.
- Erlang (szabad szoftver)
- Letöltési információ a honlapon (Linux, Windows)
- Webes Prolog gyakorló felület az ETS-ben (ld. honlap)
- Kézikönyvek HTML-, ill. PDF-változatban
- Emacs szövegszerkesztő Erlang-, ill. Prolog-módban (Linux, Windows)
- Eclipse fejlesztői környezet (SPIDER, erlIDE)

Deklaratív programozás: követelmények

Nagy házi feladat (NHF)

- Programozás mindkét fő nyelven (Prolog, Erlang)
- Mindenkinek önállóan kell kódolnia (programoznia)!
- Hatékony (időlimit!), jól dokumentált („kommentezett”) programok
- A két programhoz közös, 5–10 oldalas fejlesztői dokumentáció PDF-ben
- Kiadás legkésőbb a 4. héten a honlapon, letölthető keretprogrammal
- Beadás a 9. héten; elektronikus úton (ld. honlap)
- A beadáskor és a pontozáskor külön-külön tesztsorozatot használunk (nehézségben hasonlókat, de nem azonosakat)
- Azok a programok, amelyek megoldják a tesztesetek 80%-át, *létraversenyen* vesznek részt (hatékonyság, gyorsaság plusz pontokért)

Deklaratív programozás: követelmények (folyt.)

Nagy házi feladat (folyt.)

- A beadási határidőig többször is beadható, csak az utolsót értékeljük
- Pontozása mindkét fő nyelvből:
  - helyes (azaz jó eredményt időkorláton belül adó) futás esetén a 10 teszteset mindegyikére 0,5-0,5 pont, összesen max. 5 pont
  - a dokumentációra, a kód olvashatóságára, kommentezettségére max. 2,5 pont
  - tehát nyelvenként összesen max. 7,5 pont szerezhető
- A NHF súlya az osztályzatban: 15% (a 100 pontból 15)
- A megajánlott jegy előfeltétele, hogy a hallgató nagy házi feladata mindkét fő nyelvből bejusson a létraversenybe (minimum 80%-os teljesítmény)
- A NHF beadása **nem kötelező, de ajánlott!**

Deklaratív programozás: követelmények (folyt.)

Kis házi feladatok (KHF)

- 3 feladat Prologból, 3 Erlangból, 1 Céklából
- Beadás elektronikus úton (ld. honlap)
- Egy KHF beadása érvényes, ha minden tesztesetre lefut
- **Kötelező** a KHF-ek legalább 50%-ának érvényes beadása, és legalább egy érvényes KHF beadása Prologból is és Erlangból is. Azaz kötelező 1 Prolog, 1 Erlang, és 1 bármilyen (összesen 3) KHF érvényes beadása.
- Minden feladat jó megoldásáért 1-1 jutalompont (azaz a 100 alappont feletti pont) jár
- Minden KHF-nak külön határideje van, pótlási lehetőség nincs
- A KHF-k egyre összetettebbek és egymásra épülnek – érdemes minél előbb elkezdeni a KHF-ek beadását!
- A házi feladatot önállóan kell elkészíteni! Másolás esetén kötelesek vagyunk fegyelmi eljárást indítani: `http://www.kth.bme.hu/document/189/original/bme_rektori_utasitas_05.pdf` ("Beadandó feladat ... elkészíttetése mással")

Deklaratív programozás: követelmények (folyt.)

Gyakorlatok

- 2. héttől kezdődően 2 órás gyakorlatok, az időpontok (hamarosan) olvashatók a honlapon
- Laptop használata megengedett
- További Prolog gyakorlási lehetőség az ETS rendszerben (gyakorló feladatok, lásd honlap)

Deklaratív programozás: követelmények (folyt.)

Nagyzárthelyi, pótzárthelyi (NZH, PZH, PPZH)

- A zárthelyi **kötelező**, kivéve megajánlott jegy esetén.
  A megajánlott jegy feltételei:
  - Alapfeltételek: KHF-ek teljesítése; NHF „megvédése”
  - Jó (4): a nagy házi feladat mindkét fő nyelvből bejut a létraversenybe
  - Jeles (5): legalább 40%-os eredmény a létraversenyen, mindkét fő nyelvből
- A zárthelyin semmilyen jegyzet, segédlet nem használható
- 40%-os szabály (nyelvenként a maximális részpontszám 40%-a kell az eredményességhez)
- NZH, PZH: várhatóan a 12.-13. héten, később meghirdetendő időpontban
- A PPZH-ra a pótlási időszakban egyetlen alkalommal adunk lehetőséget
- Az NZH anyaga az addig előadott tananyag
- A PZH, ill. a PPZH anyaga azonos az NZH anyagával
- A zárthelyi súlya az osztályzatban: 85% (a 100 pontból 85)

Tartalom

Bevezető példa: adott értékű kifejezés előállítása

- A feladat: írjunk programot a következő feladvány megoldására:
  - Adott számokból a négy alapművelet (+, -, *, /) segítségével építsünk egy megadott értékű aritmetikai kifejezést!
    (Feltételezhető, hogy az adott számok mind különböznek.)
  - A számok nem „tapaszthatók” össze hosszabb számokká
  - Mindegyik adott számot pontosan egyszer kell felhasználni, sorrendjük tetszőleges lehet
  - Nem minden alapműveletet kell felhasználni, egyfajta alapművelet többször is előfordulhat
  - Zárójelek tetszőlegesen használhatók
- Példák a fenti szabályoknak megfelelő, az 1, 3, 4, 6 számokból felépített aritmetikai kifejezésekre: $1 + 6 * (3 + 4)$, $(1 + 3)/4 + 6$
- Viszonylag nehéz megtalálni egy olyan aritmetikai kifejezést, amely az 1, 3, 4, 6 számokból áll, és értéke 24

Hogyan ábrázoljuk az aritmetikai kifejezéseket?

- Első ötlet: füzér (string)
- Egy könnyebben kezelhető, strukturált ábrázoláshoz írjuk fel az aritmetikai kifejezés – ⟨ akif ⟩ – szintaxisát:

  ⟨ akif ⟩ ::= ⟨ szám ⟩ |
  (⟨ akif ⟩ ⟨ művelet ⟩ ⟨ akif ⟩)
  ⟨ művelet ⟩ ::= + | - | * | /

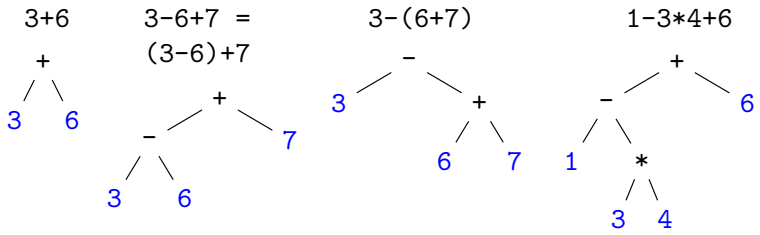
  (az egyértelműség kedvéért minden részkifejezést zárójelbe teszünk)
- Az ⟨ akif ⟩ adatstruktúra egy lehetséges megvalósítása C nyelven:

```
enum akif_fajta {Number, Plus, Minus, Times, Div};
struct akif { enum akif_fajta fajta;
              union { struct { int ertek;
                             } szam;
                      struct { struct akif *bal;
                               struct akif *jobb;
                             } osszetett;
                    } u;
            };
```


Az aritmetikai kifejezések matematikai absztrakciója

Milyen matematikai struktúra feleltethető meg ⟨ akif ⟩-nek?

- Egy bináris fa
  - melynek levelei számokkal vannak címkézve
  - csomópontjai pedig a négy alapművelet valamelyikével
- Példák:



A bevezető példa megoldásának terve

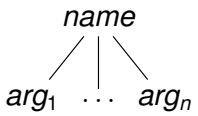
- „Generate-and-test”: generáljuk le az adott levelekkel bíró összes ⟨ akif ⟩-et, majd válogassuk ki azokat, amelyek értéke az adott szám
- Leegyszerűsítve, pl. levelek: 1, 2, 3; műveletek: csak a - és a *
- Az összes ⟨ akif ⟩ előállítása (jelölje n a levelek, m a műveletek számát):
  1. Állítsuk elő az összes adott levélszámú cimkézetlen bináris fát (jelölje f ezek számát)
  2. A csomópontokba minden lehetséges módon helyezzünk el műveleti jeleket ($f \cdot m^{n-1}$ fa)
  3. Állítsuk elő a levelek összes permutációját ($n!$ db.)
  4. Minden csomópont-címkézett fa leveleibe írjunk be minden permutációt ($f \cdot m^{n-1} \cdot n!$ darab ⟨ akif ⟩)
- Számítsuk ki az így kapott összes ⟨ akif ⟩ értékét, adjuk vissza azokat, amelyekre ez a megadott számmal egyezik

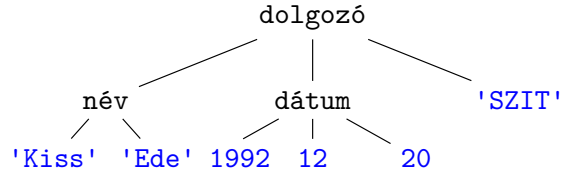
Tartalom

A Prolog nyelv adatfogalma

A Prolog adatokat Prolog kifejezésnek hívjuk (angolul: term). Fajtái:

- egyszerű kifejezés: számkonstans (pl. 3), névkonstans (pl. `alma`, `'SZIT'`), vagy változó (pl. `X`)
- összetett kifejezés (rekord, struktúra): $name(arg_1, \ldots, arg_n)$
  - *name* egy névkonstans, az arg_i mezők tetsz. Prolog kifejezések
  - példa: `dolgozó(név('Kiss','Ede'),dátum(1992,12,20),'SZIT')`.
  - Az összetett kifejezések valójában fastruktúrát alkotnak:



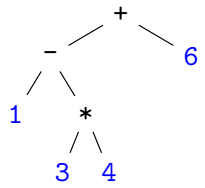


- a Prolog változó a matematikai változónak felel meg: egy, esetleg még ismeretlen adatot jelent, (legfeljebb) egyszer kaphat értéket; de megjelenhet összetett kifejezés részeként (pointer)

Szintaktikus „édesítőszerek” Prologban

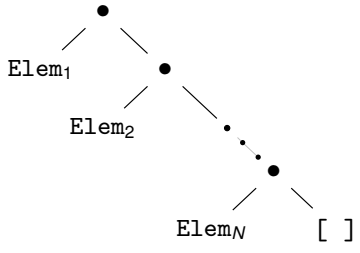
- Egy- és kétargumentumú struktúrák operátoros (infix, prefix stb.) írásmódja: `1+2≡+(1,2)`

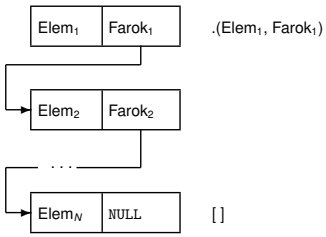
```
| ?- write_canonical(1-3*4+6).
+(-(1,*(3,4)),6)
```



- Listák, mint speciális struktúrák

```
| ?- write_canonical([a,b,c]).
'.'(a,'.'(b,'.'(c,[])))
```





Aritmetikai kifejezések kezelése Prologban – ellenőrzés

Írjunk egy `kif` nevű egyargumentumú Prolog eljárást!
A `kif(X)` hívás sikeresen fut le, ha `X` egy olyan kifejezés, amely számokból a négy alapművelet (+, -, *, /) segítségével épül fel (röviden, ha `X` **helyes**).

- Az alábbi sorokat helyezzük el pl. a `kif0.pl` file-ban:

```
% kif(K): K számokból a négy alapművelettel képzett helyes kifejezés.
kif(K) :-   number(K).      % K helyes, ha K szám. (number beépített elj.)
kif(X+Y) :- kif(X), kif(Y). % X+Y helyes, ha X helyes és Y helyes
kif(X-Y) :- kif(X), kif(Y).
kif(X*Y) :- kif(X), kif(Y).
kif(X/Y) :- kif(X), kif(Y).
```

- Betöltése: `| ?- compile(kif0).` vagy `| ?- consult(kif0).`
- Futtatás nyomkövetés nélkül és nyomkövetéssel (`consult`-ot követően):

```
| ?- kif(alma).
no
| ?- kif(1+2).
yes
| ?-
```

```
| ?- trace, kif(alma).
        1      1 Call: kif(alma) ?
        2      2 Call: number(alma) ?
        2      2 Fail: number(alma) ?
        1      1 Fail: kif(alma) ?
no
| ?-
```

Aritmetikai kifejezések ellenőrzése – továbbfejlesztett változat

- A `kif` Prolog eljárás segédeljárást használó változata:

```
% kif2(K): K számokból, a négy alapművelettel képzett kifejezés.
kif2(Kif) :-
        number(Kif).
kif2(Kif) :-
        alap4(X, Y, Kif),
        kif2(X), kif2(Y).
```

- Az `alap4` segédeljárás:

```
% alap4(X, Y, Kif): A Kif kifejezés az X és Y kifejezésekből
%                   a négy alapművelet egyikével áll elő.
alap4(X, Y, X+Y).                alap4(X, Y, X-Y).
alap4(X, Y, X*Y).                alap4(X, Y, X/Y).
```

- Ekvivalens, ún. diszjunkciót használó változat („;” ≡ „vagy”):

```
alap4(X, Y, Kif) :- (   Kif = X+Y   ;   Kif = X-Y
                    ;   Kif = X*Y   ;   Kif = X/Y
                    ).
```

`A=B` egy infix alakban írható beépített eljárás, jelentése:
`A` és `B` azonos alakra hozható, esetleges változóbehelyettesítésekkel.

Aritmetikai kifejezés levéllistájának előállítása

- A `kif_levelek` eljárás ellenőrzi a kifejezést és előállítja levéllistáját

```
% kif_levelek(Kif, L): A számokból alapműveletekkel felépülő Kif
%                       kifejezés leveleiben levő számok listája L.
kif_levelek(Kif, L) :-
        number(Kif), L = [Kif].  % L egyelemű, Kif-ből álló lista
kif_levelek(Kif, L) :-
        alap4(K1, K2, Kif),
        kif_levelek(K1, LX),
        kif_levelek(K2, LY),
        append(LX, LY, L).

| ?- kif_levelek(2/3-4*(5+6), L).     ⟶ L = [2,3,4,5,6]
```

- Az `append` egy beépített eljárás, fejkommentje és példafutása

```
% append(L1, L2, L3): Az L1 és L2 listák összefűzése az L3 lista.

| ?- append([1,2], [3,4], L).        ⟶ L = [1,2,3,4]
```


Az `append` eljárás többirányú használata

- Az `append` eljárás a fejkommentje által leírt *relációt* valósítja meg, sokféle módon használható, és több választ is adhat (új válasz kérése `;`-vel)

```
% append(L1, L2, L3): Az L1 és L2 listák összefűzése az L3 lista.

| ?- append(L, [3], [1,2,3]).   % [1,2,3] utolsó eleme-e 3,
L = [1,2] ? ;                   % és milyen L lista van előtte?
no                              % nincs TÖBB válasz
| ?- append([1,2], L, [1,2,3]). % [1,2,3] prefixuma-e [1,2]?
L = [3] ? ;  no
| ?- append(L1, L2, [1,2,3]).   % [1,2,3] hogyan bontható két részre?
L1 = [], L2 = [1,2,3] ? ;
L1 = [1], L2 = [2,3] ? ;
L1 = [1,2], L2 = [3] ? ;
L1 = [1,2,3], L2 = [] ? ; no
| ?- append(L, [2], L2).
L = [], L2 = [2] ? ;
L = [_A], L2 = [_A,2] ? ;
L = [_A,_B], L2 = [_A,_B,2] ? ; % végtelen sok válasz, problémás ...
...
```


Adott levéllistájú aritmetikai kifejezések előállítása

- A `kif_levelek` eljárás sajnos nem használható „visszafelé”, végtelen ciklusba esik, lásd pl. `| ?- kif_levelek(Kif, [1]).`
- Ez javítható a hívások átrendezésével és új feltételek beszúrásával:

```
% kif_levelek(+Kif, -L):
% Kif levéllistája L.
kif_levelek(Kif, L) :-
        number(Kif),
        L = [Kif].
kif_levelek(Kif, L) :-
        alap4(K1, K2, Kif),

        kif_levelek(K1, L1),
        kif_levelek(K2, L2),
        append(L1, L2, L).
```

```
% levelek_kif(+L, -Kif):
% Kif levéllistája L.
levelek_kif(L, Kif) :-
        L = [Kif],
        number(Kif).
levelek_kif(L, Kif) :-
        append(L1, L2, L),
        L1 \= [], L2 \= [],
        % L1, L2 nem-üres listák
        levelek_kif(L1, K1),
        levelek_kif(L2, K2),
        alap4(K1, K2, Kif).
```

```
| ?- levelek_kif([1,3,4], K).
K = 1+(3+4) ? ; K = 1-(3+4) ? ; K = 1*(3+4) ? ; K = 1/(3+4) ? ;
K = 1+(3-4) ? ; K = 1-(3-4) ? ; K = 1*(3-4) ? ; K = 1/(3-4) ? ; ...
```

Adott értékű kifejezés előállítása

- Bevezető példánk megoldásához szükséges további nyelvi elemek
  - A `lists` könyvtárban található `permutation` eljárás:

    % permutation(L, PL): PL az L lista permutációja.
  - Az `=:=` (`=\=`) beépített aritmetikai eljárás mindkét argumentumában aritmetikai kifejezést vár, azokat kiértékeli, és csakkor sikerül, ha az értékek aritmetikailag megegyeznek (különböznek), pl.

    `| ?- 4+2 =\= 3*2.` ⟶ `no` `| ?- 2.0 =:= 2.` ⟶ `yes`

    `| ?- 8/3 =:= 2.666666666666666.` ⟶ `no`
- A példa „generál és ellenőriz” (generate-and-test) stílusú megoldása:

```
% levelek_ertek_kif(L, Ertek, Kif): Kif az L listabeli számokból
% a négy alapművelet segítségével felépített olyan kifejezés,
% amelynek értéke Ertek.
levelek_ertek_kif(L, Ertek, Kif) :-
        permutation(L, PL), levelek_kif(PL, Kif), Kif =:= Ertek.

| ?- levelek_ertek_kif([1,3,4], 11, Kif).
Kif = 3*4-1 ? ; Kif = 4*3-1 ? ; no
```


Adott értékű kifejezés előállítása – a teljes kód

```
:- use_module(library(lists), [permutation/2]). % importálás

% levelek_ertek_kif(L, Ertek, Kif): Kif az L listabeli számokból
% a négy alapművelettel felépített, Ertek értékű kifejezés.
levelek_ertek_kif(L, Ertek, Kif) :-
        permutation(L, PL), levelek_kif(PL, Kif), Kif =:= Ertek.

% levelek_kif(L, Kif): Az alapműveletekkel felépített Kif levéllistája L.
levelek_kif(L, Kif) :-
        L = [Kif], number(Kif).
levelek_kif(L, Kif) :-
        append(L1, L2, L),
        L1 \= [], L2 \= [], levelek_kif(L1, K1), levelek_kif(L2, K2),
        alap4_0(K1, K2, Kif).

% alap4_0(X, Y, K): K X-ből és Y-ból értelmes alapművelettel áll elő.
alap4_0(X, Y, X+Y).
alap4_0(X, Y, X-Y).
alap4_0(X, Y, X*Y).
alap4_0(X, Y, X/Y) :- Y =\= 0.      % a 0-val való osztás kiküszöbölése
```


Tartalom

Erlang-kifejezések

- Erlang: nem logikai, hanem *funkcionális* programnyelv
- Összetett Erlang-kifejezéseket, függvényhívásokat értékelünk ki:

```
1> [1-3*4+6, 1-3/4+6].
[-5,6.25]
2> lists:seq(1,3).
[1,2,3]
3> {1/2, '+', 1+1}.
{0.5,'+',2}
```

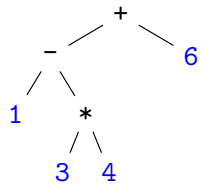
- *Hármas:* $\{K_1, K_2, K_3\}$, ahol K_i tetszőleges Erlang-kifejezés. *Pár:* $\{K_1,K_2\}$.
- A *listanézet* Erlang-kifejezés a matematikai halmaznézet imitációja:

```
4> [X || X <- [1,2,3] ].          %  {x|x ∈ {1,2,3}}
[1,2,3]
5> [X || X <- [1,2,3], X*X > 5].  %  {x|x ∈ {1,2,3}, x^2 > 5}
[3]
6> [{X,Y} || X <- [1,2,3], Y <- lists:seq(1,X)].
                                  % {(x,y)|x ∈ {1,2,3}, y ∈ {1 .. x}}
[{1,1},{2,1},{2,2},{3,1},{3,2},{3,3}]
```

Aritmetikai kifejezések ábrázolása

- Primitívebb a Prolognál: nem tudja automatikusan se ábrázolni, se felsorolni az aritmetikai kifejezéseket
- A Prolog egy aritmetikai kifejezést faként ábrázol:

```
| ?- write_canonical(1-3*4+6).
+(-(1,*(3,4)),6)
yes
```



- Az Erlangban explicit módon fel kell sorolnunk az összes ilyen fát, és explicit módon ki kell őket értékelni
- A példaprogramunkban a fenti aritmetikai kifejezést (önkényesen) egymásba ágyazott hármasokkal ábrázoljuk:

```
{{1, '-', {3, '*', 4}}, '+', 6}
```


Adott méretű fák felsorolása

- Faelrendezések felsorolása például csupa 1-esekből és '+' műveletekből
- Összesen 5 db 4 levelű fa van:

```
{1,'+',{1,'+',{1,'+',1}}}
{1,'+',{{1,'+',1},'+',1}}
{{1,'+',1},'+',{1,'+',1}}
{{1,'+',{1,'+',1}},'+',1}
{{{1,'+',1},'+',1},'+',1}
```

Erlang-kód

```
% @type fa() = 1 | {fa(),'+',fa()}.
% fak(N) = az összes N levelű fa listája.
fak(1) ->
    [1];
fak(N) ->
    [ {BalFa,'+',JobbFa}
      || I <- lists:seq(1, N-1),
         BalFa <- fak(I),
         JobbFa <- fak(N-I)    ].
```

Matematikai nézet

Fa definíciója:

- 1 levelet tartalmazó fák halmaza: $\{1\}$
- n levelet tartalmazóké:
  $\{ (b,\text{'+'},j) \mid i \in [1\,..\,n-1], b \in \text{fak}(i), j \in \text{fak}(n-i) \}$

Adott levéllistájú aritmetikai kifejezések felsorolása

- Segédfv: egy lista összes lehetséges kettévágása nem üres listákra

```
1> kif:kettevagasok([1,3,4,6]).
[ {[1],[3,4,6]}, {[1,3],[4,6]}, {[1,3,4],[6]} ]
```

- Kifejezések adott számokból *adott sorrendben*, 4 alapműveletből:

Erlang-kód

```
% @type kif() = {kif(),muvelet(),kif()}
%              | integer().
% @type muvelet() = '+' | '-' | '*' | '/'.
% kifek(L) = L levéllistájú kifek listája.
kifek([H]) ->
  [H];
kifek(L) ->
  [ {B,M,J}
    || {LB,LJ} <- kettevagasok(L),
       B <- kifek(LB),
       J <- kifek(LJ),
       M <- ['+', '-', '*', '/']
  ].
```

Matematikai nézet

Kifejezés (kif) definíciója (az előző általánosítása):

- Egyetlen h levelet tartalmazó kifek: $\{h\}$
- L levéllistájú kifek:
  $\{(b,m,j) \mid L_B \oplus L_J = L, b \in \text{kifek}(L_B), j \in \text{kifek}(L_J), m \in \{+,-,*,/\}\}$

Utolsó lépés: a kifejezések explicit kiértékelése

```
% ertek(K) = a K kifejezés számértéke.
ertek({B,Muvelet,J}) ->
    erlang:Muvelet(ertek(B), ertek(J));
ertek(I) ->
    I.
```

- Példák:

```
1> erlang:'+'(1,3).
4
2> kif:ertek(3).
3
3> kif:ertek({{1,'-',{3,'*',4}},'+',6}).
-5
4> kif:ertek({1,'/',0}).
** exception error: ...
```

```
% permutaciok(L) = az L lista elemeinek minden permutációja.
5> kif:permutaciok([1,3,4]).
[[1,3,4], [1,4,3], [3,1,4], [3,4,1], [4,1,3], [4,3,1]]
```

Adott értékű kifejezések felsorolása – teljes kód

`kif:megoldasok([1,3,4,6], 24).`

```
-module(kif).
-compile([export_all]).

megoldasok(Szamok, Eredmeny) ->
    [Kif || L <- permutaciok(Szamok),
            Kif <- kifek(L),
            (catch ertek(Kif)) == Eredmeny].
```

- `catch`: 0-val való osztásnál keletkező kivétel miatt

```
kifek([H]) -> [H];
kifek(L) -> [ {B,M,J} || {LB,LJ} <- kettevagasok(L),
                         B <- kifek(LB),
                         J <- kifek(LJ),
                         M <- ['+', '-', '*', '/']  ].
ertek({B,M,J}) -> erlang:M(ertek(B), ertek(J));
ertek(I) -> I.
kettevagasok(L) -> [ {LB,LJ} || I <- lists:seq(1, length(L)-1),
                                {LB,LJ} <- [lists:split(I, L)]  ].
permutaciok([]) -> [[]];
permutaciok(L) -> [[H|T] || H <- L, T <- permutaciok(L--[H])].
```


II. rész

Cékla: deklaratív programozás C++-ban

Tartalom

Imperatív és deklaratív programozási szemlélet

- Imperatív program
  - felszólító módú, utasításokból áll
  - változó: változtatható értékű memóriahely
  - C nyelvű példa:

```
int pow(int A, int N) {  // pow(A,N) = A^N
  int P = 1;             // Legyen P értéke 1!
  while (N > 0) {        // Amíg N>0 ismételd ezt:
    N = N-1;             //    Csökkentsd N-et 1-gyel!
    P = P*A;    }        //    Szorozd P-t A-val!
  return P;           }  // Add vissza P végértékét
```

- Deklaratív program
  - kijelentő módú, egyenletekből, állításokból áll
  - változó: egyetlen, fix, a programírás idején ismeretlen értékkel bír
  - Erlang példa:

```
pow(A,N) -> if                    % Elágazás
            N==0 -> 1;            % Ha N == 0, akkor 1
            N>0  -> A * pow(A, N-1)  % Ha N>0, akkor A*A^(N-1)
            end.                  % Elágazás vége
```

Deklaratív programozás imperatív nyelven

Lehet pl. C-ben is deklaratívan programozni

ha nem használunk: értékadó utasítást, ciklust, ugrást stb.,
amit használhatunk: csak konstans változók, (rekurzív) függvények, if-then-else

- Példa (a `pow` függvény deklaratív változata a `powd`):

```
// powd(A,N) = A^N
int powd(const int A, const int N) {
  if (N > 0)                    // Ha N > 0
    return A * powd(A,N-1);     // akkor A^N = A*A^(N-1)
  else
    return 1;                   // egyébként A^N = 1
}
```

- A (fenti típusú) rekurzió költséges, nem valósítható meg konstans tárigénnyel `:-(`

```
powd(10,3) :  10*powd(10,2) :  10*(10*powd(10,1)) :
  10*(10*(10  *1))
```

veremben tárolva

Tartalom

Hatékony deklaratív programozás

- A rekurziónak van egy hatékonyan megvalósítható változata
- Példa: döntsük el, hogy egy `A` szám előáll-e egy `B` szám hatványaként:

```
/* ispow(A,B) = létezik i, melyre B^i = A.
 * Előfeltétel: A > 0, B > 1 */
```

```
int ispow(int A, int B) {

  if (A == 1) return true;
  if (A%B==0) return ispow(A/B, B);
              return false;
}
```

```
int ispow(int A, int B) {
again:
  if (A == 1) return true;
  if (A%B==0) {A=A/B; goto again;}
              return false;
}
```

- Itt a színezett rekurzív hívás átírható iteratív kódra: értékadással és ugrással helyettesíthető!
- Ez azért tehető meg, mert a rekurzióból való visszatérés után *azonnal* kilépünk az adott függvényhívásból.
- Az ilyen függvényhívást **jobbrekurzió**nak vagy **terminális rekurzió**nak vagy **farokrekurzió**nak nevezzük (*„tail recursion”*)
- A Gnu C fordító (GCC) megfelelő optimalizálási szint mellett a rekurzív definícióból is a nem-rekurzív (jobboldali) kóddal azonos kódot generál!

Jobbrekurzív függvények

- Lehet-e jobbrekurzív kódot írni a hatványozási (`pow(A,N)`) feladatra?
  - A gond az, hogy a rekurzióból „kifelé jövet” már nem csinálhatunk semmit
  - Tehát a végeredménynek az utolsó hívás belsejében elő kell állnia!
  - A megoldás: segédfüggvény definiálása, amelyben egy vagy több ún. gyűjtőargumentumot (*akkumulátort*) helyezünk el.
- A `pow(A,N)` jobbrekurzív (iteratív) megvalósítása:

```
// Segédfüggvény: powi(A, N, P) = P*A^N
int powi(const int A, const int N, const int P) {
  if (N > 0)
    return powi(A, N-1, P*A);
  else
    return P;
}

int powi(const int A, const int N){
  return powi(A, N, 1);
}
```

Tartalom

Cékla 2: A „CÉ++” nyelv egy deKLAratív része

- Megszorítások:
  - Típusok: csak `int`, lista vagy függvény (lásd később)
  - Utasítások: `if-then-else`, `return`, blokk, kifejezés
  - Változók: csak egyszer, deklarálásukkor kaphatnak értéket (`const`)
  - Kifejezések: változókból és konstansokból kétargumentumú operátorokkal, függvényhívásokkal és feltételes szerkezetekkel épülnek fel
    - ⟨ aritmetikai-op ⟩: `+ | - | * | / | % |`
    - ⟨ hasonlító-op ⟩: `< | > | == | != | >= | <=`
- C++ fordítóval is fordítható a `cekla.h` fájl birtokában: láncolt lista kezelése, függvénytípusok és kiírás
- Kiíró függvények: főleg nyomkövetéshez, ugyanis *mellékhatásuk* van!
  - `write(X);` Az `X` kifejezés kiírása a standard kimenetre
  - `writeln(X);` Az `X` kifejezés kiírása és soremelés
- A (Prologban írt) Cékla fordító és a `cekla.h` letölthető a tárgy honlapjáról

Cékla Hello world!

hello.cpp

```
#include "cekla.h"          // így C++ fordítóval is fordítható
int main() {                // bárhogy nevezhetnénk a függvényt
  writeln("Hello World!");  // nem-deklaratív utasítás
}                           // C++ komment megengedett
```

- Fordítás és futtatás a `cekla` programmal:

```
$ cekla hello.cpp                    Cékla parancssori indítása
Welcome to Cekla 2.238: a compiler for a declarative C++ sublanguage
* Function 'main' compiled
* Code produced
To get help, type:      |* help;
|* main()                           Kiértékelendő kifejezés
Hello World!                        a mellékhatás
|* ^D                               end-of-file (Ctrl+D v Ctrl+Z)
Bye
$ g++ hello.cpp && ./a.out           Szabályos C++ program is
Hello World!
```


A Cékla nyelv szintaxisa

- A szintaxist BNF jelöléssel adjuk meg, kiterjesztés:
  - ismétlés (0, 1, vagy többszöri): «ismétlendő»...
  - zárójelezés: [...]
  - < > jelentése: semmi
- A program szintaxisa

```
<program> ::=              <preprocessor_directive>...
                           <function_definition>...
<function_definition> ::=  <head> <block>
<head> ::=                 <type> <identifier>(<formal_args>)
<type> ::=                 [const | < >] [int | list | fun1 | fun2]
<formal_args> ::=          <formal_arg>[, <formal_arg>]... | < >
<formal_arg> ::=           <type> <identifier>
<block> ::=                { [<declaration> | <statement>]... }
<declaration> ::=          <type> <declaration_elem>
                           [, <declaration_elem>]... ;
<declaration_elem> ::=     <identifier> = <expression>
```

Cékla szintaxis folytatás: utasítások, kifejezések

```
<statement> ::=      if (<expression>) <statement> <else_part>
                   | <block>
                   | <expression> ;
                   | return <expression> ;
                   | ;
<else_part> ::=      else <statement> | < >

<expression> ::=     <expression_3> [? <expression> : <expression> | < >]
<expression_3> ::=   <expression_2> [<comp_op> <expression_2>]...
<expression_2> ::=   <expression_1> [<add_op> <expression_1>]...
<expression_1> ::=   <expression_0> [<mul_op> <expression_0>]...
<expression_0> ::=   <identifier>
                   | <constant>
                   | <identifier>(<actual_args>)
                   | (<expression>)
<constant> ::=       <integer> | <string> | '<char>'
<actual_args> ::=    <expression> [, <expression>]... | < >
<comp_op> ::=        < | > | == | != | >= | <=
<add_op> ::=         + | -
<mul_op> ::=         * | / | %
```


Tartalom

Lista építése

- Egészeket tároló láncolt lista
- Üres lista: `nil` (globális konstans)
- Lista építése:

```
// Visszaad egy új listát: első eleme Head, farka a Tail lista.
list cons(int Head, list Tail);
```

`pelda.cpp` – példaprogram

```
#include "cekla.h"            // így szabályos C++ program is
int main() {                  // szabályos függvénydeklaráció
    const list L1 = nil;                    // üres lista
    const list L2 = cons(30, nil);          // [30]
    const list L3 = cons(10, cons(20, L2)); // [10,20,30]
    writeln(L1);              // kimenet: []
    writeln(L2);              // kimenet: [30]
    writeln(L3);              // kimenet: [10,20,30]
}
```


Futtatás Céklával

```
$ cekla
Welcome to Cekla 2.xxx: a compiler for a declarative C++ sublanguage
To get help, type:      |* help;
|* load "pelda.cpp";
* Function ‘main' compiled
* Code produced
|* main();
[]
[30]
[10,20,30]
|* cons(10,cons(20,cons(30,nil)));
[10,20,30]
|* ^D
Bye
$
```

Lista szétbontása

- Első elem lekérdezése:
  `int hd(list L)` *// Visszaadja a nem üres L lista fejét.*
- Többi elem lekérdezése:
  `list tl(list L)` *// Visszaadja a nem üres L lista farkát.*
- Egyéb operátorok: `=` (inicializálás), `==`, `!=` (összehasonlítás)
- Példa:

```
int sum(const list L) {          // az L lista elemeinek összege
    if (L == nil) return 0;      // ha L üres, akkor 0,
    else {                       // különben hd(L) + sum(tl(L))
        const int X = hd(L);     // segédváltozókat használhatunk,
        const list T = tl(L);    // de csak konstansokat
        return X + sum(T);       // rekurzió (ez nem jobbrekurzió!)
    }
}
int main() {
    const int X = sum(cons(10,cons(20,nil))); // sum([10,20]) == 30
    writeln(X);                  // mellékhatás: kiírjuk a 30-at
}
```


Sztringek Céklában

- Sztring nem önálló típus: karakterkódok listája, „szintaktikus édesítőszer”
- A lista a C nyelvből ismert „lezáró nullát” (`'\0'`) nem tárolja!
- `write` heurisztikája: ha a lista csak nyomtatható karakterek kódját tartalmazza (32..126), sztring formában íródik ki:

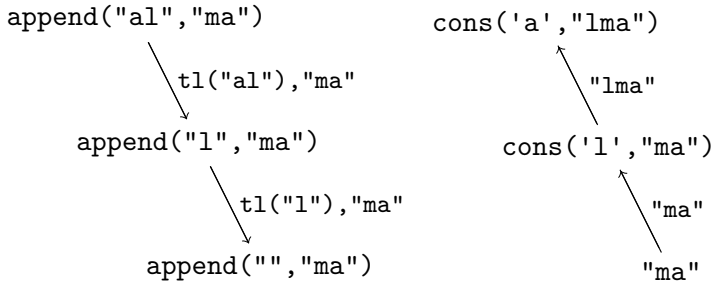
```
int main() {
  const list L4 = "abc";                    // abc
  const list L5 = cons(97,cons(98,cons(99,nil)));  // abc
  writeln(L4 == L5);                        // 1
  writeln(nil == "");                       // 1, true int-értéke
  writeln(nil);                             // []
  writeln(L5);                              // abc
  writeln(cons(10, L5));                    // [10,97,98,99]
  writeln(tl(L4));                          // bc
}
```


Listák összefűzése: `append`

- `append(L1, L2)` visszaadja L1 és L2 elemeit egymás után fűzve

```
// append(L1, L2) = L1 ⊕ L2 (L1 és L2 összefűzése)
list append(const list L1, const list L2)  {
  if (L1 == nil) return L2;
  return cons(hd(L1), append(tl(L1), L2)); }
```

- Például `append("al", "ma") == "alma"` (vagyis `[97,108,109,97]`).



- $O(n)$ lépésszámú (`L1` hossza), ha a lista átadása, `cons`, `hd`, `tl` $O(1)$
- Megjegyzés: a fenti megvalósítás nem jobbrekurzív

Lista megfordítása: `nrev`, `reverse`

- Naív (négyzetes lépésszámú) megoldás

```
// nrev(L) = az L lista megfordítva
list nrev(const list L) {
  if (L == nil) return nil;
  return append(nrev(tl(L)), cons(hd(L), nil));
}
```

- Lineáris lépésszámú megoldás

```
// reverse(L) = az L lista megfordítva
list reverse(const list L) {
  return revapp(L, nil);
}
// revapp(L, L0) = az L lista megfordítása L0 elé fűzve
list revapp(const list L, const list L0) {
  if (L == nil) return L0;
  return revapp(tl(L), cons(hd(L), L0));
}
```

- Egy jobbrekurzív `appendi(L1, L2)`: `revapp(revapp(L1,nil), L2)`

Tartalom

Magasabbrendű függvények Céklában (kiegészítő anyag)

- Magasabbrendű függvény: paramétere vagy eredménye függvény
- A Cékla két függvénytípust támogat:

```
typedef int(* fun1 )(int)       // Egy paraméteres egész fv
typedef int(* fun2 )(int, int)  // Két paraméteres egész fv
```

- Példa: ellenőrizzük, hogy egy lista számjegykarakterek listája-e

```
// Igaz, ha L minden X elemére teljesül a P(X) predikátum
int for_all(const fun1 P, const list L) {
  if (L == nil) return true;          // triviális
  else {
    if (P(hd(L)) == false) return false;   // ellenpélda?
    return for_all(P, tl(L));         // többire is teljesül?
  }
}
int digit(const int X)   {  // Igaz, ha X egy számjegy kódja
  if (X < '0') return false;           // 48 == '0'
  if (X > '9') return false;           // 57 == '9'
  return true;           }
int szamjegyek(const list L) { return for_all(digit, L);  }
```


Magasabbrendű függvények: `map`, `filter` (kiegészítő anyag)

- `map(F,L)`: az `F(X)` elemekből álló lista, ahol `X` végigfutja az `L` lista elemeit

```
list map(const fun1 F, const list L) {
    if (L == nil) return nil;
    return cons(F(hd(L)), map(F, tl(L)));
}
```

- Például az `L=[10,20,30]` lista elemeit eggyel növelve: `[11,21,31]`

```
int incr(const int X) { return X+1; }
```

Így a `map(incr, L)` kifejezés értéke `[11,21,31]`.

- `filter(P,L)`: az `L` lista azon `X` elemei, amelyekre `P(X)` teljesül

```
list filter(const fun1 P, const list L) {
    if (L == nil) return nil;
    if (P(hd(L))) return cons(hd(L), filter(P, tl(L)));
    else return filter(P, tl(L));
}
```

- Például keressük meg a "X=100;" sztringben a számjegyeket:
A `filter(digit, "X=100;")` kifejezés értéke `"100"` (azaz `[49,48,48]`)

Magasabbrendű függvények: `foldl` (kiegészítő anyag)

- Hajtogatás balról

```
// foldl(F, a, [x1,...,xn]) = F(xn, ..., F(x2, F(x1, a))...)
int foldl(const fun2 F, const int Acc, const list L) {
  if (L == nil) return Acc;
  else
    return foldl(F, F(hd(L),Acc), tl(L));           }
```

- Futási példák, `L = [1,5,3,8]`

```
int xmy(int X, int Y) { return X-Y; }
int ymx(int X, int Y) { return Y-X; }

foldl(xmy, 0, L) = (8-(3-(5-(1-0)))) = 9
foldl(ymx, 0, L) = ((((0-1)-5)-3)-8) = -17
```

Magasabbrendű függvények: `foldr` (kiegészítő anyag)

- Hajtogatás jobbról

```
// foldr(F, a, [x1, ..., xn]) = F(x1, F(x2, ..., F(xn, a)...))
int foldr(const fun2 F, const int Acc, const list L) {
  if (L == nil) return Acc;
  else
    return F(hd(L), foldr(F, Acc, tl(L)));          }
```

- Futási példák, `L = [1,5,3,8]`

```
int xmy(int X, int Y) { return X-Y; }
int ymx(int X, int Y) { return Y-X; }

foldr(xmy, 0, L) = (1-(5-(3-(8-0)))) = -9
foldr(ymx, 0, L) = ((((0-8)-3)-5)-1) = -17
```


III. rész

Prolog alapok

Deklaratív programozási nyelvek

- A matematika függvényfogalmán alapuló funkcionális prog. nyelvek: LISP, SML, Haskell, Erlang, ...
- A matematika relációfogalmán alapuló logikai programozási (LP) nyelvek: Prolog, SQL, Mercury, Korlátnyelvek (Constraint Programming), ...
- Közös tulajdonságaik
  - Deklaratív szemantika – a program jelentése matematikai állításként olvasható ki.
  - Deklaratív változó ≡ matematikai változó – *egyetlen* ismeretlen értéket jelöl, vö. egyszeres értékadás
- Jelmondat
  - WHAT rather than HOW: a megoldás módja helyett inkább a megoldandó feladat specifikációját kell megadni
  - Általában nem elegendő a specifikáció (WHAT); a feladatok (hatékony) megoldásához szükséges a HOW rész végiggondolása is
  - Mindazonáltal a WHAT rész a fontosabb!

A kurzus Logikai Programozás (LP) része

- **1. blokk:** A Prolog LP nyelv alapjai
  - Szintaxis
  - Deklaratív szemantika
  - Procedurális szemantika (végrehajtási mechanizmus)
- **2. blokk:** Prolog programozási módszerek
  - A legfontosabb beépített eljárások
  - Fejlettebb nyelvi és rendszerelemek
- Kitekintés: Új irányzatok a logikai programozásban

Tartalom

A Prolog alapelemei: a családi kapcsolatok példája

- Adatok
  - Adottak személyekre vonatkozó állítások, pl.

gyerek	szülő
Imre	István
Imre	Gizella
István	Géza
István	Sarolta
Gizella	Civakodó Henrik
Gizella	Burgundi Gizella

férfi
Imre
István
Géza
Civakodó Henrik
...

- A feladat:
  - Definiálandó az unoka–nagyapa kapcsolat, pl. keressük egy adott személy nagyapját.

A nagyszülő feladat — Prolog megoldás

```
% szuloje(Gy, Sz):Gy szülője Sz.
% Tényállításokból álló predikátum
szuloje('Imre', 'Gizella').  % (sz1)
szuloje('Imre', 'István').   % (sz2)
szuloje('István', 'Sarolt'). % (sz3)
szuloje('István', 'Géza').   % (sz4)
szuloje('Gizella',
        'Burgundi Gizella'). % (sz5)
szuloje('Gizella',
        'Civakodó Henrik').  % (sz6)

% ffi(Szemely): Szemely férfi.
ffi('Imre'). ffi('István').  % (f1)-(f2)
ffi('Géza').                 % (f3)
ffi('Civakodó Henrik').      % (f4)

% Gyerek nagyszülője Nagyszulo.
% Egyetlen szabályból álló predikátum
nagyszuloje(Gyerek, Nagyszulo) :-
  szuloje(Gyerek, Szulo),
  szuloje(Szulo, Nagyszulo). % (nsz)
```

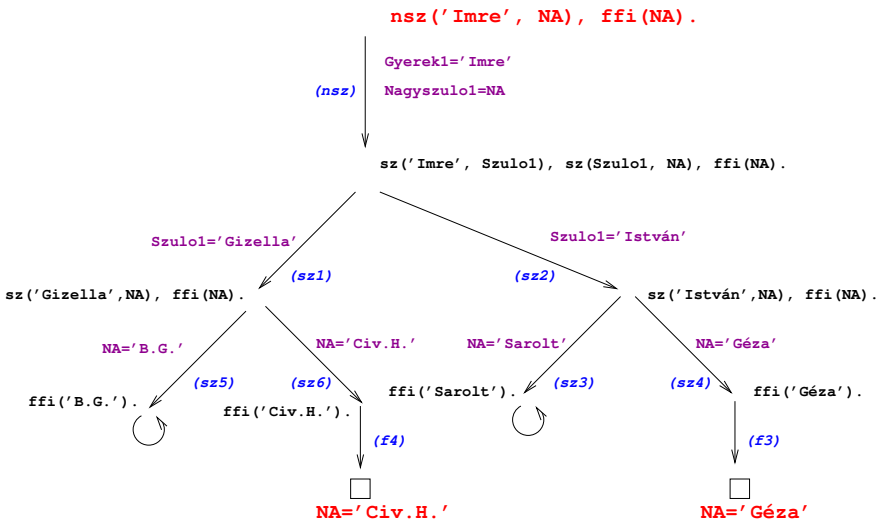
```
% Ki Imre nagyapja?
| ?- nagyszuloje('Imre', NA),
     ffi(NA).
NA = 'Civakodó Henrik' ? ;
NA = 'Géza' ? ;
no
% Ki Géza unokája?
| ?- nagyszuloje(U, 'Géza').
U = 'Imre' ? ;
no
% Ki Imre nagyszülője?
| ?- nagyszuloje('Imre', NSz).
NSz = 'Burgundi Gizella' ? ;
NSz = 'Civakodó Henrik' ? ;
NSz = 'Sarolt' ? ;
NSz = 'Géza' ? ;
no
```


Deklaratív szemantika – klózok logikai alakja

- A **szabály** jelentése implikáció: a törzsbeli célok **konjunkciójából** következik a fej.
  - Példa: `nagyszuloje(U,N) :- szuloje(U,Sz), szuloje(Sz,N).`
  - Logikai alak:
    $\forall UNSz(\texttt{nagyszuloje}(U,N) \leftarrow \texttt{szuloje}(U,Sz) \wedge \texttt{szuloje}(Sz,N))$
  - Ekvivalens alak:
    $\forall UN \quad (\texttt{nagyszuloje}(U,N) \leftarrow \exists Sz(\texttt{szuloje}(U,Sz) \wedge \texttt{szuloje}(Sz,N)))$
- A **tényállítás** feltétel nélküli állítás, pl.
  - Példa: `szuloje('Imre', 'István').`
  - Logikai alakja változatlan
  - Ebben is lehetnek változók, ezeket is univerzálisan kell kvantálni
- A **célsorozat** jelentése: keressük azokat a változó-behelyettesítéseket amelyek esetén a célok konjunkciója igaz
- Egy célsorozatra kapott válasz **helyes**, ha az adott behelyettesítésekkel a célsorozat következménye a program logikai alakjának
- A Prolog garantálja a helyességet, de a **teljességet** nem: nem biztos, hogy minden megoldást megkapunk –
  kaphatunk hibajelzést, végtelen ciklust (végtelen keresési teret) stb.

A nagyszülő példa végrehajtása – keresési tér

```
nagyszuloje(Gyerek, Nagyszulo) :-
  szuloje(Gyerek, Szulo),
  szuloje(Szulo, Nagyszulo). % (nsz)
```



A Prolog végrehajtás redukciós modellje

Redukciós lépés: egy célsorozat redukálása egy újabb célsorozattá

- egy programklóz segítségével (az első cél felhasználói eljárást hív):
  - A klózt **lemásoljuk**, a változókat szisztematikusan újakra cserélve.
  - A célsorozatot szétbontjuk az első hívásra és a maradékra.
  - Az első hívást **egyesítjük** a klózfejjel
  - Ha az egyesítés nem sikerül, akkor a redukciós lépés is meghiúsul.
  - Sikeres egyesítés esetén az ehhez szükséges behelyettesítéseket elvégezzük a klóz **törzs**én és a **célsorozat** maradékán is
  - Az új célsorozat: a klóztörzs és utána a maradék célsorozat
- egy beépített eljárás segítségével (az első cél beépített eljárást hív):
  - Az első célbeli beépített eljáráshívást végrehajtjuk.
  - Ez lehet sikeres (esetleg változó-behelyettesítésekkel), vagy lehet sikertelen.
  - Siker esetén a behelyettesítéseket elvégezzük a célsorozat maradékán, ez lesz az új célsorozat.
  - Sikertelenség esetén a redukciós lépés is sikertelenül végződik (meghiúsul).

A Prolog végrehajtási algoritmus – első közelítés

Egy célsorozat végrehajtása

1. Ha az első hívás beépített eljárásra vonatkozik, végrehajtjuk a redukciót.
2. Ha az első hívás felhasználói eljárásra vonatkozik, akkor megkeressük az eljárás első (visszalépés után: következő) olyan klózát, amelynek feje egyesíthető a hívással, és végrehajtjuk a redukciót.
3. Ha a redukció sikeres (találunk egyesíthető fejű klózt), folytatjuk a végrehajtást 1.-től az új célsorozattal.
4. Ha a redukció meghiúsul, akkor visszalépés következik:
   - visszatérünk a legutolsó, felhasználói eljárással történt (sikeres) redukciós lépéshez,
   - annak *bemeneti* célsorozatát megpróbáljuk *újabb* klózzal redukálni – ugrás a 2. lépésre
     (Ennek meghiúsulása értelemszerűen újabb visszalépést okoz.)

A végrehajtás nem „intelligens”

- Pl. `| ?- nagyszuloje(U, 'Géza').` hatékonyabb lenne ha a klóz törzét jobbról balra hajtanánk végre
- DE: így a végrehajtás átlátható; a Prolog nem tételbizonyító, hanem programozási nyelv

A Prolog adatfogalma, a Prolog kifejezés

- konstans (`atomic`)
  - számkonstans (`number`) – egész vagy lebegőp, pl. `1`, `-2.3`, `3.0e10`
  - névkonstans (`atom`), pl. `'István'`, `szuloje`, `+`, `-`, `<`, `tree_sum`
- összetett- vagy struktúra-kifejezés (`compound`)
  - ún. kanonikus alak: $\langle$ struktúranév $\rangle(\langle \text{arg}_1 \rangle, \ldots, \langle \text{arg}_n \rangle)$
    - a $\langle$ struktúranév $\rangle$ egy névkonstans, az $\langle \text{arg}_i \rangle$ argumentumok tetszőleges Prolog kifejezések
    - példák: `leaf(1)`, `person(william,smith,2003)`, `<(X,Y)`, `is(X, +(Y,1))`
  - szintaktikus „édesítőszerek”, pl. operátorok: `X is Y+1` $\equiv$ `is(X, +(Y,1))`
- változó (`var`)
  - pl. `X`, `Szulo`, `X2`, `_valt`, `_`, `_123`
  - a változó alaphelyzetben behelyettesítetlen, értékkel nem bír, egyesítés során egy tetszőleges Prolog kifejezést (akár egy másik változót) vehet fel értékül – dinamikus típusfogalom
  - ha visszalépünk egy redukciós lépésen keresztül, akkor az ott behelyettesített változók behelyettesítése megszűnik

Aritmetikai beépített eljárások

Aritmetikai beépített predikátumok (eljárások)

- `X is Kif`: A `Kif` **aritmetikai** kif.-t **kiértékeli** és értékét **egyesíti** `X`-szel.
- `Kif1>Kif2`: `Kif1` **aritmetikai értéke** nagyobb `Kif2` értékénél.
- Hasonlóan: `Kif1=<Kif2`, `Kif1>Kif2`, `Kif1>=Kif2`, `Kif1=:=Kif2` (aritmetikailag egyenlő), `Kif1=\=Kif2` (aritmetikailag nem egyenlő)
- Fontos aritmetikai operátorok: `+`, `-`, `*`, `/`, `rem`, `//` (egész-osztás)

A faktoriális függvény definíciója Prologban

- funkc. nyelven a faktoriális 1-argumentumú függvény: `Ered = fakt(N)`
- Prologban ennek egy kétargumentumú reláció felel meg: `fakt(N, Ered)`
- Konvenció: az utolsó argumentum(ok) a kimenő pararaméter(ek)

```
% fakt(N, F): F = N!.
fakt(0, 1).           % 0! = 1.
fakt(N, F) :-         % N! = F ha létezik olyan N1, F1, hogy
        N > 0,        %    N > 0, és
        N1 is N-1,    %    N1 = N-1. és
        fakt(N1, F1), %    N1! = F1, és
        F is F1*N.    %    F = F1*N.
```


Néhány beépített predikátum

- Kifejezések egyesítése
  - `X = Y`: az `X` és `Y` **szimbolikus** kifejezések egyesítése ≡ azonos alakra hozása változók esetleges behelyettesítésével
  - `X \= Y`: az `X` és `Y` kifejezések nem egyesíthetőek (nem hozhatók azonos alakra)
- Típusvizsgálatot végző beépített predikátumok
  - `var(X)`: `X` változó
  - `nonvar(X)`: `X` nem változó
    - `atomic(X)`: `X` konstans; `atom(X)`: `X` névkonstans, `number(X)`: `X` szám `integer(X)`: `X` egész szám, `float(X)`: `X` lebegőpontos szám
    - `compound(X)`: `X` összetett kifejezés
- További hasznos predikátumok
  - `true`, `fail`: Mindig sikerül ill. mindig meghiúsul.
  - `write(X)`: Az `X` Prolog kifejezést kiírja.
  - `write_canonical(X)`: `X` kanonikus (alapstruktúra) alakját írja ki.
  - `nl`: Kiír egy újsort.

Programfejlesztési beépített predikátumok

- `consult(File)`: A `File` állományban levő programot beolvassa és értelmezendő alakban eltárolja. (`File = user` ⇒ terminálról olvas.)
- `trace`, `notrace`: A (teljes) nyomkövetést be- ill. kikapcsolja.
- `listing` vagy `listing(Predikátum)`: Az értelmezendő alakban eltárolt összes ill. adott nevű predikátumokat kilistázza.
- `halt`: A Prolog rendszer befejezi működését.

```
> sicstus
SICStus 4.4.1 (x86_64-linux-glibc2.12) ...
| ?- consult(fakt).
% consulted /home/user/tree.pl in module user, 10 msec 91776 bytes
yes
| ?- fact(4, F).
F = 24 ? ;
no
| ?- listing(fakt).
(...)
yes
| ?- halt.
>
```


Adatstruktúrák Prologban – a bináris fák példája

- A bináris fa adatstruktúra
  - vagy egy csomópont (`node`), amelynek két részfája van (`left`,`right`)
  - vagy egy levél (`leaf`), amely egy egészt tartalmaz

Binárisfa-struktúra C-ben

```
enum treetype {Node, Leaf};
struct tree {
 enum treetype type;
 union {
   struct { struct tree *left;
            struct tree *right;
          } nd;
   struct { int value;
          } lf;
 } u;
};
```

A Prolog dinamikusan típusos nyelv – nincs szükség explicit típusdefinícióra

- Mercury típusleírás (komment)

```
% :- type tree --->
%        node(tree, tree)
%      | leaf(int).
```

- A típushoz tartozás ellenőrzése

```
% is_tree(T): T egy bináris fa
is_tree(leaf(V)) :- integer(V).
is_tree(node(Left,Right)) :-
    is_tree(Left),
    is_tree(Right).
```

Bináris fák összegzése

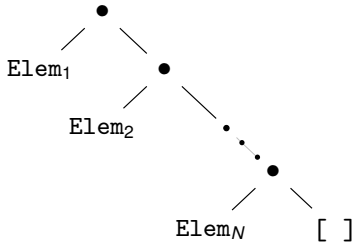
- Egy bináris fa levélösszegének kiszámítása:
  - levél esetén a levélben tárolt egész
  - csomópont esetén a két részfa levélösszegének összege

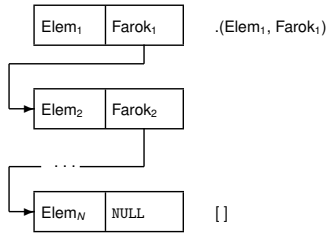
```
% S = tsum(T): T levélösszege S
int tsum(struct tree *tree)
{
 switch(tree->type) {
 case Leaf:
  return tree->u.lf.value;
 case Node:
  return tsum(tree->u.nd.left) +
         tsum(tree->u.nd.right);
  }
}
```

```
% tree_sum(Tree, S): Σ Tree = S.
tree_sum(leaf(Value), Value).
tree_sum(node(Left,Right), S) :-
        tree_sum(Left, S1),
        tree_sum(Right, S2),
        S is S1+S2.
| ?- tree_sum(node(leaf(5),
                   node(leaf(3),
                        leaf(2))),S).
S = 10 ? ;
no
| ?- tree_sum(T, 3).
T = leaf(3) ? ;
! Inst. error in argument 2 of is/2
! goal:  3 is _73+_74
```


A Prolog lista-fogalma

- A Prolog lista
  - Az üres lista a `[]` névkonstans.
  - A nem-üres lista a `'.'(Fej,Farok)` struktúra (vö. Cékla `cons(...)`):
    - `Fej` a lista feje (első eleme), míg
    - `Farok` a lista farka, azaz a fennmaradó elemekből álló lista.
  - A listákat egyszerűsítve is leírhatjuk („szintaktikus édesítés”).
  - Megvalósításuk optimalizált, időben és helyben is hatékonyabb.
- A listák fastruktúra alakja és megvalósítása





Listák jelölése – szintaktikus „édesítőszerek”

- Az alapvető édesítés:
  `.(Fej,Farok)` helyett a `[Fej|Farok]` kifejezést írjuk
- Kiterjesztés N darab „fej”-elemre, a skatulyázás kiküszöbölése:
  $[Elem_1|[...|[Elem_N|Farok]...]] \Longrightarrow [Elem_1,...,Elem_N|Farok]$
- Ha a farok `[]`, a „`|[]`” jelsorozat elhagyható:
  $[Elem_1,...,Elem_N|[]] \Longrightarrow [Elem_1,...,Elem_N]$

```
| ?- [1,2] = [X|Y].          ⟹    X = 1, Y = [2] ?
| ?- [1,2] = [X,Y].          ⟹    X = 1, Y = 2 ?
| ?- [1,2,3] = [X|Y].        ⟹    X = 1, Y = [2,3] ?
| ?- [1,2,3] = [X,Y].        ⟹    no
| ?- [1,2,3,4] = [X,Y|Z].    ⟹    X = 1, Y = 2, Z = [3,4] ?
| ?- L = [1|_], L = [_,2|_]. ⟹    L = [1,2|_A] ? % nyílt végű
| ?- L = .(1,[2,3|[]]).      ⟹    L = [1,2,3] ?
| ?- L = [1,2|.(3,[])].      ⟹    L = [1,2,3] ?
```


Néhány egyszerű listakezelő eljárás

- Egy n-dimenziós vektort egy n-elemű számlistával ábrázolhatunk.
- Írjunk Prolog eljárásokat két vektor összegének, egy vektor és egy skalár (szám) szorzatának, és két vektor skalárszorzatának kiszámítására. Feltételezhető, hogy egy hívásban a vektorok azonos hosszúságúak.

```
% v_ossz(+A, +B, ?C): C az A és B vektorok összege
v_ossz([], [], []).
v_ossz([A|AL], [B|BL], [C|CL]) :-
        C is A+B,
        v_ossz(AL, BL, CL).

% vs_szorz(+A, +S, ?B): B az A vektor S skalárral való szorzata
vs_szorz([], _, []).
vs_szorz([A|AL], S, [B|BL]) :-
        B is A*S, vs_szorz(AL, S, BL).

% skszorz(+A, +B, ?S): S az A és B vektorok skalárszorzata
skszorz([], [], 0).
skszorz([A|AL], [B|BL], S) :-
        skszorz(AL, BL, S0), S is S0+A*B.
```

Tartalom

Predikátumok, klózok

- Példa:

```
% két klózból álló predikátum definíciója, funktora: tree_sum/2
tree_sum(leaf(Val), Val).        %                  1. klóz, tényáll.
tree_sum(node(Left,Right), S) :- %          fej    \
        tree_sum(Left, S1),      % cél     \       |
        tree_sum(Right, S2),     % cél     | törzs | 2. klóz, szabály
        S is S1+S2.              % cél     /       /
```

- Szintaxis:

⟨ Prolog program ⟩	::=	⟨ predikátum ⟩ . . .	
⟨ predikátum ⟩	::=	⟨ klóz ⟩ . . .	{azonos funktorú}
⟨ klóz ⟩	::=	⟨ tényállítás ⟩.␣ |	
		⟨ szabály ⟩.␣	{klóz funktora = fej funktora}
⟨ tényállítás ⟩	::=	⟨ fej ⟩	
⟨ szabály ⟩	::=	⟨ fej ⟩ :- ⟨ törzs ⟩	
⟨ törzs ⟩	::=	⟨ cél ⟩, . . .	
⟨ cél ⟩	::=	⟨ kifejezés ⟩	
⟨ fej ⟩	::=	⟨ kifejezés ⟩	

Prolog kifejezések

- Példa – egy klózfej mint kifejezés:

```
% tree_sum(node(Left,Right), S)    % összetett kif., funktora
% --------  ----------------  _                        tree_sum/2
%      |          |           |
% struktúranév    \           argumentum, változó
%                  \- argumentum, összetett kif.
```

- Szintaxis:

⟨ kifejezés ⟩	::=	⟨ változó ⟩ |	{Nincs funktora}
		⟨ konstans ⟩ |	{Funktora: ⟨ konstans ⟩/0}
		⟨ összetett kif. ⟩ |	{Funktor: ⟨ struktúranév ⟩/⟨ arg.sz. ⟩}
		⟨ egyéb kifejezés ⟩	{Operátoros, lista, stb.}
⟨ konstans ⟩	::=	⟨ névkonstans ⟩ |	
		⟨ számkonstans ⟩	
⟨ számkonstans ⟩	::=	⟨ egész szám ⟩ |	
		⟨ lebegőp. szám ⟩	
⟨ összetett kif. ⟩	::=	⟨ struktúranév ⟩ (⟨ argumentum ⟩, . . .)	
⟨ struktúranév ⟩	::=	⟨ névkonstans ⟩	
⟨ argumentum ⟩	::=	⟨ kifejezés ⟩	

Lexikai elemek: példák és szintaxis

```
% változó:            Fakt FAKT _fakt X2 _2 _
% névkonstans:        fakt ≡ 'fakt' 'István' [] ; ',' += ** \= ≡ '\\='
% számkonstans:       0 -123 10.0 -12.1e8
% nem névkonstans:    !=, Istvan
% nem számkonstans:   1e8 1.e2
```

⟨ változó ⟩	::=	⟨ nagybetű ⟩⟨ alfanum. jel ⟩. . . |
		_ ⟨ alfanum. jel ⟩. . .
⟨ névkonstans ⟩	::=	’⟨ idézett kar. ⟩. . . ’ |
		⟨ kisbetű ⟩⟨ alfanum. jel ⟩. . . |
		⟨ tapadó jel ⟩. . . | ! | ; | [] | {}
⟨ egész szám ⟩	::=	{előjeles vagy előjeltelen számjegysorozat}
⟨ lebegőp.szám ⟩	::=	{belsejében tizedespontot tartalmazó számjegysorozat esetleges exponenssel}
⟨ idézett kar. ⟩	::=	{tetszőleges nem ' és nem \ karakter} |
		\ ⟨ escape szekvencia ⟩
⟨ alfanum. jel ⟩	::=	⟨ kisbetű ⟩ | ⟨ nagybetű ⟩ | ⟨ számjegy ⟩ | _
⟨ tapadó jel ⟩	::=	+ | - | * | / | \ | $ | ^ | < | > | = | ` | ~ | : | . | ? | @ | # | &

Prolog programok formázása

- Megjegyzések (comment)
  - A % százalékjeltől a sor végéig
  - A `/*` jelpártól a legközelebbi `*/` jelpárig.
- Formázó elemek (komment, szóköz, újsor, tabulátor stb.) szabadon használhatók
  - kivétel: összetett kifejezésben a struktúranév után tilos formázó elemet tenni (operátorok miatt);
  - prefix operátor (ld. később) és „(” között kötelező a formázó elem;
  - klózt lezáró pont (.␣): önmagában álló pont (előtte nem tapadó jel áll) amit egy formázó elem követ
- Programok javasolt formázása:
  - Az egy predikátumhoz tartozó klózok legyenek egymás mellett a programban, közéjük ne tegyünk üres sort.
  - A predikátum elé tegyünk egy üres sort és egy fejkommentet:

```
% predikátumnév(A1, ..., An): A1, ..., An közötti
% összefüggést leíró kijelentő mondat.
```

  - A klózfejet írjuk sor elejére, minden célt lehetőleg külön sorba, néhány szóközzel beljebb kezdve

Összefoglalás: A logikai programozás alapgondolata

- Logikai programozás (LP):
  - Programozás a matematikai logika segítségével
    - egy logikai program nem más mint **logikai állítások halmaza**
    - egy logikai **program futása** nem más mint **következtetési folyamat**
  - De: a logikai következtetés óriási keresési tér bejárását jelenti
    - szorítsuk meg a logika nyelvét
    - válasszunk egyszerű, ember által is követhető következtetési algoritmusokat
  - Az LP máig legelterjedtebb megvalósítása a **Prolog** = **Pro**gramozás **log**ikában (**Pro**gramming in **log**ic)
    - az elsőrendű logika egy erősen megszorított részenyelveaz ún. **definit-** vagy **Horn-klóz**ok nyelve,
    - végrehajtási mechanizmusa: **mintaillesztés**es eljáráshíváson alapuló **visszalépés**es keresés.

Tartalom

A Prolog nyomkövető által használt eljárás-doboz modell

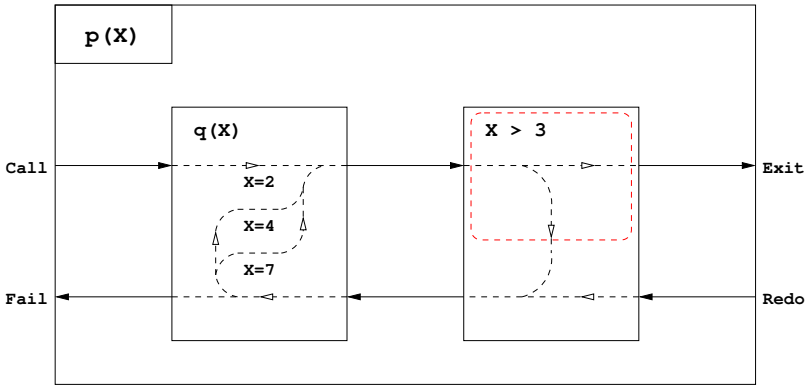
- A Prolog eljárás-végrehajtás két fázisa
  - előre menő: egymásba **skatulyázott eljárás-be** és **-ki**lépések
  - visszafelé menő: **új megoldás** kérése egy már lefutott eljárástól
- Egy egyszerű példaprogram, hívása `| ?- p(X).`

```
q(2).  q(4).  q(7).                    p(X) :- q(X), X > 3.
```

- Példafutás: belépünk a `p/1` eljárásba (Hívási kapu, Call port)
  - Belépünk a `q/1` eljárásba (Call port)
  - `q/1` sikeresen lefut, `q(2)` eredménnyel (Kilépési kapu, Exit port)
    - A `> /2` eljárásba belépünk a `2>3` hívással (Call)
    - A `> /2` eljárás sikertelenül fut le (Meghiúsulási kapu, Failport)
  - (visszafelé menő futás): visszatérünk (a már lefutott) `q/1`-be,újabb megoldást kérve (Újra kapu, Redo Port)
  - A `q/1` eljárás újra sikeresen lefut a `q(4)` eredménnyel (Exit)
    - A `4>3` hívással a `> /2`-be belépünk majd kilépünk (Call, Exit)
- A `p/1` eljárás sikeresen lefut `p(4)` eredménnyel (Exit)

Eljárás-doboz modell – grafikus szemléltetés

```
q(2).  q(4). q(7).                    p(X) :- q(X), X > 3.
```



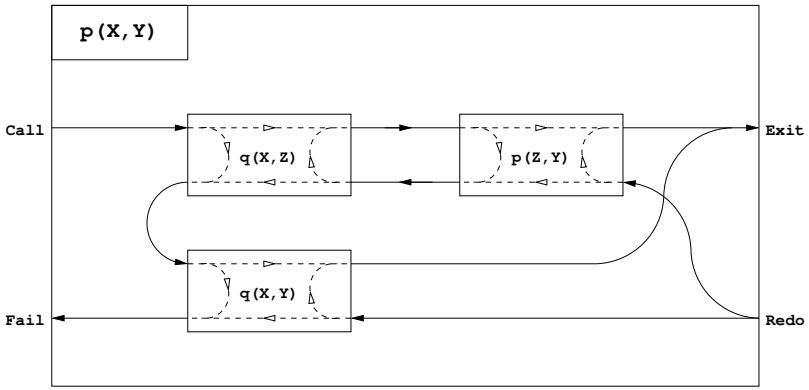
Eljárás-doboz modell – egyszerű nyomkövetési példa

- `?...Exit` jelzi, hogy maradt választási pont a lefutott eljárásban
- Ha nincs `?` az Exit kapunál, akkor a doboz törlődik (lásd a szaggatott piros téglalapot az előző dián az `X > 3` hívás körül)

```
q(2).  q(4). q(7).                    p(X) :- q(X), X > 3.

| ?- trace, p(X).
        1      1 Call: p(_463) ?
        2      2 Call: q(_463) ?
?       2      2 Exit: q(2) ?       % ? ≡ maradt választási pont q-ban
        3      2 Call: 2>3 ?
        3      2 Fail: 2>3 ?
        2      2 Redo: q(2) ?
?       2      2 Exit: q(4) ?
        4      2 Call: 4>3 ?
        4      2 Exit: 4>3 ?        % nincs ? ⇒ a doboz törlődik (*)
?       1      1 Exit: p(4) ?
X = 4 ? ;
        1      1 Redo: p(4) ?
                                    % (*) miatt nem látjuk a Redo-Fail kapukat a 4>3 hívásra
        2      2 Redo: q(4) ?
        2      2 Exit: q(7) ?
        5      2 Call: 7>3 ?
        5      2 Exit: 7>3 ?
        1      1 Exit: p(7) ?      % nincs ? ⇒ a doboz törlődik (*)
X = 7 ? ;  no
```


Eljárás-doboz: több klózból álló eljárás

```
p(X,Y) :- q(X,Z), p(Z,Y).
p(X,Y) :- q(X,Y).

q(1,2). q(2,3). q(2,4).
```



Eljárás-doboz modell – „kapcsolási” alapelvek

- A feladat: „szülő” eljárásdoboz és a „belső” eljárások dobozainak összekapcsolása
- Előfeldolgozás: érjük el, hogy a klózfejekben csak változók legyenek, ehhez a fej-egyesítéseket alakítsuk hívásokká, pl.
  `fakt(0,1).` ⇒`fakt(X,Y) :- X=0, Y=1.`
- Előre menő végrehajtás (balról-jobbra menő nyilak):
  - A szülő Call kapuját az 1. klóz első hívásának Call kapujára kötjük.
  - Egy belső eljárás Exit kapuját
    - a következő hívás Call kapujára, vagy,
    - ha nincs következő hívás, akkor a szülő Exit kapujára kötjük
- Visszafelé menő végrehajtás (jobbról-balra menő nyilak):
  - Egy belső eljárás Fail kapuját
    - az előző hívás Redo kapujára, vagy, ha nincs előző hívás, akkor
    - a következő klóz első hívásának Call kapujára, vagy
    - ha nincs következő klóz, akkor a szülő Fail kapujára kötjük
  - A szülő Redo kapuját mindegyik klóz utolsó hívásának Redo kapujára kötjük
    - mindig abba a klózra térünk vissza, amelyben legutoljára voltunk

SICStus nyomkövetés – legfontosabb parancsok

- Beépített eljárások
  - `trace`, `debug`, `zip` – a `c`, `l`, `z` paranccsal indítja a nyomkövetést
  - `notrace`, `nodebug`, `nozip` – kikapcsolja a nyomkövetést
  - `spy(P)`, `nospy(P)`, `nospyall` – töréspont be/ki a `P` eljárásra, $\forall$ ki.
- Alapvető nyomkövetési parancsok, ujsorral (<RET>) kell lezárni
  - `h` (help) – parancsok listázása
  - `c` (creep) vagy csak <RET> – lassú futás (minden kapunál megáll)
  - `l` (leap) – csak töréspontnál áll meg, de a dobozokat építi
  - `z` (zip) – csak töréspontnál áll meg, dobozokat nem épít
  - `+` ill. `-` – töréspont be/ki a kurrens eljárásra
  - `s` (skip) – eljárástörzs átlépése (Call/Redo $\Rightarrow$ Exit/Fail)
  - `o` (out) – kilépés az eljárástörzsből ($\Rightarrow$szülő Exit/Fail kapu)
- A Prolog végrehajtást megváltoztató parancsok
  - `u` (unify) – a kurrens hívást helyettesíti egy egyesítéssel
  - `r` (retry) – újrakezdi a kurrens hívás végrehajtását ($\Rightarrow$Call)
- Információ-megjelenítő és egyéb parancsok
  - `<` n – a kiírási mélységet n-re állítja ($n = 0 \Rightarrow \infty$ mélység)
  - `n` (notrace) – nyomkövető kikapcsolása
  - `a` (abort) – a kurrens futás abbahagyása

Eljárás-doboz modell – OO szemléletben (kiegészítő anyag)

- Minden eljáráshoz tartozik egy osztály, amelynek van egy konstruktor függvénye (amely megkapja a hívási paramétereket) és egy `next` „adj egy (következő) megoldást” metódusa.
- Az osztály nyilvántartja, hogy hányadik klózban jár a vezérlés
- A metódus első meghívásakor az első klóz első Hívás kapujára adja a vezérlést
- Amikor egy részeljárás Hívás kapujához érkezünk, **létrehozunk** egy példányt a meghívandó eljárásból, majd
- meghívjuk az eljáráspéldány „következő megoldás” metódusát (*)
  - Ha ez sikerül, akkor a vezérlés átkerül a következő hívás Hívás kapujára, vagy a szülő Kilépési kapujára
  - Ha ez meghiúsul, **megszüntetjük** az eljáráspéldányt majd ugrunk az előző hívás Újra kapujára, vagy a következő klóz elejére, stb.
- Amikor egy Újra kapuhoz érkezünk, a (*) lépésnél folytatjuk.
- A szülő Újra kapuja (a „következő megoldás” nem első hívása) a tárolt klózsorszámnak megfelelő klózban az utolsó Újra kapura adja a vezérlést.

OO szemléletű dobozok: `p/2` C++ kódrészlet (kieg. anyag)

A `p/2` eljárás (91. dia) C++ megfelelőjének „köv. megoldás” metódusa:

```
boolean p::next()           { // Return next solution for p/2
  switch(clno)           {
  case 0:                     // first call of the method
    clno = 1;                 // enter clause 1:                 p(X,Y) :- q(X,Z), p(Z,Y).
    qaptr = new q(x, &z);     // create a new instance of subgoal q(X,Z)
  redo11:
    if(!qaptr->next()) {      // if q(X,Z) fails
      delete qaptr;           // destroy it,
      goto cl2;        }      // and continue with clause 2 of p/2
    pptr = new p(z, py);      // otherwise, create a new instance of subgoal p(Z,Y)
  case 1:                     // (enter here for Redo port if clno==1)
    /* redo12: */
    if(!pptr->next())  {      // if p(Z,Y) fails
      delete pptr;            // destroy it,
      goto redo11;     }      // and continue at redo port of q(X,Z)
    return TRUE;              // otherwise, exit via the Exit port
  cl2:
    clno = 2;                 // enter clause 2:                 p(X,Y) :- q(X,Y).
    qbptr = new q(x, py);     // create a new instance of subgoal q(X,Y)
  case 2:                     // (enter here for Redo port if clno==2)
    /* redo21: */
    if(!qbptr->next()) {      // if q(X,Y) fails
      delete qbptr;           // destroy it,
      return FALSE;    }      // and exit via the Fail port
    return TRUE;              // otherwise, exit via the Exit port
                        } }
```


Tartalom

Listák összefűzése – az `append/3` eljárás

- Ismétlés: Listák összefűzése Céklában:

```
// appf(L1, L2) = L1 ⊕ L2 (L1 és L2 összefűzése)
list appf(const list L1, const list L2)  {
  if (L1 == nil) return L2;
  return cons(hd(L1), appf(tl(L1), L2)); }
```

- Írjuk át a kétargumentumú `appf` függvényt `app0/3` Prolog eljárássá!

```
app0(L1, L2, Ret) :- L1 = [], Ret = L2.
app0([HD|TL], L2, Ret) :-
    app0(TL, L2, L3), Ret = [HD|L3].
```

- Logikailag tiszta Prolog programokban a `Vált = Kif` alakú hívások kiküszöbölhetőek, ha `Vált` minden előfordulását `Kif`-re cseréljük.

```
app([], L2, L2).
app([X|L1], L2, [X|L3]) :-    % HD → X, TL → L1 helyettesítéssel
    app(L1, L2, L3).
```

- Az `app...(L1, ...)` komplexitása: a max. futási idő arányos `L1` hosszával
- Miért jobb az `app/3` mint az `app0/3`?
  - `app/3` **jobbrekurzív**, ciklussal ekvivalens (nem fogyaszt vermet)
  - `app([1,...,1000],[0],[2,...])` 1, `app0(...)` 1000 lépésben hiúsul meg.
  - `app/3` használható szétszedésre is (lásd később), míg `app0/3` nem.

Lista építése *elölről* – nyílt végű listákkal

- Egy `X` Prolog kif. nyílt végű lista, ha `X` változó, vagy `X = [_|Farok]` ahol `Farok` nyílt végű lista.

```
| ?- L = [1|_], L = [_,2|_].        ⟹    L = [1,2|_A] ?
```

- A beépített `append/3` azonos az `app/3`-mal:

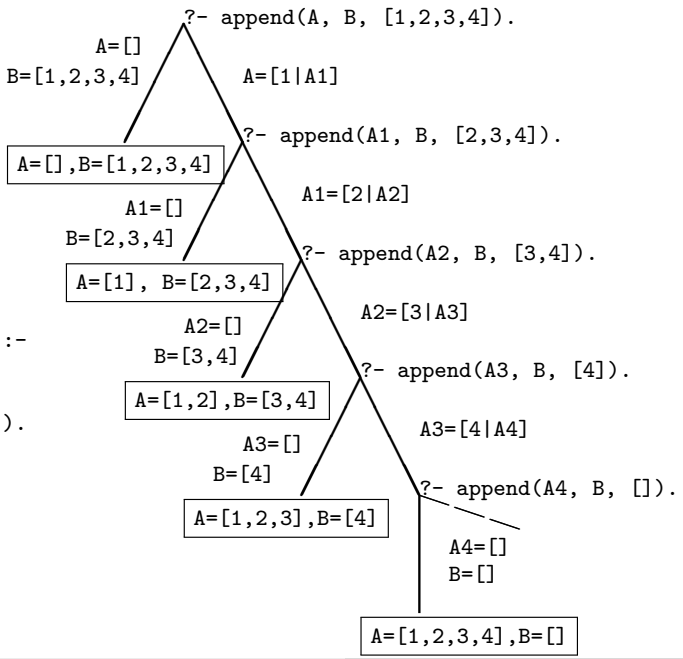
```
append([], L, L).
append([X|L1], L2, [X|L3]) :-
    append(L1, L2, L3).
```

- Az `append` eljárás már az első redukciónál felépíti az eredmény fejét!
  - Célok (pl.): `append([1,2,3], [4], Ered), write(Ered).`
  - Fej: `append([X|L1], L2, [X|L3])`
  - Behelyettesítés: `X = 1, L1 = [2,3], L2 = [4], Ered = [1|L3]`
  - Új célsorozat: `append([2,3], [4], L3), write([1|L3]).`
    (`Ered` nyílt végű lista, farka még behelyettesítetlen.)
  - A további redukciós lépések behelyettesítése és eredménye:

```
L3 = [2|L3a]    append([3], [4], L3a),   write([1|[2|L3a]]).
L3a = [3|L3b]   append([], [4], L3b),    write([1,2|[3|L3b]]).
L3b = [4]                                write([1,2,3|[4]]).
```


Listák szétbontása az `append/3` segítségével

```
% append(L1, L2, L3):
% Az L3 lista az L1 és L2
% listák elemeinek egymás
% után fűzésével áll elő.
append([], L, L).
append([X|L1], L2, [X|L3]) :-
    append(L1, L2, L3).

| ?- append(A, B, [1,2,3,4]).
A = [], B = [1,2,3,4] ? ;
A = [1], B = [2,3,4] ? ;
A = [1,2], B = [3,4] ? ;
A = [1,2,3], B = [4] ? ;
A = [1,2,3,4], B = [] ? ;
no
```



Nyílt végű listák az append változatokban

```
app0([], L, L).
app0([X|L1], L2, R) :-
    app0(L1, L2, L3), R = [X|L3].
```

```
append([], L, L).
append([X|L1], L2, [X|L3]) :-
    append(L1, L2, L3).
```

- Ha az 1. argumentum zárt végű (n hosszú), mindkét változat legfeljebb $n+1$ lépésben egyértelmű választ ad, amely lehet nyílt végű:

```
| ?- app0([1,2], L2, L3).   ⟹    L3 = [1,2|L2] ? ; no
```

- A 2. arg.-ot nem bontjuk szét ⟹ mindegy, hogy nyílt vagy zárt végű
- Ha a 3. argumentum zárt végű (n hosszú), akkor az `append` változat legfeljebb $n+1$ megoldást ad, max. $\sim 2n$ lépésben (ld. előző dia); tehát:
  - `append(L1, L2, L3)` keresési tere véges, ha `L1` vagy `L3` zárt
- Ha az 1. és a 3. arg. is nyílt, akkor a válaszhalmaz csak ∞ sok Prolog kifejezéssel fedhető le, pl.
  `_` ⊕ `[1] = L` (≡`L` utolsó eleme `1`): `L = [1]; [_,1]; [_,_,1]; ...`
- `app0` szétszedésre nem jó, pl. `app0(L, [1,2], [])` ⟹ ∞ ciklus, mert redukálva a 2. klózzal ⟹ `app0(L1, [1,2], L3), [X|L3] = [].`
- Az `append` eljárás jobbrekurzív, hála a logikai változó használatának

Variációk append-re – három lista összefűzése (kiegészítő anyag)

- append(L1,L2,L3,L123): L1 ⊕ L2 ⊕ L3 = L123

```
append(L1, L2, L3, L123) :-
        append(L1, L2, L12), append(L12, L3, L123).
```

- Lassú, pl.: append([1,...,100],[1,2,3],[1], L) 103 helyett 203 lépés!
- Szétszedésre nem alkalmas – végtelen választási pontot hoz létre
- Szétszedésre is alkalmas, hatékony változat

```
% L1 ⊕ L2 ⊕ L3 = L123,
% ahol vagy L1 és L2, vagy L123 adott (zárt végű).
append(L1, L2, L3, L123) :-
        append(L1, L23, L123), append(L2, L3, L23).
```

  - append(+,+,?,?) esetén az első append/3 hívás nyílt végű listát ad:
    `| ?- append([1,2], L23, L).` ⟹ `L = [1,2|L23] ?`
  - Az L3 argumentum behelyettesítettsége (nyílt vagy zárt végű lista-e) nem számít.

Listák megfordítása

- Naív (négyzetes lépésszámú) megoldás

```
% nrev(L, R): R = L megfordítása.
nrev([], []).
nrev([X|L], R) :-
    nrev(L, RL),
    append(RL, [X], R).
```

```
% nrev(L) = L megfordítása (Cékla)
list nrev(const list XL)        {
  if (XL == nil) return nil;
  int X = hd(XL); list L = tl(XL);
  list RL = nrev(L);
  return append(RL,cons(X,nil)); }
```

- Lineáris lépésszámú megoldás

```
% revapp(L1, R0, R): L1 megfordítását R0 elé fűzve kapjuk R-t.
revapp([], R0, R0).
revapp([X|L1], R0, R) :-
    revapp(L1, [X|R0], R).

% reverse(R, L): Az R lista az L megfordítása.
reverse(R, L) :-  revapp(L, [], R).
```

- revapp-ban R0,R egy akkumulátorpár: eddigi ill. végeredmény
- A lists könyvtár tartalmazza a reverse/2 eljárás definícióját, betöltése:
  `:- use_module(library(lists)).`

Listák gyűjtése elölről és hátulról (kiegészítő anyag)

- Prolog

```
revapp([], L, L).
revapp([X|L1], L2, L3) :-
    revapp(L1, [X|L2], L3).
```

```
append([], L, L).
append([X|L1], L2, [X|L3]) :-
    append(L1, L2, L3).
```

- C++

```
struct lnk  { char elem;
              lnk *next;
              lnk(char e): elem(e) {}   };
```

```
typedef lnk *list;
list revapp(list L1, list L2)
{ list l = L2;
  for (list p=L1; p; p=p->next)
  { list newl = new lnk(p->elem);
    newl->next = l; l = newl;
  }
  return l;
}
```

```
list append(list L1, list L2)
{ list L3, *lp = &L3;
  for (list p=L1; p; p=p->next)
  { list newl = new lnk(p->elem);
    *lp = newl; lp = &newl->next;
  }
  *lp = L2;  return L3;
}
```


Keresés listában – a member/2 beépített eljárás

- member(E, L): E az L lista eleme

```
member(Elem, [Elem|_]).
member(Elem, [_|Farok]) :-
    member(Elem, Farok).
```

- Eldöntendő (igen-nem) kérdés:
  `| ?- member(2, [1,2,3,2]).` ⟹ `yes` DE
  `| ?- member(2, [1,2,3,2]), R=yes.` ⟹ `R=yes ? ; R=yes ? ; no`
- Lista elemeinek felsorolása:
  `| ?- member(X, [1,2,3]).` ⟹ `X = 1 ? ; X = 2 ? ; X = 3 ? ; no`
  `| ?- member(X, [1,2,1]).` ⟹ `X = 1 ? ; X = 2 ? ; X = 1 ? ; no`
- Listák közös elemeinek felsorolása – az előző két hivásformát kombinálja:
  `| ?- member(X, [1,2,3]), member(X, [5,4,3,2,3]).` ⟹ `X = 2 ? ; X = 3 ? ; X = 3 ? ; no`
- Egy értéket egy (nyílt végű) lista elemévé tesz, végtelen választás!
  `| ?- member(1, L).` ⟹ `L = [1|_A] ? ; L = [_A,1|_B] ? ; L = [_A,_B,1|_C] ? ; ...`
- A member/2 keresési tere **véges**, ha 2. argumentuma zárt végű lista.

A `member/2` predikátum általánosítása: `select/3`

- `select(E, Lista, M)`: `E` elemet `Lista`ból pont egyszer elhagyva marad `M`.

```
select(E, [E|Marad], Marad).     % Elhagyjuk a fejet, marad a farok.
select(E, [X|Farok], [X|M]) :-   % Marad a fej,
        select(E, Farok, M).     %    a farokból hagyunk el elemet.
```

- Felhasználási lehetőségek:

```
| ?- select(1, [2,1,3,1], L).    % Adott elem elhagyása
    ⟹      L = [2,3,1] ? ; L = [2,1,3] ? ; no
| ?- select(X, [1,2,3], L).      % Akármelyik elem elhagyása
    ⟹      L=[2,3], X=1 ? ;  L=[1,3], X=2 ? ;   L=[1,2], X=3 ? ; no
| ?- select(3, L, [1,2]).        % Adott elem beszúrása!
    ⟹      L = [3,1,2] ? ; L = [1,3,2] ? ; L = [1,2,3] ? ; no
| ?- select(3, [2|L], [1,2,7,3,2,1,8,9,4]).
     % Beszúrható-e 3 az [1,...]-ba úgy, hogy [2,...]-t kapjunk?
    ⟹      no
| ?- select(1, [X,2,X,3], L).
    ⟹      L = [2,1,3], X = 1 ? ; L = [1,2,3], X = 1 ? ; no
```

- A `lists` könyvtárban a fenti módon definiált select/3 eljárás keresési tere **véges**, ha vagy a 2., vagy a 3. argumentuma zárt végű lista.

Listák permutációja (kiegészítő anyag)

- `perm(Lista, Perm)`: `Lista` permutációja a `Perm` lista.

```
perm([], []).
perm(Lista, [Elso|Perm]) :-
        select(Elso, Lista, Maradek),
        perm(Maradek, Perm).
```

- Felhasználási példák:

```
| ?- perm([1,2], L).
    ⟹      L = [1,2] ? ; L = [2,1] ? ; no
| ?- perm([a,b,c], L).
    ⟹      L = [a,b,c] ? ; L = [a,c,b] ? ; L = [b,a,c] ? ;
           L = [b,c,a] ? ; L = [c,a,b] ? ; L = [c,b,a] ? ; no
| ?- perm(L, [1,2]).
    ⟹      L = [1,2] ? ;  végtelen keresési tér
```

- Ha `perm/2`-ben az első argumentum ismeretlen, akkor a `select` hívás keresési tere végtelen! Illik jelezni az I/O módokat a fejkommentben:
  `% perm(+Lista, ?Perm): Lista permutációja a Perm lista.`
- A `lists` könyvtár tartalmaz egy kétirányban is működő `permutation/2` eljárást.

Tartalom

Diszjunkció

- Ismétlés: klóztörzsben a vessző (‘,’) jelentése „és”, azaz konjunkció
- A ‘;’ operátor jelentése „vagy”, azaz diszjunkció

```
% fakt(+N, ?F): F = N!.
fakt(N, F) :- N = 0, F = 1.
fakt(N, F) :-
    N > 0, N1 is N-1,
    fakt(N1, F1), F is F1*N.
```

```
fakt(N, F) :-
    (   N = 0, F = 1

    ;   N > 0, N1 is N-1,
        fakt(N1, F1), F is F1*N
    ).
```

- A diszjunkciót nyitó zárójel elérésekor választási pont jön létre
  - először a diszjunkciót az első ágára redukáljuk
  - visszalépés esetén a diszjunkciót a második ágára redukáljuk
- Tehát az első ág sikeres lefutása után kilépünk a diszjunkcióból, és az utána jövő célokkal folytatjuk a redukálást
  - azaz a ‘;’ elérésekor a ‘)’-nél folytatjuk a futást
- A ‘;’ skatulyázható (jobbról-balra) és gyengébben köt mint a ‘,’
- Konvenció: a diszjunkciót *mindig* zárójelbe tesszük, a skatulyázott diszjunkciót és az ágakat feleslegesen nem zárójelezzük. Pl. (a felesleges zárójelek aláhúzva, kiemelve): `(p;(q;r)), (a;(b,c);d)`

A diszjunkció mint szintaktikus édesítőszer

- A diszjunkció egy segéd-predikátummal mindig kiküszöbölhető, pl.:

```
a(X, Y, Z) :-
        p(X, U), q(Y, V),
        (   r(U, T), s(T, Z)
        ;   t(V, Z)
        ;   t(U, Z)
        ),
        u(X, Z).
```

- Kigyűjtjük azokat a változókat, amelyek a diszjunkcióban és azon kívül is előfordulnak
- A segéd-predikátumnak ezek a változók lesznek az argumentumai
- A segéd-predikátum minden klóza megfelel a diszjunkció egy ágának

```
seged(U, V, Z) :- r(U, T), s(T, Z).
seged(U, V, Z) :- t(V, Z).
seged(U, V, Z) :- t(U, Z).
```

```
a(X, Y, Z) :-
        p(X, U), q(Y, V),
        seged(U, V, Z),
        u(X, Z).
```


Diszjunkció – megjegyzések (kiegészítő anyag)

- Az egyes klózok ‘ÉS’ vagy ‘VAGY’ kapcsolatban vannak?
  - A program klózai **ÉS** kapcsolatban vannak, pl.

```
szuloje('Imre', 'István').    szuloje('Imre', 'Gizella').      % (1)
```

    azt állítja: Imre szülője István **ÉS** Imre szülője Gizella.
  - Az *(1)* klózok alternatív (VAGY kapcsolatú) válaszokhoz vezetnek:

```
:- szuloje('Imre' Ki). ⟹   Ki = 'István' ? ; Ki = 'Gizella' ? ; no
```

    „`X` `Imre` szülője” akkor és csak akkor ha `X` = `István` vagy `X` = `Gizella`.
- Az *(1)* predikátum átalakítható egyetlen, diszjunkciós klózzá:

```
szuloje('Imre', Sz) :-        (   Sz = 'István'
                              ;   Sz = 'Gizella'
                              ).                              % (2)
```

  Vö. De Morgan azonosságok: $(A \leftarrow B) \wedge (A \leftarrow C) \equiv (A \leftarrow (B \vee C))$
- Általánosan: tetszőleges predikátum egyklózossá alakítható:
  - a klózokat azonos fejűvé alakítjuk, új változók és =-ek bevezetésével:

```
szuloje('Imre', Sz) :- Sz = 'István'.
szuloje('Imre', Sz) :- Sz = 'Gizella'.
```

  - a klóztörzseket egy diszjunkcióvá fogjuk össze, lásd *(2)*.

A meghiúsulásos negáció (NF – Negation by Failure)

- A `\+ Hívás` vezérlési szerkezet (vö. $\nvdash$ – nem bizonyítható) procedurális szemantikája
  - végrehajtja a `Hívás` hívást,
  - ha `Hívás` sikeresen lefutott, akkor meghiúsul,
  - egyébként (azaz ha `Hívás` meghiúsult) sikerül.
- A `\+ Hívás` futása során `Hívás` legfeljebb egyszer sikerül
- A `\+ Hívás` sohasem helyettesít be változót
- Példa: Keressünk (adatbázisunkban) olyan gyermeket, aki **nem** szülő!
- Ehhez negációra van szükségünk, egy megoldás:

```
| ?- sz(X, _Sz), \+ sz(Gy, X).  % negált cél ≡ ¬(∃Gy.sz(Gy,X))
⟹   X = 'Imre' ? ; no
```

- Mi történik ha a két hívást megcseréljük?

```
| ?- \+ sz(Gy, X), sz(X, _Sz).% negált cél ≡ ¬(∃Gy,X.sz(Gy,X))
⟹   no
```

- $\backslash + H$ deklaratív szemantikája: $\neg\exists\vec{X}(H)$, ahol $\vec{X}$ a H-ban a hívás pillanatában behelyettesítetlen változók felsorolását jelöli.

```
| ?- X = 2, \+ X = 1.          ⟹   X = 2 ?
| ?- \+ X = 1, X = 2.          ⟹   no
```


Gondok a meghiúsulásos negációval

- A negált cél jelentése függ attól, hogy mely változók bírnak értékkel
- Mikor nincs gond?
  - Ha a negált cél tömör (nincs benne behelyettesítetlen változó)
  - Ha nyilvánvaló, hogy mely változók behelyettesítetlenek (pl. mert „semmis” változók: _), és a többi változó tömör értékkel bír.

```
% nem_szulo(+Sz): adott Sz nem szulo
nem_szulo(Sz) :- \+ szuloje(_, Sz).
```

- További gond: „zárt világ feltételezése” (Closed World Assumption – CWA): ami nem bizonyítható, az nem igaz.

```
| ?- \+ szuloje('Imre', X).          ⟹   no
| ?- \+ szuloje('Géza', X).          ⟹   true ?          (*)
```

  - A klasszikus matematikai logika következményfogalma monoton: ha a premisszák halmaza bővül, a következmények halmaza nem szűkülhet.
  - A CWA alapú logika nem monoton, példa: bővítsük a programot egy `szuloje('Géza', xxx).` alakú állítással $\Rightarrow$`(*)` meghiúsul.

Példa: együttható meghatározása lineáris kifejezésben

- Formula: számokból és az 'x' atomból '+' és '*' operátorokkal épül fel.
- Lineáris formula: a '*' operátor (legalább) egyik oldalán szám áll.

```
% egyhat(Kif, E): A Kif lineáris formulában az x együtthatója E.
egyhat(x, 1).                          egyhat(K1*K2, E) :-        % (4)
egyhat(Kif, E) :-                              number(K1),
        number(Kif), E = 0.                    egyhat(K2, E0),
egyhat(K1+K2, E) :-                            E is K1*E0.
        egyhat(K1, E1),                egyhat(K1*K2, E) :-        % (5)
        egyhat(K2, E2),                        number(K2),
        E is E1+E2.                            egyhat(K1, E0),
                                               E is K2*E0.
```

- A fenti megoldás hibás – többszörös megoldást kaphatunk:

```
| ?- egyhat(((x+1)*3)+x+2*(x+x+3), E).   ⟹   E = 8 ?; no
| ?- egyhat(2*3+x, E).                   ⟹   E = 1 ?; E = 1 ?; no
```

- A többszörös megoldás oka:
  az `egyhat(2*3, E)` hívás esetén a `(4)` és `(5)` klóz egyaránt sikeres!

Többszörös megoldások kiküszöbölése

- El kell érnünk, hogy ha a `(4)` sikeres, akkor `(5)` már ne sikerüljön
- A többszörös megoldás kiküszöbölhető:
  - Negációval – írjuk be `(4)` előfeltételének negáltját `(5)` törzsébe:

```
(...)
egyhat(K1*K2, E) :-                                        % (4)
        number(K1), egyhat(K2, E0), E is K1*E0.
egyhat(K1*K2, E) :-                                        % (5)
        \+ number(K1),
        number(K2), egyhat(K1, E0), E is K2*E0.
```

  - hatékonyabban, feltételes kifejezéssel:

```
(...)
egyhat(K1*K2, E) :-
        (   number(K1) -> egyhat(K2, E0), E is K1*E0
        ;   number(K2), egyhat(K1, E0), E is K2*E0
        ).
```

- A feltételes kifejezés hatékonyabban fut, mert:
  - a feltételt csak egyszer értékeli ki
  - nem hagy választási pontot

Feltételes kifejezések

- Szintaxis (`felt`, `akkor`, `egyébként` tetszőleges célsorozatok):

```
(...) :-
        (...),
        (   felt -> akkor
        ;   egyébként
        ),
        (...).
```

- Deklaratív szemantika: a fenti alak jelentése megegyezik az alábbival, ha a `felt` egy egyszerű feltétel (azaz nem oldható meg többféleképpen):

```
(...) :-
        (...),
        (   felt, akkor
        ;   \+ felt, egyébként
        ),
        (...).
```


Feltételes kifejezések (folyt.)

- Procedurális szemantika
  A `(felt->akkor;egyébként),folytatás` célsorozat végrehajtása:
  - Végrehajtjuk a `felt` hívást.
  - Ha `felt` sikeres, akkor az `(akkor,folytatás)` célsorozatra redukáljuk a fenti célsorozatot, a `felt` *első* megoldása által adott behelyettesítésekkel. A `felt` cél többi megoldását nem keressük meg!
  - Ha `felt` sikertelen, akkor az `(egyébként,folytatás)` célsorozatra redukáljuk, behelyettesítés nélkül.
- Többszörös elágaztatás skatulyázott feltételes kifejezésekkel:

```
(   felt1 -> akkor1              (   felt1 -> akkor1
;   felt2 -> akkor2              ;  (felt2 -> akkor2
;   ...                          ;   ...
)                                ))
```

  A kiemelt zárójelek feleslegesek (';' jobbról-balra zárójeleződik).
- Az `egyébként` rész elhagyható, alapértelmezése: `fail`.
- `\+ felt` átírható felt. kifejezéssé: `( felt -> fail ; true )`

Feltételes kifejezés – példák

- Faktoriális

```
% fakt(+N, ?F): N! = F.
fakt(N, F) :-
        (   N = 0 -> F = 1          % N = 0,  F = 1
        ;   N > 0, N1 is N-1, fakt(N1, F1), F is N*F1
        ).
```

- Jelentése azonos a sima diszjunkciós alakkal (lásd komment), de annál hatékonyabb, mert nem hagy maga után választási pontot.
- Szám előjele

```
% Sign = sign(Num)
sign(Num, Sign) :-
        (   Num > 0 -> Sign = 1
        ;   Num < 0 -> Sign = -1
        ;   Sign = 0
        ).
```


Példa: intervallum felsorolása

- Soroljuk fel az `N` és `M` közötti egészeket (ahol `N` és `M` maguk is egészek)

```
% between0(+M, +N, -I): M =< I =< N, I egész.
between0(M, N, M) :- M =< N.
between0(M, N, I) :- M < N,
        M1 is M+1, between0(M1, N, I).

| ?- between0(1, 2, _X), between0(3, 4, _Y), Z is 10*_X+_Y.
Z = 13 ? ; Z = 14 ? ; Z = 23 ? ; Z = 24 ? ; no
```

- A `between0(5,5,I)` hívás választási pontot hagy, optimalizált változat:

```
between(M, N, I) :- (   M > N -> fail
                    ;   M =:= N -> I = M
                    ;   (   I = M
                        ;   M1 is M+1, between(M1, N, I)
                        )
                    ).
```

(A ( ) zárójelpár szintaktikusan felesleges,
de az olvasónak jelzi, hogy az „else” ágon egy diszjunkció van.)

- A fenti eljárás (még jobban optimalizálva) elérhető a `between` könyvtárban.

A vágó eljárás – a feltételes szerkezet megvalósítási alapja

- A vágó beépített eljárás (`!`) végrehajtása:
  1. letiltja az adott predikátum további klózainak választását,

```
első_poz_elem([X|_], X) :- X > 0, !.
első_poz_elem([X|L], EP) :- X =< 0, első_poz_elem(L, EP).
```

  2. megszünteti a választási pontokat az előtte levő eljáráshívásokban.

```
első_poz_elem(L, EP) :-  member(EP, L), EP > 0, !.
```

- Segédfogalom: egy cél **szülőjének** az őt tartalmazó klóz fejével illesztett hívást nevezzük
  - A 4-kapus modellben a szülő a körülvevő dobozhoz rendelt cél.
  - A fenti vágók szülője lehet pl. a `első_poz_elem([-1,0,3,0,2], P)` cél
- A vágó végrehajtása (a fentivel ekvivalens definició):
  - mindig sikerül; de mellékhatásként a végrehajtás adott állapotától visszafelé egészen a szülő célig – azt is beleértve – megszünteti a választási pontokat.
- A vágó szemléltetése a 4-kapus doboz modellben: a vágó `Fail` kapujából a körülvevő (szülő) doboz `Fail` kapujára megyünk.

Tartalom

Operátor-kifejezések

- Példa: `S is -S1+S2` ekvivalens az `is(S, +(-(S1),S2))` kifejezéssel
- Operátoros kifejezések

  ⟨ összetett kif. ⟩ ::=

⟨ struktúranév ⟩ (⟨ argumentum ⟩, . . .)	{eddig csak ez volt}
| ⟨ argumentum ⟩ ⟨ operátornév ⟩ ⟨ argumentum ⟩	{infix kifejezés}
| ⟨ operátornév ⟩ ⟨ argumentum ⟩	{prefix kifejezés}
| ⟨ argumentum ⟩ ⟨ operátornév ⟩	{posztfix kifejezés}
| (⟨ kifejezés ⟩)	{zárójeles kif.}

  ⟨ operátornév ⟩ ::= ⟨ struktúranév ⟩ {ha operátorként lett definiálva}
- Operátor(ok) definiálása

  `op(Prio, Fajta, OpNév)` vagy `op(Prio, Fajta, [OpNév`$_1$`,...OpNév`$_n$`])`, ahol
  - `Prio` (prioritás): 1–1200 közötti egész
  - `Fajta`: az `yfx`, `xfy`, `xfx`, `fy`, `fx`, `yf`, `xf` névkonstansok egyike
  - `OpNév`$_i$ (az operátor neve): tetszőleges névkonstans
- Az `op/3` beépített predikátum meghívását általában a programot tartalmazó file elején, *direktívában* helyezzük el:

  `:- op(800, xfx, [szuloje,nagyszuloje]). 'Imre' szuloje 'István'.`
- A direktívák a programfile *betöltésekor* azonnal végrehajtódnak.

Operátorok jellemzői

- Egy operátort jellemez a fajtája és prioritása
- A fajta az asszociatívitás irányát és az írásmódot határozza meg:

Fajta			Írásmód	Értelmezés
bal-assz.	jobb-assz.	nem-assz.		
`yfx`	`xfy`	`xfx`	infix	`A f B` ≡ `f(A, B)`
	`fy`	`fx`	prefix	`f A` ≡ `f(A)`
`yf`		`xf`	posztfix	`A f` ≡ `f(A)`

- A zárójelezést a prioritás és az asszociatívitás együtt határozza meg, pl.
  - `a/b+c*d` ≡ `(a/b)+(c*d)` mert `/` és `*` prioritása 400 < 500 (`+` prioritása) (kisebb prioritás = **erősebb** kötés)
  - `a-b-c` ≡ `(a-b)-c` mert a `-` operátor fajtája `yfx`, azaz bal-asszociatív – balra köt, balról jobbra zárójelez (a fajtanévben az `y` betű mutatja az asszociatívitás irányát)
  - `a^b^c` ≡ `a^(b^c)` mert a `^` operátor fajtája `xfy`, azaz jobb-asszociatív (jobbra köt, jobbról balra zárójelez)
  - `a=b=c` szintaktikusan hibás, mert az `=` operátor fajtája `xfx`, azaz nem-asszociatív

Szabványos, beépített operátorok

Szabványos operátorok
Színkód: már ismert, új aritmetikai

1200	xfx	`:- -->`	
1200	fx	`:- ?-`	
1100	xfy	`;`	diszjunkció
1050	xfy	`->`	if-then
1000	xfy	`','`	
900	fy	`\+`	negáció
700	xfx	`= \=`	
		`< =< > >= =:= =\= is`	
		`@< @=< @> @>= == \== =..`	
500	yfx	`+ - \/ /\`	bitműveletek
400	yfx	`* / // rem`	
		`mod`	modulus
		`<< >>`	léptetések
200	xfx	`**`	hatványozás
200	xfy	`^`	
200	fy	`- \`	bitenkénti negáció

További beépített operátorok SICStus Prologban

1150	fx	`mode public`
		`dynamic block`
		`volatile`
		`discontiguous`
		`initialization`
		`multifile`
		`meta_predicate`
1100	xfy	`do`
900	fy	`spy nospy`
550	xfy	`:`
500	yfx	`\`
200	fy	`+`

Operátorok implicit zárójelezése – általános szabályok

- Egy `X op`$_1$ `Y op`$_2$ `Z` zárójelezése, ahol `op`$_1$ és `op`$_2$ prioritása n_1 és n_2:
  - ha $n_1 > n_2$ akkor `X op`$_1$ `(Y op`$_2$ `Z)`;
  - ha $n_1 < n_2$ akkor `(X op`$_1$ `Y) op`$_2$ `Z`; (kisebb prio. ⇒ erősebb kötés)
  - ha $n_1 = n_2$ és `op`$_1$ jobb-asszociatív (`xfy`), akkor `X op`$_1$ `(Y op`$_2$ `Z)`;
  - egyébként, ha $n_1 = n_2$ és `op`$_2$ bal-assz. (`yfx`), akkor `(X op`$_1$ `Y) op`$_2$ `Z`;
  - egyébként szintaktikus hiba
- Érdekes példa: `:- op(500, xfy, +^).` `% :- op(500, yfx, +).`

  `| ?- :- write((1 +^ 2) + 3), nl.` ⇒ `(1+^2)+3`

  `| ?- :- write(1 +^ (2 + 3)), nl.` ⇒ `1+^2+3`

  tehát: konfliktus esetén az első operátor asszociativitása „győz”.
- Alapszabály: egy n prioritású operátor zárójelezetlen operandusaként
  - legfeljebb $n-1$ prioritású operátort fogadunk el az `x` oldalon
  - legfeljebb n prioritású operátort fogadunk el az `y` oldalon
- A zárójelezett kifejezéseket és az alapstruktúra-alakú kifejezéseket feltétel nélkül elfogadjuk operandusként
- Az alapszabály a prefix és posztfix operátorokra is alkalmazandó

Operátorok – kiegészítő megjegyzések

- A „vessző” jel többféle helyzetben is használható:
  - struktúra-argumentumokat, ill. listaelemeket határol el egymástól
  - 1000 prioritású `xfy` op. pl.: `(p:-a,b,c)`≡`:-(p,',',(a,',',(b,c)))`
    - A vessző atomként csak a `','`, határolóként csak a `,`, operátorként mindkét formában – `','` vagy `,` – használható.
  - `:-(p, a,b,c)` többértelmű: $\stackrel{?}{=}$ `:-(p, (a,b,c))`, ... $\stackrel{?}{=}$ `:-(p,a,b,c)`...
  - Egyértelműsítés: argumentumaban vagy listaelemben az 1000-nél ≥ prioritású operátort tartalmazó kifejezést *zárójelezni kell*:

```
| ?- write_canonical((a,b,c)).  ⟹  ','(a,','(b,c))
| ?- write_canonical(a,b,c).    ⟹  ! write_canonical/3 does not exist
```

- Használható-e ugyanaz a név többféle fajtájú operátorként?
  - Nyilván nem lehet egy operátor egyszerre `xfy` és `xfx` is, stb.
  - De pl. a `+` és `-` operátorok `yfx` és `fy` fajtával is használhatók
- A könnyebb elemezhetőség miatt a Prolog szabvány kiköti, hogy
  - operátort operandusként zárójelbe kell tenni, pl. `Comp=(>)`
  - egy operátor nem lehet egyszerre infix és posztfix.

  Sok Prolog rendszer (pl. a SICStus) nem követeli meg ezek betartását

Operátorok törlése, lekérdezése

- Egy vagy több operátor törlésére az `op/3` beépített eljárást használhatjuk, ha első argumentumként (prioritásként) 0-t adunk meg.

```
| ?- X = a+b, op(0, yfx, +).  ⟹  X = +(a,b) ? ; no
| ?- X = a+b.                 ⟹  ! Syntax error
                                 ! op. expected after expression
                                 ! X = a <<here>> + b .
| ?- op(500, yfx, +).         ⟹  yes
| ?- X = +(a,b).              ⟹  X = a+b ? ; no
```

- Az adott pillanatban érvényes operátorok lekérdezése:

```
current_op(Prioritás, Fajta, OpNév)
```

```
| ?- current_op(P, F, +).
⟹   F = fy, P = 200 ? ;
     F = yfx, P = 500 ? ;
no
| ?- current_op(_, xfy, Op), write_canonical(Op), write(' '), fail.
; do -> ',' : ^
no
```


Operátorok felhasználása

- Mire jók az operátorok?
  - aritmetikai eljárások kényelmes irására, pl. `X is (Y+3) mod 4`
  - szimbolikus kifejezések kezelésére (pl. szimbolikus deriválás)
  - klózok leírására (`:-` és `','` is operátor), és meta-eljárásoknak való átadására, pl `asserta( (p(X):-q(X),r(X)) )`
  - eljárásfejek, eljáráshívások olvashatóbbá tételére:

```
:- op(800, xfx, [nagyszülője, szülője]).

Gy nagyszülője N :-  Gy szülője Sz, Sz szülője N.
```

  - adatstruktúrák olvashatóbbá tételére, pl.

```
sav(kén, h*2-s-o*4).
```

- Miért rossz a Prolog operátorfogalma?
  - A modularitás hiánya miatt:
  - Az operátorok egy globális erőforrást képeznek, ez nagyobb projektben gondot okozhat.

Operátoros példa: polinom behelyettesítési értéke

- Formula: az ‘`x`’ névkonstansból és számokból az ‘`+`’ és ‘`*`’ operátorokkal felépülő kifejezés.
- A feladat: Egy formula értékének kiszámolása egy adott `x` érték esetén.

```
% erteke(Kif, X, E): A Kif formula x=X helyen vett értéke E.
erteke(x, X, E) :-
        E = X.
erteke(Kif, _, E) :-
        number(Kif), E = Kif.
erteke(K1+K2, X, E) :-
        erteke(K1, X, E1),
        erteke(K2, X, E2),
        E is E1+E2.
erteke(K1*K2, X, E) :-
        erteke(K1, X, E1),
        erteke(K2, X, E2),
        E is E1*E2.
```

```
| ?- erteke((x+1)*x+x+2*(x+x+3), 2, E).
E = 22 ? ;
no
```

Klasszikus szimbolikuskifejezés-feldolgozás: deriválás

- Írjunk olyan Prolog predikátumot, amely az `x` névkonstansból és számokból a `+`, `-`, `*` műveletekkel képzett kifejezések deriválását elvégzi!

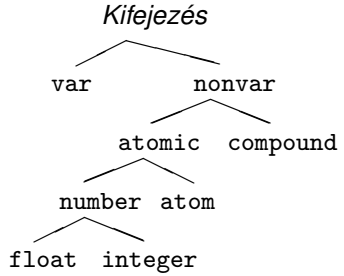
```
% deriv(Kif, D):  Kif-nek az x szerinti deriváltja D.
deriv(x, 1).
deriv(C, 0) :-                  number(C).
deriv(U+V, DU+DV) :-            deriv(U, DU), deriv(V, DV).
deriv(U-V, DU-DV) :-            deriv(U, DU), deriv(V, DV).
deriv(U*V, DU*V + U*DV) :-      deriv(U, DU), deriv(V, DV).
```

```
| ?- deriv(x*x+x, D).
  ⟹    D = 1*x+x*1+1 ? ; no

| ?- deriv((x+1)*(x+1), D).
  ⟹    D = (1+0)*(x+1)+(x+1)*(1+0) ? ; no

| ?- deriv(I, 1*x+x*1+1).
  ⟹    I = x*x+x ? ; no

| ?- deriv(I, 0).
  ⟹    no
```


Tartalom

Az egyesítési algoritmus – a Prolog adatfogalma

- Prolog kifejezések osztályozása – kanonikus alak



`var(X)`	`X` változó
`nonvar(X)`	`X` nem változó
`atomic(X)`	`X` konstans
`compound(X)`	`X` struktúra
`number(X)`	`X` szám
`atom(X)`	`X` névkonstans
`float(X)`	`X` lebegőpontos szám
`integer(X)`	`X` egész szám

Az egyesítés célja

- Egyesítés (*unification*): két Prolog kifejezés (pl. egy eljáráshívás és egy klózfej) azonos alakra hozása, változók esetleges behelyettesítésével, a lehető legáltalánosabban (a legkevesebb behelyettesítéssel)
- Az egyesítés **szimmetrikus**: mindkét oldalon lehet – és behelyettesítődhet – változó
- Példák
  - Bemenő paraméterátadás – a fej változóit helyettesíti be:
    hívás: `nagyszuloje('Imre', Nsz),`
    fej: `nagyszuloje(Gy, N),`
    behelyettesítés: `Gy ← 'Imre', N ← Nsz`
  - Kimenő paraméterátadás – a hívás változóit helyettesíti be:
    hívás: `szuloje('Imre', Sz),`
    fej: `szuloje('Imre', 'István'),`
    behelyettesítés: `Sz ← 'István'`
  - Kétirányú paraméterátadás – fej- és hívásváltozókat is behelyettesít:
    hívás: `tree_sum(leaf(5), Sum)`
    fej: `tree_sum(leaf(V), V)`
    behelyettesítés: `V ← 5,  Sum ← 5`

Az egyesítési algoritmus feladata

- Az egyesítési algoritmus
  - bemenete: két Prolog kifejezés: A és B
    (pl. egy klóz feje és egy célsorozat első tagja)
  - feladata: a két kifejezés egyesíthetőségének eldöntése
  - matematikailag az eredménye: meghiúsulás, vagy siker és a legáltalánosabb egyesítő – *most general unifier*, $mgu(A, B)$ – előállítása
  - praktikusan nem az *mgu* egyesítő előállítása szükséges, hanem az egyesítő behelyettesítés végrehajtása (a szóbanforgó klóz törzsén és a célsorozat maradékán)
- A legáltalánosabb egyesítő az, amelyik nem helyettesít be „feleslegesen”
  - példa: `tree_sum(leaf(V), V) = tree_sum(T, S)`
    - egy egyesítő behelyettesítés: `V`←`1`, `T`←`leaf(1)`, `S`←`1`
    - legáltalánosabb egyesítő behelyettesítés: `T`←`leaf(V)`, `S`←`V`, vagy `T`←`leaf(S)`, `V`←`S`
  - az *mgu* – változó-átnevezéstől (pl. `V`←`S`) eltekintve – **egyértelmű**
  - minden egyesítő előállítható a legáltalánosabból további behelyettesítéssel, pl. `V`←`1` ill. `S`←`1`

A „praktikus” egyesítési algoritmus

1. Ha A és B azonos változók vagy konstansok, akkor kilép sikerrel, behelyettesítés nélkül
2. Egyébként, ha A változó, akkor a $\sigma = \{A \leftarrow B\}$ behelyettesítést elvégzi, és kilép sikerrel
3. Egyébként, ha B változó, akkor a $\sigma = \{B \leftarrow A\}$ behelyettesítést elvégzi, és kilép sikerrel (a 2. és 3. lépések felcserélhetők)
4. Egyébként, ha A és B azonos nevű és argumentumszámú összetett kifejezések és argumentum-listáik $A_1,\ldots,A_N$ ill. $B_1,\ldots,B_N$, akkor
   - A_1 és B_1 egyesítését elvégzi (beleértve az ehhez szükséges behelyettesítések végrehajtását), ha ez sikertelen, akkor kilép meghiúsulással;
   - A_2 és B_2 egyesítését elvégzi, ha ez sikertelen, akkor kilép meghiúsulással;
   - ...
   - A_N és B_N egyesítését elvégzi, ha ez sikertelen, akkor kilép meghiúsulással

   Kilép sikerrel
5. Minden más esetben kilép meghiúsulással (A és B nem egyesíthető)

Egyesítési példák a gyakorlatban

- Az egyesítéssel kapcsolatos beépített eljárások:
  - `X = Y` egyesíti a két argumentumát, meghiúsul, ha ez nem lehetséges.
  - `X \= Y` sikerül, ha két argumentuma nem egyesíthető, egyébként meghiúsul.
- Példák:

```
| ?- 3+(4+5) = Left+Right.
       Left = 3, Right = 4+5 ?
| ?- node(leaf(X), T) = node(T, leaf(3)).
       T = leaf(3), X = 3 ?
| ?- X*Y = 1+2*3.
       no                          % mert 1+2*3 ≡ 1+(2*3)
| ?- X*Y = (1+2)*3.
       X = 1+2, Y = 3 ?
| ?- f(X, 3/Y-X, Y) = f(U, B-a, 3).
       B = 3/3, U = a, X = a, Y = 3 ?
| ?- f(f(X), U+2*2) = f(U, f(3)+Z).
       U = f(3), X = 3, Z = 2*2 ?
```


Az egyesítés kiegészítése: előfordulás-ellenőrzés, *occurs check*

- Kérdés: `X` és `s(X)` egyesíthető-e?
  - A matematikai válasz: *nem*, egy változó nem egyesíthető egy olyan struktúrával, amelyben előfordul (ez az előfordulás-ellenőrzés).
  - Az ellenőrzés költséges, ezért alaphelyzetben nem alkalmazzák (emiatt ún. ciklikus kifejezések keletkezhetnek)
  - Szabványos eljárásként rendelkezésre áll: `unify_with_occurs_check/2`
  - Kiterjesztés (pl. SICStus): az előfordulás-ellenőrzés elhagyása miatt keletkező ciklikus kifejezések tisztességes kezelése.
- Példák:

```
| ?- X = s(1,X).
       X = s(1,s(1,s(1,s(1,s(...))))) ?
| ?- unify_with_occurs_check(X, s(1,X)).
       no
| ?- X = s(X), Y = s(s(Y)), X = Y.
       X = s(s(s(s(s(...))))), Y = s(s(s(s(s(...))))) ?
```

Az egyesítési alg. matematikai megfogalmazása (kieg. anyag)

- A *behelyettesítés* egy olyan σ függvény, amely a $Dom(\sigma)$-beli változókhoz kifejezéseket rendel. Általában posztfix jelölést használunk, pl. $\mathtt{X}\sigma$
  - Példa: $\sigma = \{\mathtt{X}\leftarrow\mathtt{a}, \mathtt{Y}\leftarrow\mathtt{s(b,B)}, \mathtt{Z}\leftarrow\mathtt{C}\}$, $Dom(\sigma) = \{\mathtt{X},\mathtt{Y},\mathtt{Z}\}$, $\mathtt{X}\sigma = \mathtt{a}$
- A behelyettesítés-függvény természetes módon kiterjeszthető:
  - $K\sigma$: σ alkalmazása egy *tetszőleges* K kifejezésre: σ behelyettesítéseit *egyidejűleg* elvégezzük K-ban.
  - Példa: $\mathtt{f(g(Z,h),A,Y)}\sigma = \mathtt{f(g(C,h),A,s(b,B))}$
- Kompozíció: $\sigma \otimes \theta$ = σ és θ egymás utáni alkalmazása: $\mathtt{X}(\sigma \otimes \theta) = \mathtt{X}\sigma\theta$
  - A $\sigma \otimes \theta$ behelyettesítés az $x \in Dom(\sigma)$ változókhoz az $(x\sigma)\theta$ kifejezést, a többi $y \in Dom(\theta)\backslash Dom(\sigma)$ változóhoz $y\theta$-t rendeli ($Dom(\sigma \otimes \theta) = Dom(\sigma) \bigcup Dom(\theta)$):

    $$\sigma\otimes\theta = \{x \leftarrow (x\sigma)\theta \mid x \in Dom(\sigma)\} \bigcup \{ y \leftarrow y\theta \mid y \in Dom(\theta)\backslash Dom(\sigma)\}$$

  - Pl. $\theta = \{\mathtt{X}\leftarrow\mathtt{b}, \mathtt{B}\leftarrow\mathtt{d}\}$ esetén $\sigma \otimes \theta = \{\mathtt{X}\leftarrow\mathtt{a}, \mathtt{Y}\leftarrow\mathtt{s(b,d)}, \mathtt{Z}\leftarrow\mathtt{C}, \mathtt{B}\leftarrow\mathtt{d}\}$
- Egy G kifejezés **általánosabb** mint egy S, ha létezik olyan ρ behelyettesítés, hogy $S = G\rho$
  - Példa: G =`f(A,Y)` általánosabb mint S =`f(1,s(Z))`, mert $\rho = \{\mathtt{A}\leftarrow 1, \mathtt{Y}\leftarrow\mathtt{s(Z)}\}$ esetén $S = G\rho$.

A legáltalánosabb egyesítő előállítása (kiegészítő anyag)

- A és B kifejezések egyesíthetőek ha létezik egy olyan σ behelyettesítés, hogy $A\sigma = B\sigma$. Ezt az $A\sigma = B\sigma$ kifejezést A és B egyesített alakjának nevezzük.
- Két kifejezésnek általában több egyesített alakja lehet.
  - Példa: A =`f(X, Y)` és B =`f(s(U), U)` egyesített alakja pl.
    - K_1 =`f(s(a),a)` a $\sigma_1 = \{\mathtt{X}\leftarrow\mathtt{s(a)}, \mathtt{Y}\leftarrow\mathtt{a}, \mathtt{U}\leftarrow\mathtt{a}\}$ behelyettesítéssel
    - K_2 =`f(s(U),U)` a $\sigma_2 = \{\mathtt{X}\leftarrow\mathtt{s(U)}, \mathtt{Y}\leftarrow\mathtt{U}\}$ behelyettesítéssel
    - K_3 =`f(s(Y),Y)` a $\sigma_3 = \{\mathtt{X}\leftarrow\mathtt{s(Y)}, \mathtt{U}\leftarrow\mathtt{Y}\}$ behelyettesítéssel
- A és B legáltalánosabb egyesített alakja egy olyan C kifejezés, amely A és B minden egyesített alakjánál általánosabb
  - A fenti példában K_2 és K_3 legáltalánosabb egyesített alakok
- **Tétel**: A legáltalánosabb egyesített alak, változó-átnevezéstől eltekintve egyértelmű.
- A és B legáltalánosabb egyesítője egy olyan $\sigma = mgu(A, B)$ behelyettesítés, amelyre $A\sigma$ és $B\sigma$ a két kifejezés legáltalánosabb egyesített alakja. Pl. σ_2 és σ_3 a fenti A és B legáltalánosabb egyesítője.
- **Tétel**: A legáltalánosabb egyesítő, változó-átnevezéstől eltekintve egyértelmű.

A „matematikai” egyesítési algoritmus (kiegészítő anyag)

- Az egyesítési algoritmus
  - bemenete: két Prolog kifejezés: A és B
  - feladata: a két kifejezés egyesíthetőségének eldöntése
  - eredménye: siker esetén az $mgu(A, B)$ legáltalánosabb egyesítő
- A rekurzív egyesítési algoritmus $\sigma = mgu(A, B)$ előállítására
  1. Ha A és B azonos változók vagy konstansok, akkor $\sigma = \{\}$ (üres).
  2. Egyébként, ha A változó, akkor $\sigma = \{A \leftarrow B\}$.
  3. Egyébként, ha B változó, akkor $\sigma = \{B \leftarrow A\}$.
     (A (2) és (3) lépések sorrendje felcserélődhet.)
  4. Egyébként, ha A és B azonos nevű és argumentumszámú összetett kifejezések és argumentum-listáik $A_1,\ldots,A_N$ ill. $B_1,\ldots,B_N$, és
     a. A_1 *és* B_1 *legáltalánosabb egyesítője* σ_1,
     b. $A_2\sigma_1$ *és* $B_2\sigma_1$ *legáltalánosabb egyesítője* σ_2,
     c. $A_3\sigma_1\sigma_2$ *és* $B_3\sigma_1\sigma_2$ *legáltalánosabb egyesítője* σ_3,
     d. ...

     akkor $\sigma = \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3 \otimes \ldots$.
  5. Minden más esetben a A és B nem egyesíthető.

Egyesítési példák (kiegészítő anyag)

- A = `tree_sum(leaf(V), V)`, B = `tree_sum(leaf(5), S)`
  - (4.) A és B neve és argumentumszáma megegyezik
    - (a.) `mgu(leaf(V), leaf(5))` (4., majd 2. szerint) $= \{\mathtt{V}\leftarrow 5\} = \sigma_1$
    - (b.) `mgu(V`σ_1`, S)` = `mgu(5, S)` (3. szerint) = $\{\mathtt{S}\leftarrow 5\} = \sigma_2$
  - tehát $mgu(A, B) = \sigma_1 \otimes \sigma_2 = \{\mathtt{V}\leftarrow 5, \mathtt{S}\leftarrow 5\}$
- A = `node(leaf(X), T)`, B = `node(T, leaf(3))`
  - (4.) A és B neve és argumentumszáma megegyezik
    - (a.) `mgu(leaf(X), T)` (3. szerint) $= \{\mathtt{T}\leftarrow\mathtt{leaf(X)}\} = \sigma_1$
    - (b.) `mgu(T`σ_1`, leaf(3))` = `mgu(leaf(X), leaf(3))` (4, majd 2. szerint) = $\{\mathtt{X}\leftarrow 3\} = \sigma_2$
  - tehát $mgu(A, B) = \sigma_1 \otimes \sigma_2 = \{\mathtt{T}\leftarrow\mathtt{leaf(3)}, \mathtt{X}\leftarrow 3\}$

Az eljárás-redukciós végrehajtási modell

- A Prolog végrehajtás (ismétlés):
  - egy adott célsorozat futtatása egy adott programra vonatkozóan,
  - eredménye lehet:
    - siker – változó-behelyettesítésekkel
    - meghiúsulás (változó-behelyettesítések nélkül)
- A végrehajtás egy állapota: egy célsorozat
- A végrehajtás kétféle lépésből áll:
  - redukciós lépés: egy célsorozat + klóz → új célsorozat
  - visszalépés (zsákutca esetén): visszatérés a legutolsó választási ponthoz és a **további** (eddig nem próbált) klózokkal való redukciós lépések

A redukciós modell alapeleme, a redukciós lépés (ismétlés)

- Redukciós lépés: egy célsorozat redukálása egy újabb célsorozattá
  - egy programklóz segítségével (az első cél felhasználói eljárást hív):
    - A klózt **lemásoljuk**, minden változót szisztematikusan új változóra cserélve.
    - A célsorozatot szétbontjuk az első hívásra és a maradékra.
    - Az első hívást **egyesítjük** a klózfejjel
    - A szükséges behelyettesítéseket elvégezzük a klóz **törzs**én és a **célsorozat** maradékán is
    - Az új célsorozat: a klóztörzs és utána a maradék célsorozat
    - Ha a hívás és a klózfej nem egyesíthető ⇒meghiúsulás
  - egy beépített eljárás segítségével (az első cél beépített eljárást hív):
    - A célsorozatot szétbontjuk az első hívásra és a maradékra.
    - A beépített eljáráshívást végrehajtjuk
    - Siker esetén a behelyettesítéseket elvégezzük a célsorozat maradékán ez lesz az új célsorozat
    - Ha a beépített eljárás hívása sikertelen⇒meghiúsulás

Az eljárás-redukciós végrehajtási algoritmus

- A végrehajtási algoritmus leírásában használt adatstruktúrák:
  - `CS` – célsorozat
  - egy verem, melynek elemei `<CS,I>` alakú párok – ahol `CS` egy célsorozat, `I` a célsorozat első céljának redukálásához használt legutolsó klóz sorszáma.
- A verem a visszalépést szolgálja: minden választási pontnál a veremre mentjük az aktuális `<CS,I>` párt.
- Visszalépéskor a verem tetejéről leemelünk egy `<CS,I>` párt és a végrehajtás következő lépése: `CS` redukciója az `I+1`-edik klózzal.

A Prolog végrehajtási algoritmusa

1. *(Kezdeti beállítások:)* A verem üres, `CS :=` kezdeti célsorozat
2. *(Beépített elj.:)* Ha `CS` első hívása beépített akkor hajtsuk végre a red. lépést.
   a. Ha ez sikertelen ⇒ 6. lépés.
   b. Ha ez sikeres, `CS :=` a redukciós lépés eredménye, és ⇒ 5. lépés.
3. *(Klózszámláló kezdőértékezése:)* `I = 1`.
4. *(Redukciós lépés:)* Tekintsük `CS` első hívására alkalmazható klózok listáját. Ez indexelés nélkül a predikátum összes klóza lesz, indexelés esetén (lásd 2. Prolog blokk) ennek egy megszűrt részsorozata. Tegyük fel, hogy ez a lista `N` elemű.
   a. Ha `I > N` ⇒ 6. lépés.
   b. Redukciós lépés a lista `I`-edik klóza és a `CS` célsorozat között.
   c. Ha ez sikertelen, akkor `I := I+1`, és ⇒ 4a. lépés.
   d. Ha `I < N` (nem utolsó), akkor vermeljük `<CS,I>`-t.
   e. `CS :=` a redukciós lépés eredménye.
5. *(Siker:)* Ha `CS` üres, akkor sikeres vég, egyébként ⇒ 2. lépés.
6. *(Sikertelenség:)* Ha a verem üres, akkor sikertelen vég.
7. *(Visszalépés:)* Leemeljük a (nem üres) verem tetejéről a `<CS,I>`-párt, `I := I+1`, és ⇒ 4. lépés.

A faösszegző program többirányú aritmetikával

- A korábbi faösszegző program a `tree_sum(T, 3)` hívás esetén hibát jelez az `is/2` hívásnál.
- Az `is` beépített eljárás helyett egy saját `plus` eljárást használva egészek korlátos tartományán megoldható a kétirányú működés.

```
% plus(A, B, C): A+B=C, ahol 0 < A,B,C =< 3 egész számok,
plus(1, 1, 2).     plus(1, 2, 3).     plus(2, 1, 3).

% tree_sum(Tree, S): A Tree fa leveleiben levő számok összege S.
```

```
% tree_sum(+Tree, ?S):
tree_sum(leaf(Value), Value).
tree_sum(node(Left,Right), S) :-
        tree_sum(Left, SL),
        tree_sum(Right, SR),
        S is SL+SR.
```

```
% tree_sum2(?Tree, ?S):
tree_sum2(leaf(Value), Value).
tree_sum2(node(Left,Right), S) :-
        plus(SL, SR, S),
        tree_sum2(Left, SL),
        tree_sum2(Right, SR).
```

- A jobboldali változat `(+,?)` módban nagyon kevéssé hatékony `:-(`.

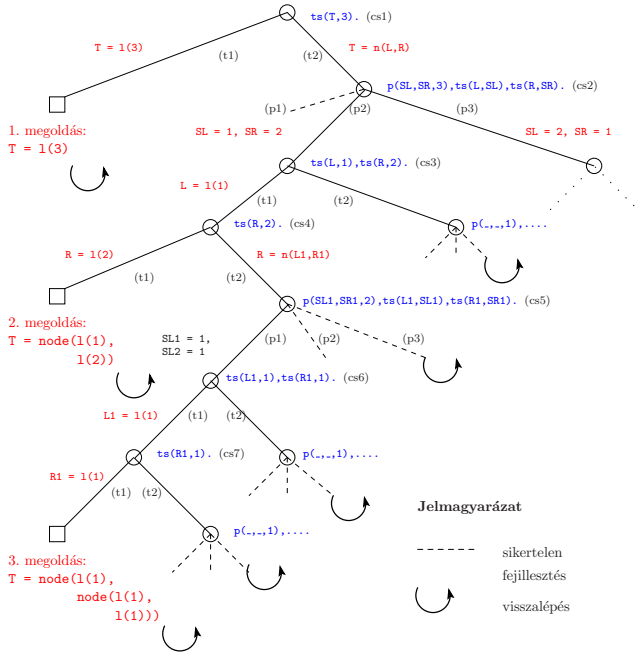
A többirányú faösszegző program keresési tere

A program:

```
p(1, 1, 2).     (p1)
p(1, 2, 3).     (p2)
p(2, 1, 3).     (p3)

ts(l(V), V).    (t1)
ts(n(L,R), S) :-
  p(SL,SR,S),
  ts(L, SL),
  ts(R, SR).    (t2)
```

A verem a 3. megoldásnál:

⟨(cs2), 2⟩
⟨(cs3), 1⟩
⟨(cs5), 1⟩
⟨(cs6), 1⟩
⟨(cs7), 1⟩



Tartalom

Az „univ” beépített eljárás (`=..` /2)

- Formula (`Form`): az ‘`x`’ atom; szám; `Form1 + Form2`; `Form1 * Form2`
- Számoljuk ki egy formula értékét egy adott `x` behelyettesítés mellett!

```
% value_of(+Form, +XE, ?E): az x=XE helyettesítéssel Form értéke E.
value_of0(x, X, V) :- V = X.
value_of0(N, _, V) :-
    number(N), V = N.

value_of0(P1+P2, X, V) :-
    value_of0(P1, X, V1),
    value_of0(P2, X, V2),
    V is V1+V2.
value_of0(Frm, X, V) :-
    Frm = *(P1,P2),
    value_of0(P1, X, V1),
    value_of0(P2, X, V2),
    FrmV = *(V1,V2),
    V is FrmV.
```

```
value_of(x, X, V) :- V = X.
value_of(N, _, V) :-
    number(N), V = N.

value_of(Frm, X, V) :-
    Frm =.. [Func,P1,P2],
    value_of(P1, X, V1),
    value_of(P2, X, V2),
    FrmV =.. [Func,V1,V2],
    V is FrmV.
```

- `value_of/3` minden az `is/2` által elfogadott bináris függvényre működik!

```
| ?- value_of(exp(100,min(x,1/x)), 2, V).      ⟹      V = 10.0 ? ; no
```

Struktúrák szétszedése és összerakása: az *univ* eljárás

- Az *univ* eljárás hívási mintái: `+Kif =..  ?Lista`
  `-Kif =..  +Lista`
- Az eljárás jelentése:
  - `Kif` = $Fun(A_1, \ldots, A_n)$ és `Lista` = $[Fun, A_1, \ldots, A_n]$, ahol Fun egy névkonstans és $A_1, \ldots, A_n$ tetszőleges kifejezések; vagy
  - `Kif` = C és `Lista` = $[C]$, ahol C egy konstans.
- Példák

```
| ?- el(a,b,10) =.. L.          ⟹   L = [el,a,b,10]
| ?- Kif =.. [el,a,b,10].       ⟹   Kif = el(a,b,10)
| ?- alma =.. L.                ⟹   L = [alma]
| ?- Kif =.. [1234].            ⟹   Kif = 1234
| ?- Kif =.. L.                 ⟹   hiba
| ?- f(a,g(10,20)) =.. L.       ⟹   L = [f,a,g(10,20)]
| ?- Kif =.. [/,X,2+X].         ⟹   Kif = X/(2+X)
| ?- [a,b,c] =.. L.             ⟹   L = ['.',a,[b,c]]
```


Keresési feladat Prologban – felsorolás vagy gyűjtés?

- Keresési feladat: adott feltételeknek megfelelő dolgok meghatározása.
- Prolog nyelven egy ilyen feladat alapvetően kétféle módon oldható meg:
  - gyűjtés – az összes megoldás összegyűjtése, pl. egy listába;
  - felsorolás – a megoldások visszalépéses felsorolása: egyszerre egy megoldást kapunk, de visszalépéssel sorra előáll minden megoldás.
- Egyszerű példa: egy lista páros elemeinek megkeresése:

% Gyűjtés:

```
% páros_elemei(L, Pk): Pk az L
% lista páros elemeinek listája.
páros_elemei([], []).
páros_elemei([X|L], Pk) :-
    X mod 2 =\= 0,
    páros_elemei(L, Pk).
páros_elemei([P|L], [P|Pk]) :-
    P mod 2 =:= 0,
    páros_elemei(L, Pk).
```

% Felsorolás:

```
% páros_eleme(L, P): P egy páros
% eleme az L listának.
páros_eleme([X|L], P) :-
    X mod 2 =:= 0, P = X.
páros_eleme([_X|L], P) :-
    % _X akár páros, akár páratlan
    % folytatjuk a felsorolást:
    páros_eleme(L, P).

% egyszerűbb megoldás:
páros_eleme2(L, P) :-
    member(P, L), P mod 2 =:= 0.
```


Gyűjtés és felsorolás kapcsolata

- Ha adott `páros_elemei`, hogyan definiálható `páros_eleme`?
  - A `member/2` könyvtári eljárás segítségével, pl.

```
páros_eleme(L, P) :-
    páros_elemei(L, Pk), member(P, Pk).
```

  - Természetesen ez így nem hatékony!
- Ha adott `páros_eleme`, hogyan definiálható `páros_elemei`?
  - Megoldásgyűjtő beépített eljárás segítségével, pl.

```
páros_elemei(L, Pk) :-
    findall(P, páros_eleme(L, P), Pk).
    % páros_eleme(L, P) összes P megoldásának listája Pk.
```

  - a `findall/3` beépített eljárás egy másik alkalmazása:

```
% seq(+A, +B, ?L): L = [A,...,B], A és B egészek.
seq(A, B, L) :-
    B >= A-1,
    findall(X, between(A, B, X), L).
```

  vö. $L = \{X | A \leq X \leq B, integer(X)\}$, ahol $B \geq A - 1$

A `findall(?Gyűjtő, :Cél, ?Lista)` beépített eljárás

- Az eljárás végrehajtása (procedurális szemantikája):
  - a `Cél` kifejezést eljáráshívásként értelmezi, meghívja (A `:Cél` annotáció meta- (azaz eljárás) argumentumot jelez);
  - minden egyes megoldásához előállítja `Gyűjtő` egy *másolatát*, azaz a változókat, ha vannak, szisztematikusan újakkal helyettesíti;
  - Az összes `Gyűjtő` másolat listáját egyesíti `Lista`-val.
- Példák az eljárás használatára:

```
| ?- findall(X, (member(X, [1,7,8,3,2,4]), X>3), L).
                ⟹    L = [7,8,4] ? ; no
| ?- findall(Y, member(X-Y, [a-c,a-b,b-c,c-e,b-d]), L).
                ⟹    L = [c,b,c,e,d] ? ; no
```

- Az eljárás jelentése (deklaratív szemantikája):
  `Lista` = { `Gyűjtő` másolat | (∃ `X` ... `Z`)`Cél` igaz }
  ahol `X`, ..., `Z` a `findall` hívásban levő *szabad változók*.

  Szabad változó (definíció): olyan, a hívás pillanatában behelyettesítetlen változó, amely a `Cél`-ban előfordul de a `Gyűjtő`-ben nem.

Jobbrekurzív predikátumok akkumulátorok segítségével

- A listaösszegzés „természetes”, nem jobbrekurzív definíciója:

```
% sum0(+L, ?S): L elemeinek összege S (S = 0+L_n+L_{n-1}+...+L_1).
sum0([], 0).
sum0([X|L], S):-        sum0(L,S0), S is S0+X.
```

- Jobbrekurzív lista-összegző:

```
% sum(+L, ?S): L  elemeinek összege S (S = 0+L_1+L_2+...+L_n).
sum(L, S):-             sum(L, 0, S).

% sum(+L, +S0, ?S): L elemeit S0-hoz adva kapjuk S-t. (≡  Σ L = S-S0)
sum([], S, S).
sum([X|L], S0, S):-     S1 is S0+X, sum(L, S1, S).
```

- A jobbrekurzív `sum` eljárás több mint 3-szor gyorsabb mint a `sum0`!
- Az akkumulátor az imperatív (azaz megváltoztatható értékű) változó fogalmának deklaratív megfelelője:
  - A `sum/3`-ban az `S0` és `S` argumentumok akkumulátorpárt alkotnak.
  - Az akkumulátorpár két része az adott változó mennyiség (a példában az összeg) különböző időpontokban vett értékeit mutatja:
    - `S0` az összeg a `sum/3` meghívásakor: a változó kezdőértéke;
    - `S` az összeg a `sum/3` lefutása után: a változó végértéke.

Hogyan írjunk át imperatív nyelvű algoritmust Prolog programmá?

- Példafeladat: Hatékony hatványozási algoritmus
  - Alaplépés: a kitevő felezése, az alap négyzetre emelése.
  - A kitevő kettes számrendszerbeli alakja szerint hatványoz.
- Az algoritmust megvalósító C nyelvű függvény:

```
/* hatv(a, h) = a**h */
int hatv(int a, unsigned h)
{
  int e = 1;
  while (h > 0)
  {
    if (h & 1) e *= a;
    h >>= 1; a *= a;
  }
  return e;
}
```

- Az algoritmusban három változó van: `a, h, e`:
  - `a` és `h` végértékére nincs szükség,
  - `e` végső értéke szükséges (ez a függvény eredménye).

A `hatv` C függvénynek megfelelő Prolog eljárás

- Kétargumentumú C függvény $\Longrightarrow$ 2+1-argumentumú Prolog eljárás.
- A függvény eredménye $\Longrightarrow$ utolsó arg.: `hatv(+A, +H, ?E)`: $A^H = E$.
- Ciklus $\Longrightarrow$ segédeljárás: `hatv(+A0, +H0, +E0, ?E)`: $A0^{H0} * E0 = E$.
- »a« és »h« C változók $\Longrightarrow$ »+A0« és »+H0« bemenő *paraméterek* (nem kell végérték),
  »e« C változó $\Longrightarrow$ »+E0, ?E« *akkumulátorpár* (kezdőérték, végérték).

```
hatv(A, H, E) :-
    hatv(A, H, 1, E).

hatv(A0, H0, E0, E) :- H0 > 0, !,
    (   H0 /\ 1 =:= 1
        % /\ ≡ bitenkénti "és"
    ->  E1 is E0*A0
    ;   E1 = E0
    ),
    H1 is H0 >> 1,
    A1 is A0*A0,
    hatv(A1, H1, E1, E).
hatv(_, _, E, E).
```

```
int hatv(int a, unsigned h)
{       int e = 1;

  ism:  if (h > 0)
        {  if (h & 1)
             e *= a;




           h >>= 1;
           a *= a;
           goto ism;
        } else return e;
}
```


IV. rész

Erlang alapok

Tartalom

Funkcionális programozás (FP): mi az?

- Programozás *függvények alkalmazásával*.
- Kevésbé elterjedten *applikatív programozásnak* is nevezik (vö. function application).
- A függvény: leképezés – az argumentumából állítja elő az eredményt. A tiszta (matematikai) függvénynek nincs *mellékhatása.*
- Az FP fő jellemzői: függvények, nem frissíthető változók, rekurzió.

Példák funkcionális programozási nyelvekre, nyelvcsaládokra:

- Lisp (Common Lisp), Scheme, Clojure (JVM-en fut)
- SML, Caml, Caml Light, OCaml, Alice, F# (.NET)
- Clean, Haskell
- Erlang, Elixir (Erlang VM-en fut)

Az Erlang nyelv

- 1985: megszületik „Ellemtelben” (Ericsson–Televerket labor)
  - Agner Krarup Erlang dán matematikus, ill. Ericsson language
  - 1985-86: első interpreter Prologban! (Joe Armstrong)
- 1991: első megvalósítás, első projektek
- 1997: első OTP (Open Telecom Platform)
- 1998-tól: nyílt forráskódú, szabadon használható
  `http://www.erlang.org/`
- Funkcionális alapú (functionally based)
- Párhuzamos programozást segítő (concurrency-oriented)
- Hibatűrő (fault-tolerant) – hatékony hibakezelés
- Skálázható (scalable)
- Gyakorlatban használt
  `http://en.wikipedia.org/wiki/Erlang_(programming_language)#Distribution`,
  `https://www.erlang-solutions.com/`

„Programming is fun!”

Erlang-szakirodalom (egy kivétellel angolul)

- Simon St. Laurent: Introducing Erlang. Getting Started in Functional Programming. O´Reilly, 2013.
  `http://shop.oreilly.com/product/0636920025818.do`
- Learn You Some Erlang for great good! (online is olvasható)
  `http://learnyousomeerlang.com`
- Joe Armstrong: Programming Erlang. Software for a Concurrent World. Second Edition. The Pragmatic Programmers, 2013.
  `http://www.pragprog.com/book/jaerlang2/programming-erlang`
- Francesco Cesarini, Simon Thompson: Erlang Programming. O´Reilly, 2009. `http://oreilly.com/catalog/9780596518189/`

További irodalom:

- Online dokumentáció: `http://erlang.org/doc.html`
- Lokális dokumentáció (Csak Linuxon ’erlang-manpages’ csomaggal): `erl -man <module>`, ahol `<module>` = `erlang`, `lists`, `dict`, `sets`, `io` stb.
- Wikibooks on Erlang Programming
  `http://en.wikibooks.org/wiki/Erlang_Programming`
- ERLANG összefoglaló magyarul
  `http://nyelvek.inf.elte.hu/leirasok/Erlang/`

Erlang runtime system (interpreter)

- Erlang shell (interaktív értelmező) indítása

```
$ erl
Erlang/OTP 18 [erts-7.3] [source] [64-bit] [smp:...
Eshell V7.3  (abort with ^G)
```

```
1> 3.2 + 2.1 * 2.
7.4
2> atom.
atom
3> 'Atom'.
'Atom'
4> "string".
"string"
5> {ennes, 'A', a, 9.8}.
{ennes,'A',a,9.8}
6> [lista, 'A', a, 9.8].
[lista,'A',a,9.8]
7> q().
ok
```

Lezárás és indítás „pont-bevitel”-lel.

```
1> 3.2 + 2.1 * 2.
7.4
...
...
7> % ctrl-G
User switch command
 --> q % Itt nem kell a pont!
```


Erlang shell: parancsok

```
1> help().
** shell internal commands **
b()           -- display all variable bindings
e(N)          -- repeat the expression in query <N>
f()           -- forget all variable bindings
f(X)          -- forget the binding of variable X
h()           -- history
v(N)          -- use the value of query <N>
rr(File)      -- read record information from File (wildcards allowed)
...
** commands in module c **
c(File)       -- compile and load code in <File>
cd(Dir)       -- change working directory
help()        -- help info
l(Module)     -- load or reload module
lc([File])    -- compile a list of Erlang modules
ls(); ls(Dir) -- list files in the current folder; list files in folder <Dir>
m(), m(Mod)   -- which modules are loaded; information about module <Mod>
pwd()         -- print working directory
q()           -- quit - shorthand for init:stop()
...
```


Erlang shell: ^G és ^C

- ^G hatása

```
User switch command
 --> h
  c [nn]   - connect to job
  i [nn]   - interrupt job
  k [nn]   - kill job
  j        - list all jobs
  s        - start local shell
  r [node] - start remote shell
  q        - quit erlang
  ? | h    - this message
 --> c
```

- ^C hatása

```
BREAK: (a)bort (c)ontinue (p)roc info (i)nfo (l)oaded
(v)ersion (k)ill (D)b-tables (d)istribution
```


Saját program fordítása, futtatása

bevezeto.erl – Faktoriális számítása

```
-module(bevezeto).   % A modul neve (kötelező; modulnév = fájlnév)
-export([fac/1]).    % Látható függvények (praktikusan kötelező)

-spec fac(N::integer()) -> F::integer().
% F = N! (F az N faktoriálisa).
fac(0) -> 1;                % ha az N=0 mintaillesztés sikeres
fac(N) -> N * fac(N-1).     % ha az N=0 mintaillesztés sikertelen
```

```
1> c(bevezeto).        % fordítás
{ok,bevezeto}
2> bevezeto:fac(5).    % futtatás
120
3> fac(5).             % futtatás
** exception error: undefined shell command fac/1
4> bevezeto:fac(5)     % futtatás
4>
4> .                   % a pont (.) kell a kiértékelés elindításához
120
```

Listakezelés – rövid példák (1)

```
1> L1 = [10,20,30].      % új változó kötése, '=' a mintaillesztés, kötés
[10,20,30]
2> H = hd(L1).           % hd: Built-in function (BIF)
10
3> b().                  % kötött változók kiírása, lásd help().
H = 10
L1 = [10,20,30]
ok
4> T = tl(L1).           % tl: Built-in function
[20,30]
5> T =:= [20|[30|[]]].   % egyenlőségvizsgálat
true
6> hd(tl(L1)).           % kifejezés közvetlenül is kiértékeltethető
20
7> v(6).                 % a v() paranccsal egy bármely érték kiíratható
20
8> tl([]).               % mi az üres lista farka?
** exception error: bad argument
     in function  tl/1
        called as tl([])
```


Listakezelés – rövid példák (2)

bevezeto.erl – folytatás

```
% sum(L) az L számlista összege.
sum([]) -> 0;
sum(L)  -> H = hd(L), T = tl(L), H + sum(T).
```

```
9> c(bevezeto).
ok,bevezeto
10> f(L1).       % forget L1: szabadítsd fel L1-et
ok
11> L1 = [10,20.5,30.5].
[10,20.5,30.5]
12> bevezeto:sum(L1).
61.0
13> bevezeto:sum(tl(L1)).
51.0
14> bevezeto:sum(tl(tl(tl((L1))))).
0
15> bevezeto:sum("abc").
294
```


Listakezelés – rövid példák (3)

bevezeto.erl – folytatás

```
% append(L1, L2) az L1 lista L2 elé fűzve.
append([], L2) -> L2;
append(L1, L2) -> [hd(L1)|append(tl(L1), L2)].
% revapp(L1, L2) az L1 megfordítása L2 elé fűzve.
revapp([], L2) -> L2;
revapp(L1, L2) -> revapp(tl(L1), [hd(L1)|L2]).
```

```
10> c(bevezeto).
ok,bevezeto
11> L1.
[10,20.5,30.5]
12> bevezeto:append(L1, [a,b,c,d]).
[10,20.5,30.5,a,b,c,d]
13> bevezeto:revapp(L1, [a,b,c,d]).
[30.5,20.5,10,a,b,c,d]
```


Tartalom

Típusok

- Az Erlang erősen típusos nyelv, bár nincs típusdeklaráció
- A típusellenőrzés dinamikus és nem statikus
  - Alaptípusok

magyarul	*angolul*
Szám (egész, lebegőpontos)	Number (integer, float)
Atom vagy Névkonstans	Atom
Függvény	Function
Ennes (rekord)	Tuple (record)
Lista	List

  - További típusok

Pid	Pid (Process identifier)
Port	Port
Hivatkozás	Reference
Bináris	Binary

Szám (number)

- Egész
  - Pl. `2008`, `-9`, `0`
  - Tetszőleges számrendszerben `radix#szám` alakban, pl. `2#11111110` = `8#376` = `16#fe` = `10#254`
  - Az egész korlátlan pontosságú, pl. `12345678901234567890123456789012345678901234`
  - Karakterkód
    - Ha nyomtatható: `$z`
    - Ha vezérlő: `$\n`
    - Oktális számmal: `$\012`
- Lebegőpontos
  - Pl. `3.14159`, `0.2e-22`
  - IEEE 754 64-bit

Atom

- Névkonstans (nem füzér!)
- Kisbetűvel kezdődő, bővített alfanumerikus[1] karaktersorozat, pl. `sicstus`, `erlang_OTP`, `email@info_11`
- Bármilyen[2] karaktersorozat is az, ha egyszeres idézőjelbe tesszük, pl. `'SICStus'`, `'erlang OTP'`, `'35 May'`, `'síró üröm'`
- Hossza tetszőleges, vezérlőkaraktereket is tartalmazhat, pl. `'hosszú atom, á-val, é-vel, ó-val, ú-val, rövid ö-vel és ü-vel'` `'atom, formázókarakterekkel (\n\r\s\t)'` [3]
- Saját magát jelöli
- Hasonló a Prolog névkonstanshoz (atom)
- C++, Java nyelvekben a legközelebbi rokon: enum

[1] Bővített alfanumerikus: kis- vagy nagybetű, számjegy, aláhúzás (_), kukac (@).
[2] Latin-1 vagy a latin-1 készletbe tartozó, de utf-8 kódolású karakter lehet (R18).
[3] \n: new line, \r: return, \s: space, \t: horizontal tabulator

Függvény

- A függvény is érték: változóhoz köthető, adatszerkezet eleme lehet, ...
- Példák:

```
1> F = fun bevezeto:fac/1.
#Fun<bevezeto.fac.1>
2> F(6).
720
3> L = [fun erlang:'+'/2, fun erlang:'-'/2].
[#Fun<erlang.+.2>,#Fun<erlang.-.2>]
4> (hd(L))(4,3).
7
```

- Részletesen később, a „Magasabb rendű függvények”c. részben

Ennes (tuple)

- Rögzített számú, tetszőleges kifejezésből álló sorozat
- Példák: `{2008, erlang}`, `{'Joe', 'Armstrong', 16.99}`
- Nullás: `{}`
- Egyelemű ennes $\neq$ ennes eleme, pl. `{elem}` $\neq$ `elem`

Lista (list)

- Korlátlan számú, tetszőleges kifejezésből álló sorozat
- Lineáris rekurzív adatszerkezet:
  - vagy üres (`[]` jellel jelöljük),
  - vagy egy elemből áll, amelyet egy lista követ: `[Elem|Lista]`
- Első elemét, ha van, a lista *fejének* nevezzük
- Első eleme utáni, esetleg üres részét a lista *farkának* nevezzük
  - Egy elemű lista: `[elem]`
  - Fejből-farokból létrehozott lista: `[elem|[]]`, `['elem1'|['elem2']]`
  - Több elemű lista:
    - `[elem,123,3.14,'elem']`
    - `[elem,123,3.14|['elem']]`
    - `[elem,123|[3.14,'elem']]`
- A konkatenáció műveleti jele: `++`

```
11>['egy'|['két']] ++ [elem,123|[3.14,'elem']].
[egy,két,elem,123,3.14,elem]
```


Füzér (string)

- Csak rövidítés, tkp. karakterkódok listája, pl.
  `"erl"` $\equiv$ `[$e,$r,$l]` $\equiv$ `[101,114,108]`
- Az Erlang shell a nyomtatható karakterkódok listáját füzérként írja ki:

```
12> [101,114,108].
"erl"
```

- Ha más érték is van a listában, listaként írja ki:

```
13> [31,101,114,108].
[31,101,114,108]
14> [a,101,114,108].
[a,101,114,108]
```

- Egymás mellé írással helyettesíthető, pl.

```
15> "erl" "ang".
"erlang"
```


Tartalom

Term

- A *term* tetszőleges típusú adatszerkezetet jelent az Erlangban
- Minden termnek van *típusa;* néhány típussal (reference, port, pid és binary) nem foglalkozunk
- *Közelítő rekurzív definíció:* szám-, atom- és függvényértékekből, kötött változókból, ill. *termekből* ennes- és listakonstruktorokkal felépített, tovább nem egyszerűsíthető kifejezés
- Példák
  - Term (mert tovább nem egyszerűsíthető)
    `123456789`
    `{'Diák Detti', [{khf, [cekla, prolog, erlang, prolog]}]}`
    `[fun erlang:'+'/2, fun erlang:'-'/2, fun (X, Y) -> X*Y end]`
  - Nem term (mert tovább egyszerűsíthető)
    `5+6`, mert műveletet tartalmaz
    `fun erlang:'+'/2(5,6)`, mert függvényalkalmazást tartalmaz

Változó

- Nagybetűvel kezdődő, bővített alfanumerikus karaktersorozat[4], más szóval *név*
- A változó lehet *szabad* vagy *kötött*
- A szabad változónak nincs értéke, típusa
- A kötött változó értéke, típusa valamely konkrét term értéke, típusa
- Minden változóhoz *csak egyszer* köthető érték, azaz kötött változó nem kaphat értéket

[4] Bővített alfanumerikus: kis- vagy nagybetű, számjegy, aláhúzás (_), kukac (@).

Minta(kifejezés)

- Minta(kifejezés): olyan term, amelyben szabad változó is lehet
  - változók $\subset$ minták
  - termek $\subset$ minták

  Igaz, néhány ritka ellenpéldától eltekintve.

  Ez például hibás, mert függvényértékre nem lehet mintát illeszteni:

  ```
  [X,fun erlang:'+'/2] = [5,fun erlang:'+'/2].
  ```

  További példa:

  ```
  1> A = fun (X) -> X+1 end.
  #Fun<erl_eval.6.50752066>
  2> {A, B} = {fun (X) -> X+1 end, 23.}
  #Fun<erl_eval.6.50752066>,23
  3> fun (X) -> X+1 end = A.
  * 1: illegal pattern
  4>
  ```


Kifejezés

A kifejezés lehet:

- term (már tárgyaltuk)
- szekvenciális kifejezés
- összetett kifejezés
- függvényalkalmazás
- őrkifejezés (később lesz róla szó)
- egyéb összetett kifejezés: `if`, `case`, `try...catch`, `catch` stb. (később lesz róluk szó)

A kifejezés *kiértékelése* alapvetően *mohó* (eager, strict evaluation).

```
4> Nevezo = 0.
0
5> (Nevezo > 0) and (1 / Nevezo > 1).
** exception error: an error occurred when evaluating an arithmetic expression
```

Szekvenciális kifejezés

- Kifejezések sorozata; szintaxisa:
  - `begin` $\texttt{exp}_1$`,` $\texttt{exp}_2$`, ...,` $\texttt{exp}_n$ `end`
  - $\texttt{exp}_1$`,` $\texttt{exp}_2$`, ...,` $\texttt{exp}_n$
- A `begin...end` párt akkor kell kiírni, ha az adott helyen egyetlen kifejezésnek kell állnia
- Értéke az utolsó kifejezés értéke: $\texttt{exp}_n$
-
```
6> L2 = [10,20,30], H2 = hd(L2), T2 = tl(L2),
6> H2 + bevezeto:sum(T2).
60
7> [begin a, "a", 5, [1,2] end, a].
[[1,2],a]
```
- Eltérés a Prologtól (gyakori hiba): a vessző itt nem jelent logikai ÉS kapcsolatot, csak egymásutániságot!
  - $\texttt{exp}_i$-ben ($i < n$) vagy változót kötünk,
  - vagy mellékhatást keltünk (pl. kiírás).

Összetett kifejezés, függvényalkalmazás

Összetett kifejezés

- Kiértékelhető műveleteket, függvényeket is tartalmazó kifejezés, pl. `X=2+3, [{5+6, math:sqrt(2), bevezeto:fac(X)}, alma]`
- Különbözik a termtől, ahol a műveletvégzés/függvényhívás tiltva van

Függvényalkalmazás

- Szintaxisa
  - `fnév(`$\texttt{arg}_1$`,` $\texttt{arg}_2$`, ...,` $\texttt{arg}_n$`)`
    vagy
  - `modul:fnév(`$\texttt{arg}_1$`,` $\texttt{arg}_2$`, ...,` $\texttt{arg}_n$`)`
- Például
```
8> length([a,b,c]).
3
9> erlang:tuple_size({1,a,'A',"1aA"}).
4
10> erlang:'+'(1,2).
3
```


Függvénydeklaráció

- Egy vagy több, pontosvesszővel (;) elválasztott *klózból* állhat.
- Alakja:

$\texttt{fnév(A}_{11}\texttt{, ..., A}_{1m}\texttt{)}$ `[when` $\texttt{ŐrSzekv}_1$`]` `->` $\texttt{SzekvenciálisKif}_1$`;`
`...` `;`
$\texttt{fnév(A}_{n1}\texttt{, ..., A}_{nm}\texttt{)}$ `[when` $\texttt{ŐrSzekv}_n$`]` `->` $\texttt{SzekvenciálisKif}_n$`.`

- A függvényt a neve, az „aritása” (paramétereinek száma), valamint a moduljának a neve azonosítja.
- Az azonos nevű, de eltérő aritású függvények nem azonosak!
- Példa:
```
fac(N) -> fac(N, 1).

fac(0, R) -> R;
fac(N, R) -> fac(N-1, N*R).
```
- (Az őröket kicsit később vezetjük be.)

Tartalom

Minta, mintaillesztés (egyesítés)

- Minta (pattern): olyan term, amelyben szabad változó is lehet
- A mintaillesztés (egyesítés) műveleti jele: =

  Alakja: `MintaKif = TömörKif`
- Sikeres illesztés esetén a szabad változók kötötté válnak, értékük a megfelelő részkifejezés értéke lesz.
- Mintaillesztés $\neq$ értékadás!
- Példák:

`Pi = 3.14159`	$\leadsto$[5]	`Pi` $\mapsto$[6] `3.14159`
`3 = P`	$\leadsto$	hiba (jobb oldal nem tömör)
`[H1|T1] = [1,2,3]`	$\leadsto$	`H1` $\mapsto$ `1`, `T1` $\mapsto$ `[2,3]`
`[1,2|T2] = [1,2,3]`	$\leadsto$	`T2` $\mapsto$ `[3]`
`[H2|[3]] = [1,2,3]`	$\leadsto$	meghiúsulás, hiba
`{A1,B1} = {{a},'Beta'}`	$\leadsto$	`A1` $\mapsto$ `{a}`, `B1` $\mapsto$ `'Beta'`
`{{a},B2} = {{a},'Beta'}`	$\leadsto$	`B2` $\mapsto$ `'Beta'`

[5] `Kif` $\leadsto$ jelentése: „`Kif` kiértékelése után”.
[6] `X` $\mapsto$ `V` jelentése: „`X` a `V` értékhez van kötve”.

Mintaillesztés függvény klózaira – 1. példa

- Függvény alkalmazásakor a klóz kiválasztása is mintaillesztéssel történik
- Máshol, pl. a `case` vezérlési szerkezetnél is mintaillesztés történik

`khf.erl` – DP kisházik ellenőrzése

```
-module(khf).
-compile(export_all).       % mindent exportál, csak teszteléshez!
%-export([kiadott/1, ...]). % tesztelés után erre kell cserélni

% kiadott(Ny) az Ny nyelven kiadott kisházik száma.
kiadott(cekla)  -> 1;       % 1. klóz
kiadott(prolog) -> 3;       % 2. klóz
kiadott(erlang) -> 3.       % 3. klóz
```

```
2> khf:kiadott(cekla).  % sikeres illesztés az 1. klózra
1
3> khf:kiadott(erlang). % sikertelen: 1. és 2. klóz, sikeres: 3. klóz
3
4> khf:kiadott(java).   % három sikertelen illesztés után hiba
** exception error: no function clause matching khf:kiadott(java) ...
```


Mintaillesztés függvény klózaira – 2. példa

- Hányszor szerepel egy elem egy listában? Első megoldásunk:

`khf.erl` – folytatás

```
-spec elofordul0(E::term(), L::[term()]) -> N::integer().
% Az E elem az L listában N-szer fordul elő.
elofordul0(E, [])          -> 0;                          % 1.
elofordul0(E, [E|Farok])    -> 1 + elofordul0(E, Farok);  % 2.
elofordul0(E, [Fej|Farok]) -> elofordul0(E, Farok).       % 3.
```

```
5> khf:elofordul0(a, [a,b,a,1]).  % 2. klóz, majd 3., 2., 3., 1.
2
6> khf:elofordul0(java, [cekla,prolog,prolog]).  % 3., 3., 3., 1.
0
```

- A minták összekapcsolhatók, pl. az `E` változó több argumentumban is szerepel: `elofordul0(E, [E|Farok]) -> ...`
- Számít a klózok sorrendje, itt pl. a 3. általánosabb, mint a 2.!

Kitérő: változók elnevezése

- Az előző függvény fordításakor figyelmeztetést kapunk:

```
Warning: variable 'E' is unused
Warning: variable 'Fej' is unused
```

- A figyelmeztetés kikapcsolható alulvonással (_) kezdődő nevű változóval

`khf.erl` – folytatás

```
elofordul1(_E, [])          -> 0;
elofordul1(E, [E|Farok])    -> 1 + elofordul1(E, Farok);
elofordul1(E, [_Fej|Farok]) -> elofordul1(E, Farok).
```

- Ilyen esetekben a „névtelen” _ változót is használhatjuk, de jobb az `_<változónév>` használata, mert utal a szerepére
- A „névtelen” _ változó nem értékelhető ki, ezért tömör kifejezésben nem használható
- Több _ változó is lehet ugyanabban a mintában, például:
  `[H,_,_] = [1,2,3]` $\leadsto$ `H` $\mapsto$ `1`
- Találós kérdés: miben különböznek az alábbi mintaillesztések, ha `L=[a]`?
  a) `A=hd(L).` b) `[A|_]=L.` c) `[A,_|_]=L.`

Mintaillesztés függvény klózaira – 3. példa

- Teljesítette-e egy hallgató a khf-követelményeket?

```
D1 = {'Diák Detti', [{khf,[cekla,prolog,erlang,prolog]}, {zh,59}]}.
D2 = {'Néma Levi', [{khf,[prolog,erlang]}, {zh,32}]}.
D3 = {'Laza Lali', [{khf,[erlang,prolog,erlang]}, {zh,22}]}.
```

khf.erl – folytatás

```
-spec megfelelt(K::kovetelmeny(), H::hallgato()) -> true | false.
megfelelt(khf, {_Nev, [{khf, L}|_]}) ->
    C = elofordul1(cekla, L),
    P = elofordul1(prolog, L),
    E = elofordul1(erlang, L),
    (P >= 1) and (E >= 1) and (C + P + E >= 3);
megfelelt(zh, {_Nev, [{zh, Pont}|_]}) ->
    Pont >= 24;
megfelelt(K, {Nev, [_|L]}) ->
    megfelelt(K, {Nev, L});
megfelelt(_, {_, []}) ->
    false.
```


„Biztonságos” illesztés: ha egy mindig sikerül

- Mit kezdjünk a `kiadott(java)` kiértékelésekor keletkező hibával?
- Erlangban gyakori: az eredményben jelezzük a sikert vagy meghiúsulást

khf.erl – folytatás

```
-spec bizt_kiadott(Ny::atom()) -> {ok, Db::integer()} | error.
% Az Ny nyelven Db darab kisházit adtak ki.
bizt_kiadott(cekla)  -> {ok, 1};
bizt_kiadott(prolog) -> {ok, 3};
bizt_kiadott(erlang) -> {ok, 3};
bizt_kiadott(_Ny)    -> error.   % ez a klóz mindenre illeszkedik
```

- Az `ok` és az `error` atomokat konvenció szerint választottuk
- Kötés: ha a minta egyetlen szabad változó (`_Ny`), az illesztés sikeres
- Lássunk két példát!

```
7> khf:bizt_kiadott(cekla).
{ok,1}
8> khf:bizt_kiadott(java).
error
```

- De hogyan férünk hozzá az eredményhez?

Feltételes kifejezés mintaillesztéssel (case)

- **case** Kif **of**
  Minta$_1$ [**when** ŐrSzekv$_1$] -> SzekvenciálisKif$_1$;
  ...
  Minta$_n$ [**when** ŐrSzekv$_n$] -> SzekvenciálisKif$_n$
  end.
- Kiértékelés: balról jobbra, fölülről lefelé
- Értéke: az első illeszkedő minta utáni szekvenciális kifejezés
- Ha nincs ilyen minta, hibát jelez

```
1> X=2, case X of 1 -> "1"; 3 -> "3" end.
** exception error: no case clause matching 2

2> X=2, case X of 1 -> "1"; 2 -> "2" end.
"2"

3> Y=fagylalt, 3 * case Y of fagylalt -> 100; tolcser -> 15 end.
300

4> Z=kisauto, case Z of fagylalt -> 100;
4>                      tolcser  -> 15;
4>                      Barmi    -> 99999 end.
99999
```


További példa `case` használatára

- Az adott nyelven a kisházik hány százalékát adták be?

khf.erl – folytatás

```
-spec bizt_teljesitmeny(Nyelv::atom(), Beadott_db::integer()) ->
%            {ok, Teljesitmeny::float()} | error.
bizt_teljesitmeny(Nyelv, Beadott_db) ->
   case bizt_kiadott(Nyelv) of
      {ok, Kiadott_db} -> {ok, round(100 * (Beadott_db / Kiadott_db))};
      error            -> error
   end.
```

- Függvény klózai összevonhatók a `case`-zel:

```
bizt_kiadott(cekla)  -> {ok, 1};
bizt_kiadott(prolog) -> {ok, 3};
bizt_kiadott(erlang) -> {ok, 3};
bizt_kiadott(_Ny)    -> error.
```

≡

```
bizt_kiadott(Ny)  ->
  case Ny of
    cekla  -> {ok, 1};
    prolog -> {ok, 3};
    erlang -> {ok, 3};
    _Ny    -> error
  end.
```

Tartalom

Listanézet (List comprehension)

- Listanézet: `[Kif || Minta <- Lista, Feltétel]`

  Közelítő definíció: A listanézet
  - a `Minta` mintától függő `Kif` kifejezések *listája*,
  - ahol a `Minta` minta a `Lista` lista egy olyan eleme,
  - amelyre a `Feltétel` feltétel igaz.

- A `Feltétel` feltétel tetszőleges logikai (`true` v. `false` atom értékű) kifejezés lehet. A `Minta` mintában előforduló változónevek elfedik a listanézeten kívüli, azonos nevű változókat.

- A listanézet pontos szintaxisa:
  `[X || Q1, Q2, ...]`, ahol `X` tetszőleges kifejezés, Q_i pedig generátor (`Minta <- Lista`) vagy szűrőfeltétel (predikátum) lehet.

- A listanézet sokféle programozási nyelvben elérhető, lásd:
  `https://en.wikipedia.org/wiki/Comparison_of_programming_languages_(list_comprehension)`

Listanézet: kis példák

```
1> [X || X <- [1,2,3]].      %  { x | x ∈ {1,2,3} }
[1,2,3]
2> [2*X+1 || X <- [1,2,3]].  %  { 2·x | x ∈ {1,2,3} }
[3,5,7]
3> [2*X || X <- [1,2,3], X rem 2 =/= 0, X > 2].
[6]
4> lists:seq(1,3).           %  egészek 1-től 3-ig
[1,2,3]
5> [{X,Y} || X <- [1,2,3,4], Y <- lists:seq(1,X)].
[{1,1},
 {2,1},{2,2},
 {3,1},{3,2},{3,3},
 {4,1},{4,2},{4,3},{4,4}]
6> [{X,Y} || X <- lists:seq(1,4), Y <- lists:seq(1,3), X > Y].
[{2,1},
 {3,1},{3,2},
 {4,1},{4,2},{4,3}]
```


Listanézet: további példák

- Pitagoraszi számhármasok

lcomp.erl

```
-spec pitag(N)(N::integer()) -> Ps::[integer()]
% Ps olyan pitagoraszi számhármasok listája, melyek összege legfeljebb N
  pitag(N) ->
      L = lists:seq(1,N),
      [{A,B,C} || A <- L, B <- L, C <- L,
                  A+B+C =< N,
                  A*A+B*B =:= C*C].
```

- Hányszor fordul elő egy elem egy listában?

lcomp.erl - folytatás

```
  elofordul2(Elem, L) ->
      length([X || X <- L, X=:=Elem]).
```

- A khf követelményeket teljesítő hallgatók

```
L=[{'Diák Detti',[{khf,[erlang,prolog,prolog]}]},{'Laza Lali',[]}],
[Nev || {Nev, M} <- L, khf:megfelelt(khf, {Nev, M})].
```

Listanézet: gyorsrendezés (Quicksort)

lcomp.erl - folytatás

```
-spec qsort(Us::[term()]) -> Ss::[term()]
% Az Us lista elemeinek monoton növekedő listája Ss
qsort([]) ->
    [];
qsort([Pivot|Tail]) ->
    qsort([X || X <- Tail, X < Pivot])
    ++ [Pivot] ++
    qsort([X || X <- Tail, X >= Pivot]).
```

```
7> lcomp:qsort([34,1,55,78,43.2,math:pi(),math:exp(1),31.7]).
[1,2.718281828459045,3.141592653589793,31.7,34,43.2,55,78]
8> lcomp:qsort([ab,acb,aca,bca,bbca,cab,bca,bac,abc,a,b,c]).
[a,ab,abc,aca,acb,b,bac,bbca,bca,bca,c,cab]
9> lcomp:qsort("the quick brown fox jumps over the lazy dog").
"        abcdeeefghhijklmnoooopqrrsttuuvwxyz"
10> lcomp:qsort(["baba",baba,9.3,6,fun math:exp/1,[4,5,3],[4,5],2,3]).
[6,9.3,baba,#Fun<math.exp.1>,2,3,[4,5],[4,5,3],"baba"]
```


Listanézet: permutáció

lcomp.erl -folytatás

```
-spec perms(Xs::[term()]) -> Zss::[[term()]]
% Az Xs lista elemeinek összes permutációját tartalmazó lista Zss
perms([]) ->
    [[]];
perms(L) ->
    [[H|T] || H <- L, T <- perms(L--[H])].
```

- Listák különbsége: `As--Bs` vagy `lists:subtract(As,Bs)`
  `As--Bs` az `As` olyan másolata, amelyből ki van hagyva a `Bs`-ben előforduló összes elem balról számított első előfordulása, feltéve hogy volt ilyen elem `As`-ben
- Példák:

```
11> [a,b,c,a,b,c,a,b,c]--[a,b,c].
[a,b,c,a,b,c]
12> [a,b,c,a,b,c,a,b,c]--[a,b,c,c,b,a].
[a,b,c]
12> lcomp:perms([a,b,c]).
[[a,b,c],[a,c,b],[b,a,c],[b,c,a],[c,a,b],[c,b,a]]
```


Tartalom

Függvényérték

- A funkcionális nyelvekben a függvény is *érték* (már láttunk rá példákat):
  - leírható (jelölhető),
  - van típusa,
  - névhez (változóhoz) köthető,
  - adatszerkezet eleme lehet,
  - paraméterként átadható,
  - függvényalkalmazás eredménye lehet (zárójelezni kell!).
- Névtelen függvény (függvényjelölés, lambdajelölés) mint érték

```
fun (A11, ..., A1m) [when ŐrSzekv1] -> SzekvenciálisKif1;
    ...;
    (An1, ..., Anm) [when ŐrSzekvn] -> SzekvenciálisKifn
end.
```

- Másutt már deklarált függvény mint érték

```
fun Modul:Fnev/Aritas  % például fun bevezeto:sum/1
fun Fnev/Aritas        % ha az Fnev „látható", pl. modulból
```

Függvényérték: példák

```
2> Area1 = fun ({circle,R})   -> R*R*3.14159;
               ({rectan,A,B}) -> A*B;
               ({square,A})   -> A*A
           end.
#Fun<erl_eval.6.13229925>
3> Area1({circle,2}).
12.56636
4> Osszeg = fun bevezeto:sum/1.
#Fun<bevezeto.sum.1>
5> Osszeg([1,2]).
3
6> fun bevezeto:sum/1([1,2]).
3
7> Fs = [Area1, Osszeg, fun bevezeto:sum/1, 12, area].
[#Fun<erl_eval.6.13229925>,#Fun<bevezeto.sum.1>,...]
8> (hd(Fs))({circle, 2}). % zárójelezni kell a függvényértéket!
12.56636
% hd/1 itt magasabb rendű függvény, zárójelezni kell az értékét
```


Magasabb rendű függvények és alkalmazásuk (1)

- Magasabb rendű függvény: paramétere vagy eredménye függvény
- **A `map` függvény**
  - Leképzés: `lists:map(Fun, List)`
  - Eredménye a `List` lista `Fun`-nal transzformált elemeiből álló lista

`mrend.erl` – `map/2` egy megvalósítása

```
map2(_F, [])   -> [];
map2(F, [X|Xs]) -> [F(X) | map2(F, Xs)].
```

```
9> lists:map(fun erlang:length/1, ["alma", "korte"]).
[4,5]       % erlang:length/1: Built-In Function, lista hossza
10> mrend:map2(Osszeg, [[10,20], [10,20,30]]).
[30,60]
11> L=[{'Diák Detti',[{khf,[erlang,prolog,prolog]}]},{'Laza Lali',[]}].
[{'Diák Detti',[{khf,[erlang,prolog,prolog]}]},{'Laza Lali',[]}]
12> lists:map(fun(Hallg) -> khf:megfelelt(khf, Hallg) end, L).
[true,false]
13> [length(S) || S <- ["alma", "korte"] ]. % leképzés listanézettel
[4,5]
```


Magasabb rendű függvények és alkalmazásuk (2)

- **A `filter` függvény**
  - Szűrés: `lists:filter(Pred, List)`
  - Eredménye a `List` lista `Pred`-et kielégítő elemeinek listája

`mrend.erl` – `filter/2` egy megvalósítása

```
filter2(_, [])          -> [];
filter2(P, [Fej|Farok]) -> case P(Fej) of
                               true  -> [Fej|filter2(P,Farok)];
                               false -> filter2(P,Farok)
                           end.
```

```
14> lists:filter(fun erlang:is_number/1, [x, 10, L, 20, {}]).
[10,20]
15> mrend:filter2(fun erlang:is_tuple/1, [x, {7,3}, 10, L, 20, {}]).
[{7,3},{}]
16> lists:filter(fun(Hallg) -> khf:megfelelt(khf, Hallg) end, L).
[{'Diák Detti',[{khf,[erlang,prolog,prolog]}]}]
```

- *Fejtörő:* miért érdemes leírni kétszer a `filter(P,Farok)` hívást?
- *Fejtörő:* hogyan lehet megvalósítani a `filter/2`-t `case` nélkül?

Magasabb rendű függvények és alkalmazásuk (3)

- Hányszor szerepel egy elem egy listában? Új megoldásunk:

`mrend.erl` – folytatás

```
-spec elofordul3(E::term(), L::[term()]) -> N::integer().
% Az E elem az L listában N-szer fordul elő.
elofordul3(Elem, L) ->
    length(lists:filter(fun(X) -> X =:= Elem end, L)).
```

```
17> mrend:elofordul3(prolog, [cekla,prolog,prolog]).
2
```

- A névtelen függvényben – az `elofordul3/2` törzsében – természetesen felhasználhatjuk az `elofordul3/2` fejében lekötött `Elem` változót.

Redukálás a `fold` függvényekkel

- Jobbról balra haladva: `lists:foldr(Fun,Acc,List)`
- Balról jobbra haladva: `lists:foldl(Fun,Acc,List)`
- Eredménye a `List` lista elemeiből és az `Acc` elemből a kétoperandusú `Fun`-nal képzett érték

```
lists:foldr(fun(X, Acc) -> X - Acc end, 0, [1,2,3,4]) ≡ -2
lists:foldl(fun(X, Acc) -> X - Acc end, 0, [1,2,3,4]) ≡ 2
```

- Példa `foldr` kiértékelési sorrendjére: `1-(2-(3-(4-0)))` = -2
  Példa `foldl` kiértékelési sorrendjére: `4-(3-(2-(1-0)))` = 2

```
                    % plus(X, Sum) -> X + Sum.
    sum(Acc, []) ->              foldr(Fun, Acc, []) ->
R       Acc;                         Acc;
    sum(Acc, [H|T]) ->           foldr(Fun, Acc, [H|T]) ->
        plus(H, sum(Acc, T)).        Fun(H, foldr(Fun, Acc, T)).
```

```
    sum(Acc, []) ->              foldl(Fun, Acc, []) ->
L       Acc;                         Acc;
    sum(Acc, [H|T]) ->           foldl(Fun, Acc, [H|T]) ->
        sum(plus(H, Acc), T)).       foldl(Fun, Fun(H, Acc), T)).
```


Tartalom

Listaműveletek

- Alapműveletek: `hd(L)`, `tl(L)`, `length(L)` (utóbbi lassú: $O(n)$!)
- Listák összefűzése (`As` $\oplus$ `Bs`): `As++Bs` vagy `lists:append(As,Bs)`
  `Cs = As++Bs` $\rightsquigarrow$ `Cs` $\mapsto$ az `As` összes eleme a `Bs` elé fűzve az eredeti sorrendben
- Példa

```
1> [a,'A',[65]]++[1+2,2/1,'A'].
[a,'A',"A",3,2.0,'A']
```

- Listák különbsége: `As--Bs` vagy `lists:subtract(As,Bs)`
  `Cs = As--Bs` $\rightsquigarrow$ `Cs` $\mapsto$ az `As` olyan másolata, amelyből ki van hagyva a `Bs`-ben előforduló összes elem balról számított első előfordulása, feltéve, hogy volt ilyen elem `As`-ben
- Példák

```
1> [a,'A',[65],'A']--["A",2/1,'A']. % [65]=="A"
[a,'A']
2> [a,'A',[65],'A']--["A",2/1,'A',a,a,a].
['A']
3> [1,2,3]--[1.0,2].  % erős típusosság:  1 ≠ 1.0
[1,3]
```


Aritmetikai műveletek

- Matematikai műveletek
  - Előjel: `+`, `-` (precedencia: 1)
  - Multiplikatív műveletek: `*`, `/`, `div`, `rem` (precedencia: 2)
  - Additív műveletek: `+`, `-` (precedencia: 3)
- Bitműveletek
  - `bnot`, `band` (precedencia: 2)
  - `bor`, `bxor`, `bsl`, `bsr` (precedencia: 3)
- Megjegyzések
  - `+`, `-`, `*` és `/` egész és lebegőpontos operandusokra is alkalmazhatók
  - `+`, `-` és `*` eredménye egész, ha mindkét operandusuk egész, egyébként lebegőpontos
  - `/` eredménye mindig lebegőpontos
  - `div` és `rem`, valamint a bitműveletek operandusai csak egészek lehetnek

Összehasonlító műveletek (relációk)

- Egy reláció (összehasonlítás) eredménye a `true` vagy a `false` atom
- Termek összehasonlítási sorrendje (vö. típusok):
  `number < atom < reference < function < port < pid < tuple < list < binary`
- Kisebb, egyenlő-kisebb, nagyobb-egyenlő, nagyobb reláció:
  <, =<, >=, >
- Egyenlőségi reláció (aritmetikai egyenlőségre is):
  ==, /= **Ajánlás: helyette azonosan egyenlőt használjunk.**
- Azonosan egyenlő (különbséget tesz `integer` és `float` közt):
  =:=, =/= Példa: `5.0 =:= 5` $\rightsquigarrow$ `false`
-

Ezek lebegőpontos értékre kerülendők:
==, =<, >=, =:=

Elrettentő példák:
`10.1 - 9.9 == 0.2` $\rightsquigarrow$ `false`
`(10.1 - 9.9) * 10` $\rightsquigarrow$ `1.999999999999993`
`0.000000000000001 + 1 == 1` $\rightsquigarrow$ `false`
`0.0000000000000001 + 1 == 1` $\rightsquigarrow$ `true`

`integer` $\leftrightarrow$ `float` típuskonverzió

- Kerekítés (`float` $\mapsto$ `integer`):
  - `erlang:trunc/1`: `trunc(5.8) =:= 5.`
  - `erlang:round/1`: `round(5.8) =:= 6.`
- Explicit típuskonverzió (`integer` $\mapsto$ `float`):
  - `erlang:float/1`: `float(5) =:= 5.0.`

Logikai műveletek

- Mohó (strict) kiértékelésű logikai műveletek:
  `not`, `and`, `or`, `xor`
- Lusta (lazy) kiértékelésű („short-circuit”) logikai műveletek:
  `andalso`, `orelse`
- Csak a `true` és `false` atomokra, illetve ilyen eredményt adó kifejezésekre alkalmazhatóak
- Példák:

```
1> false and (3 div 0 =:= 2).
** exception error: an error occurred when evaluating
    an arithmetic expression
      in operator div/2
        called as 3 div 0
2> false andalso (3 div 0 =:= 2).
false
```


Beépített függvények (BIF)

- BIF (Built-in functions)
  - a futtatórendszerbe beépített, rendszerint C-ben írt függvények
  - többségük az **erts**-könyvtár `erlang` moduljának része
  - többnyire rövid néven (az `erlang:` modulnév nélkül) hívhatók
- Az alaptípusokon alkalmazható leggyakoribb BIF-ek:
  - Számok:
    `abs(Num)`, `trunc(Num)`, `round(Num)`, `float(Num)`
  - Lista:
    `length(List)`, `hd(List)`, `tl(List)`
  - Ennes:
    `tuple_size(Tuple)`,
    `element(Index,Tuple)`,
    `setelement(Index,Tuple,Value)`
    Megjegyzés: `1` $\leq$ `Index` $\leq$ `tuple_size(Tuple)`

További BIF-ek

- Rendszer:
  `date()`, `time()`, `erlang:localtime()`, `halt()`
- Típusvizsgálat
  - `is_integer(Term)`, `is_float(Term)`,
  - `is_number(Term)`, `is_atom(Term)`,
  - `is_boolean(Term)`,
  - `is_tuple(Term)`, `is_list(Term)`,
  - `is_function(Term)`, `is_function(Term,Arity)`
- Típuskonverzió
  - `atom_to_list(Atom)`, `list_to_atom(String)`,
  - `integer_to_list(Int)`, `list_to_integer(String)`, `erlang:list_to_integer(String, Base)`,
  - `float_to_list(Float)`, `list_to_float(String)`,
  - `tuple_to_list(Tuple)`, `list_to_tuple(List)`
- Érdekesség: a BIF-ek mellett megtalálhatóak az operátorok az `erlang` modulban, lásd az `m(erlang)` kimenetét, pl. `fun erlang:'*'/2(3,4).`

Tartalom

A strukturális mintaillesztés finomítása őrrel

- Nézzük újra a következő definíciót:

```
fac(0) -> 1;
fac(N) -> N * fac(N-1).
```

  - Mi történik, ha megváltoztatjuk a klózok sorrendjét?
  - Mi történik, ha `-1`-re alkalmazzuk?
  - És ha `2.5`-re?

  A baj az, hogy a `fac(N) -> ...` klóz túl általános.
- Megoldás: korlátozzuk a mintaillesztést őr alkalmazásával!

```
fac(0) ->
    1;
fac(N) when is_integer(N), N>0 ->
    N * fac(N-1).
```


Ismétlés: függvénydeklaráció és `case`

- Függvénydeklaráció:

```
fnév(A11, ..., A1m) [when ŐrSzekv1] -> SzekvenciálisKif1;
...
fnév(An1, ..., Anm) [when ŐrSzekvn] -> SzekvenciálisKifn.
```

- Feltételes mintaillesztés (`case`):

```
case Kif of
    Minta1 [when ŐrSzekv1] -> SzekvenciálisKif1;
    ...
    Mintan [when ŐrSzekv1n] -> SzekvenciálisKifn
end.
```

Őrkifejezés

Az őrkifejezésnek logikai értéket adó kifejezésnek kell lennie. Lehet:

- Term (vagyis tömör – tovább nem egyszerűsíthető – kifejezés)
- Őrkifejezésekből aritmetikai, összehasonlító és logikai műveletekkel felépített kifejezés
- Bizonyos BIF-ek őrkifejezéssel paraméterezve:
  - Típust vizsgáló predikátumok (`is_TÍPUS`)
  - `abs(Number)`, `round(Number)`, `trunc(Number)`, `float(Term)`, `element(N, Tuple)`, `tuple_size(Tuple)`, `hd(List)`, `length(List)`, `tl(List)`
    `bit_size(Bitstring)`, `byte_size(Bitstring)`, `size(Tuple|Bitstring)`, `node()`, `node(Pid|Ref|Port)`, `self()`

Őrkifejezésben **nem** lehet:

- Függvényalkalmazás, mert mellékhatása vagy lassú lehet
- `++` (`lists:append/2`), `--` (`lists:subtract/2`)

Őrkifejezés, őr, őrszekvencia

- **Őrkifejezés (guard expression)**
  - Őrkifejezések ⊂ Erlang-kifejezések
  - Garantáltan mellékhatás nélküli, hatékonyan kiértékelhető
  - Vagy sikerül, vagy meghiúsul
  - Hibát (kivételt) **nem** jelezhet; ha hibás az argumentuma, meghiúsul
- **Őr (guard):** egyetlen őrkifejezés vagy őrkifejezések vesszővel (,) elválasztott, *konjuktív* sorozata
  - Értéke `true`, ha az összes őrkifejezés `true` értékű (ÉS-kapcsolat)
  - Ha az értéke `true` $\rightsquigarrow$ *sikerül*, bármely más esetben $\rightsquigarrow$ *meghiúsul*
- **Őrszekvencia (guard sequence):** egyetlen őr vagy őrök pontosvesszővel (;) elválasztott, *diszjunktív* sorozata
  - Értéke `true` (azaz sikerül), ha legalább egy őr `true` értékű (VAGY-kapcsolat)

Őrszekvencia, mintaillesztés

- Az őrszekvenciával olyan tulajdonságot írunk elő, amit *strukturális mintaillesztéssel* nem tudunk leírni
- Az őrszekvenciát a `when` kulcsszó vezeti be
- Az őrszekvenciában előforduló összes változónak *kötöttnek* kell lennie
- A mintaillesztés lépései klózválasztásnál, ill. `case`-nél:
  - Strukturális mintaillesztés (hasonló a Prolog illesztéséhez)
  - Őrszekvencia kiértékelése

Példa őrszekvencia használatára: `orok.erl`

```
% kategoria(V) a V term egy lehetséges osztályozása
kategoria(V) ->
    case V of
        X when is_atom(X) ->
            atom;
        X when is_number(X), X < 0 ->
            negativ_szam;
        X when is_integer(X) ;
               is_float(X), abs(X-round(X)) < 0.0001 ->
            kerek_szam;
        X when is_list(X), length(X) > 5 ->
            hosszu_lista;
```

```
2> orok:kategoria(true).
atom
3> [{K,orok:kategoria(K)} || K <- [haho, -5, 5.000001, "kokusz"] ].
[{haho,atom}, {-5,negativ_szam}, {5.000001,kerek_szam},
 {"kokusz",hosszu_lista}]
```

Példa őrszekvencia használatára: orok.erl (folytatás)

```
    ...
    {X,Y,Z} when X*X+Y*Y =:= Z*Z, is_integer(Z) ;
                Z*Z+Y*Y =:= X*X, is_integer(X) ;
                X*X+Z*Z =:= Y*Y, is_integer(Y) ->
        pitagoraszi_szamharmas;
    {Nev, []} when is_atom(Nev) ->
        talan_hallgato;
    {Nev, [{Tipus,_}|_]} when is_atom(Nev), is_atom(Tipus) ->
        talan_hallgato;
    [Ny1|_] when Ny1=:=cekla ; Ny1=:=prolog ; Ny1=:=erlang ->
        talan_programozasi_nyelvek_listaja;
    {tort, Sz, N} when abs(Sz div N) >= 0 ->
        % Ha Sz vagy N nem egész, vagy ha N=:=0, hiba miatt meghiúsul
        racionalis;
    _ -> egyeb
end.
```

```
4> [orok:kategoria(K) || K <- [{3,5,4}, {'D.D.',[]}, {tort,1,a}]].
[pitagoraszi_szamharmas,talan_hallgato,egyeb]
```


Feltételes kifejezés őrszekvenciával (if)

```
if
    ŐrSzekv1 -> SzekvenciálisKif1;
    ...
    ŐrSzekvn -> SzekvenciálisKifn
end.
```

- Kiértékelés: balról jobbra, fölülről lefelé.
- Értéke: az első `true` értékű őrszekvencia utáni szekvenciális kifejezés
- Ha nincs `true` értékű őrszekvencia, futáskor hibát jelez
- Példák

```
1> X=2.
2> if X<2 -> "<"; X>2 -> ">" end.
** exception error: no true branch...
3> if X<2 -> "<"; X>=2 -> ">=" end.
">="
4> if X<2 -> "<"; true -> ">=" end.
">="
```

khf.erl – folytatás

```
elofordul4(_, []) -> 0;
elofordul4(E, [Fej|Farok]) ->
    if
        Fej =:= E -> 1;
        true      -> 0
    end
    + elofordul4(E, Farok).
```


Az if a case speciális esete (1)

- A kiértékelendő kifejezés kiválasztására
  - a `case` kifejezést illeszt mintákra, majd őrszekvenciákat használ,
  - az `if` csak őrszekvenciákat használ.
- Az `if` helyettesítése `case`-zel (az `Alapértelmezés` sora opcionális):

```
case 1 of % _=1 mindig sikeres
    _ when ŐrSzekv1 -> Kif1;
    ...
    _ when ŐrSzekvn -> Kifn;
    _               -> Alapértelmezés
end
```

≡

```
if
    ŐrSzekv1 -> Kif1;
    ...
    ŐrSzekvn -> Kifn;
    true  -> Alapért
end
```

- Fordítva: használhatunk-e `case` helyett `if`-et?

```
filter1(_P, [])         -> [];
filter1(P, [Fej|Farok]) -> case P(Fej) of
                               true  -> [Fej|filter1(P,Farok)];
                               false -> filter1(P,Farok)
                           end.
```


Az if a case speciális esete (2)

- Jó-e az alábbi függvénydeklaráció?

```
filter2e(_P, []) ->
    [];
filter2e(P, [Fej|Farok]) ->
    if
        P(Fej) -> [Fej|filter2e(P,Farok)];
        true   -> filtere2(P,Farok)
    end.
```

- Nem! Az `if P(Fej) -> [Fej|...` hibás, mert őrben nem lehet függvény. A hibaüzenet: `illegal guard expression`
- De egy új változó bevezetése megoldja a dolgot:

```
filter2a(_P, []) ->
    [];
filter2a(P, [Fej|Farok]) ->
    Cond = P(Fej),
    if
        Cond -> [Fej|filter2a(P,Farok)];
        true -> filter2a(P,Farok)
    end.
```

Tartalom

Füzérkezelő függvények – OTP 18 V7.3 `string` modul (1)

- `len(Str)`, `equal(Str1,Str2)`, `concat(Str1,Str2)`
- `chr(Str,Chr)`, `rchr(Str,Chr)`, `str(Str,SubStr)`, `rstr(Str,SubStr)`
  A karakter / részfüzér első / utolsó előfordulásának indexe, vagy 0, ha nincs benne.
- `span(Str,Chars)`, `cspan(Str,Chars)`
  Az `Str` ama prefixumának hossza, amelyben kizárólag a `Chars`-beli karakterek fordulnak / nem fordulnak elő.
- `substr(Str,Start,Length)`, `substr(Str,Start)`
  Az `Str` specifikált részfüzére.
- `to_lower(Str)`, `to_upper(Str)`, `to_lower(Char)`, `to_upper(Char)`
  A füzér / karakter kisbetűs / nagybetűs változata.
- `to_integer(Str)`, `to_float(Str)`
  Eredménye egy pár, melynek első tagja a füzér elejéről beolvasott egész / lebegőpontos szám, második tagja a füzér maradéka; hiba esetén a pár első tagja az `error` atom, második tagja a hiba oka.

Füzérkezelő függvények – OTP 18 V7.3 `string` modul (2)

- `tokens(Str,SepList)`
  A `SepList` karakterei mentén füzérek listájára bontja az `Str`-t.
- `join(StrList,Sep)`
  Az `StrList` – egymástól a `Sep` füzérrel elválasztott – elemeiből álló füzér.
- `strip(Str)`, `strip(Str,Dir)`, `strip(Str,Dir,Char)`
  Az `Str` füzér másolata az elejéről / végéről levágott formázó karakterek / `Char` karakterek nélkül.
  `Dir` = `left` | `right` | `both`
- `left(Str, Num)`, `left(Str, Num, Chr)`, `right(Str, Num)`, `right(Str, Num, Chr)`, `centre(Str, Num)`, `centre(Str, Num, Chr)`
  A `Str` füzér `Num` hosszú másolata balra / jobbra / középre igazítva, jobbról / balról / mindkét oldalról szóközökkel / `Chr` karakterekkel kiegészítve.

Részletek és továbbiak: Erlang OTP 18 V7.3 / Basic / stdlib / string.
`http://erlang.org/documentation/doc-7.3/doc/`

Listakezelő függvények – OTP 18 V7.3 `lists` modul (1)

- `nth(N,Lst)`, `nthtail(N,Lst)`, `last(Lst)`
  Az `Lst` `N`-edik karaktere / ott kezdődő farka / utolsó eleme.
- `append(Lst1,Lst2)` (++), `append(LstOfLsts)`
  Az `Lst1` és `Lst2` / `LstOfLsts` elemei egy listába fűzve.
- `concat(Lst)`
  Az `Lst` összes eleme füzérré alakítva és egybefűzve.
  Az `Lst` elemeinek típusa `atom`, `integer`, `float` és `string` lehet.
- `reverse(Lst)`, `reverse(Lst,Tl)`
  Az `Lst` megfordítva / megfordítva a `Tl` elé fűzve (más deklaratív nyelvekben `reverse/2`-nek `revAppend` a neve).
- `flatten(DeepList)`, `flatten(DeepList,Tail)`
  A `DeepList` kisimítva / kisimítva `Tail` elé fűzve.
- `max(Lst)`, `min(Lst)`
  Az `Lst` legnagyobb / legkisebb eleme.

Listakezelő függvények – OTP 18 V7.3 `lists` modul (2)

- `filter(Pred,Lst)`, `delete(Elem,Lst)`
  Az `Lst` `Pred`-et kielégítő elemeiből álló / első `Elem` nélküli másolata.
- `takewhile(Pred,Lst)`, `dropwhile(Pred,Lst)`, `splitwith(Pred,Lst)`
  Az `Lst` `Pred`-et kielégítő prefixumát tartalmazó / nem tartalmazó másolata; ilyen listákból álló pár.
- `partition(Pred,Lst)`, `split(N,Lst)`
  Az `Lst` elemei `Pred` / `N` darabszám szerint két listába válogatva.
- `member(Elem,Lst)`, `all(Pred,Lst)`, `any(Pred,Lst)`
  Igaz, ha `Elem` / `Pred` szerinti minden / `Pred` szerinti legalább egy elem benne van az `Lst`-ben.
- `prefix(Lst1,Lst2)`, `suffix(Lst1,Lst2)`
  Igaz, ha az `Lst2` az `Lst1`-gyel kezdődik / végződik.

Listakezelő függvények – OTP 18 V7.3 `lists` modul (3)

- `sublist(Lst,Len)`, `sublist(Lst,Start,Len)`
  Az `Lst` 1-től / `Start`-tól kezdődő, `Len` hosszú része.
- `subtract(Lst1,Lst2)` (`--`)
  Az `Lst1` lista `Lst2` elemeinek első előfordulását nem tartalmazó másolata.
- `zip(Lst1,Lst2)`, `unzip(Lst)`
  Az `Lst1` és `Lst2` elemeiből képzett párok listája; az `Lst`-ben lévő párok szétválasztásával létrehozott két lista.
- `sort(Lst)`, `sort(Fun,Lst)`
  Az `Lst` alapértelmezés szerint / `Fun` szerint rendezett másolata.
- `merge(LstOfLsts)`
  Az `LstOfLsts` listában lévő rendezett listák alapértelmezés szerinti összefuttatása.

Listakezelő függvények – OTP 18 V7.3 `lists` modul (4)

- `merge(Lst1,Lst2)`, `merge(Fun,Lst1,Lst2)`,
  A rendezett `Lst1` és `Lst2` listák alapértelmezés / `Fun` szerinti összefuttatása.
- `map(Fun,Lst)`
  Az `Lst` `Fun` szerinti átalakított elemeiből álló lista.
- `foreach(Fun,Lst)`
  Az `Lst` elemeire a mellékhatást okozó `Fun` alkalmazása.
- `sum(Lst)`
  Az `Lst` elemeinek összege, ha az összes elem számot eredményező kifejezés.
- `foldl(Fun,Acc,Lst)`, `foldr(Fun,Acc,Lst)`
  Az `Lst` elemeinek `Fun` szerinti redukálása balról jobbra, illetve jobbról balra haladva, az `Acc` akkumulátor használatával.

Részletek és továbbiak: Erlang OTP 18 V7.3 / Basic / stdlib / lists.
`http://erlang.org/documentation/doc-7.3/doc/`

Néhány további könyvtári modul és függvény (OTP 18 V7.3)

- `math` modul: `pi()`, `sin(X)`, `acos(X)`, `tanh(X)`, `asinh(X)`, `exp(X)`, `log(X)`, `log10(X)`, `pow(X,Y)`, `sqrt(X)`
- `io` modul: `read([IoDev,]Prompt)`, `write([IoDev,]Term)`, `fwrite(Format)`, `fwrite([IoDev,]Format,Data)`, `nl([IoDev])`, `format(Format)`, `format([IoDev,]Format,Data)`, `get_line([IoDev,]Prompt)`
- Formázójelek (`io` modul)

`~~`	a ~ jel	`~c`	az adott kódú karakter	`~n`	újsor
`~s`	füzér	`~f`, `~e`, `~g`	lebegőpontos szám		
`~b`, `~x`	egész	`~w`, `~p`	Erlang-term		

```
1> io:format("~s ~b ~c ~f~n", [[$a,$b,$c],$a,$b,math:exp(1)]).
abc 97 b 2.718282
ok
2> X={"abc", [1,2,3], at}, io:format("~p ~w~n", [X,X]).
{"abc",[1,2,3],at} {[97,98,99],[1,2,3],at}
ok
```

Részletek és továbbiak: Erlang OTP 18 V7.3 / Basic / stdlib.
`http://erlang.org/documentation/doc-7.3/doc/`

Tartalom

Kivételkezelés

- Az Erlangban háromféle *kivétel* van: `throw`, `exit` és `error`.
- Kivétel jelzése szintén háromféle módon lehetséges
  - `throw(Why)`
    Olyan hiba jelzésére szolgál, amelynek a kezelése elvárható az alkalmazástól.
    De használják egy mély hívásból való egyszerű visszatérésre is.
  - `exit(Why)`
    A futó processz befejezésére.
  - `error(Why)`
    Rendszerhiba jelzésére, amelynek komplex a kezelése.
- Kivétel elkapása kétféleképpen lehetséges
  - `try ... catch` kifejezéssel
  - `catch` kifejezéssel
    - visszaadja a keletkező kivétel termjét, vagy ha nincs hiba, a kiértékelt kifejezést
    - hibalokalizáláshoz hasznos, segít felderíteni a kivétel okát

Kivételkezelés: `try ... catch`

```
try Kifejezés [of
    Minta_1 [when ŐrSz_1] -> Kif_1;
    ...
    Minta_n [when ŐrSz_n] -> Kif_n]
catch
    ExFajta_1: ExMinta_1 [when ExŐrSz_1] -> ExKif_1;
    ...
    ExFajta_n: ExMinta_n [when ExŐrSz_n] -> ExKif_n
[after
    AfterKif]
end
```

- Ha a `Kifejezés` kiértékelése sikeres, az értékét az Erlang megpróbálja az `of` és `catch` közötti mintákra illeszteni
- Ha a kiértékelés sikertelen, az Erlang a jelzett kivételt próbálja meg illeszteni a `catch` és `after` közötti mintákra
- Minden esetben kiértékeli az `after` és `end` közötti kifejezést, ha van
- A `try` szerkezet speciális esete a `case`, amelyben nincs kivételkezelés

Példák `try ... catch` és `catch` használatára (1)

kiv.erl

```
genExc(A,1) -> A;
genExc(A,2) -> throw(A);
genExc(A,3) -> exit(A);
genExc(A,4) -> error(A).

tryGenExc(X,I) -> try genExc(X,I) of
                      Val -> {I, 'Lefutott', Val}
                  catch
                      throw:X -> {I, 'Kivetelt dobott', X};
                      exit:X  -> {I, 'Befejezodott', X};
                      error:X -> {I, 'Sulyos hibat jelzett', X}
                  end.
```

```
7> [kiv:tryGenExc(X,I) || {X,I} <- [{'No',1},{'Th',2},{'Ex',3},{'Er',4}]].
[{1,'Lefutott','No'}, {2,'Kivetelt dobott','Th'}, {3,'Befejezodott','Ex'},
 {4,'Sulyos hibat jelzett','Er'}]
8> [catch kiv:genExc(X,I) || {X,I}<-[{'No',1},{'Th',2},{'Ex',3},{'Er',4}]].
['No','Th', {'EXIT','Ex'}, {'EXIT',{'Er',[% stack trace]}}]
```

Példák `try ... catch` és `catch` használatára (2)

`kiv.erl` – folytatás

```
% Ha Fun(Arg) hibát ad, 'error', különben {ok, Fun(Arg)}.
safe_apply(Fun, Arg) -> try Fun(Arg) of
                            V -> {ok,V}
                        catch   throw:_Why -> error;
                                error:_Why -> error
                        end. % például error:function_clause
```

```
9> lists:last([a,b,c]).
c
10> lists:last([]).
** exception error: no function clause matching lists:last([])
11> catch lists:last([]).
{'EXIT',{function_clause,[...% stack trace]}}
12> kiv:safe_apply(fun lists:last/1, [a,b,c]).
{ok,c}
13> kiv:safe_apply(fun lists:last/1, []).
error
```


Tartalom

Típusspecifikáció

- Régebben: *dokumentációs konvenció,* nem nyelvi elem az Erlangban
  - Az `EDoc` értelmezte, ennek alapján generált dokumentációt
  - 2017-ig ezt tanítottuk
- Újabban: a nyelv része
  - Kicsit más a szintaxisa, mint amit korábban tanítottunk, ezért a dokumentumokban előfordulhat EDoc szintaxisú típusspecifikáció is
  - Mi most az új típusspecifikációt tanuljuk (egyszerűsítve)
  - Ehhez van program a típusspecifikáció ellenőrzésére és a programkóddal való összevetésére: `dialyzer`. Nagyon hasznos!
  - Ehhez van program a típusspecifikáció automatikus előállítására: `typer`. Komoly segítség!
- A *typeName* típust így jelöljük: `typeName()`.
- Típusok: előre definiált és felhasználó által definiált

Lásd: `http://erlang.org/doc/reference_manual/typespec.html`
`https://learnyousomeerlang.com/dialyzer`

Előre definiált típusok

- `any()`, `term()`: bármely Erlang-típus
- `atom()`, `binary()`, `float()`, `fun()`, `function()`, `integer()`, `pid()`, `port()`, `reference()`: Erlang-alaptípusok
- `number()`: `integer()` | `float()`[7]
- `boolean()`: a `false` és a `true` atomok típusa
- `char()`: az `integer()` típus karaktereket ábrázoló része
- `iolist()` = `[char()|binary()|iolist()]`: karakter-io
- `tuple()`: ennestípus
- `list(Type)`: az `[Type]` listatípus szinonimája
- `nil()`: az `[]` üreslista-típus szinonimája
- `string()`: a `list(char())` szinonimája
- `deep_string()` = `[char()|deep_string()]`
- `none()`: a „nincs típusa” típus; nem befejeződő függvény „eredményének” megjelölésére

[7] `...|...` választási lehetőség a szintaktikai leírásokban.

Új (felhasználó által definiált) típusok

- Szintaxis: `-type newType() :: Típuskifejezés.`
- Típuskifejezés:
  term, előre definiált típus, felhasználó által definiált típus, típusváltozó
- Uniótípus
  `T1|T2` típuskifejezés, ha `T1` és `T2` típuskifejezések
  `-type nyelv() :: cekla | prolog | erlang.`
- Listatípus
  `[T]` típuskifejezés, ha `T` típuskifejezés
  `-type nyelvlista() :: [nyelv()].`
  Alternatív jelölés: `-type nyelvlista() :: list(nyelv()).`
- Ennestípus
  `{T1,...,Tn}` típuskifejezés, ha `T1`, ...,`Tn` típuskifejezések
  ```
  -type diak() :: atom().
  -type munka() :: atom().
  -type teljesites() :: {diak(), [{munka(), nyelvlista()}]}.
  ```
- Függvénytípus
  `fun(T1,...,Tn) -> T` típuskifejezés, ha `T1`,...,`Tn` és `T` típuskifejezések

Függvénytípus specifikálása

Egy függvény típusát az argumentumainak (formális paramétereinek) és az eredményének (visszatérési értékének) a típusa határozza meg.

- Szintaxis: `-spec funcName(T1,...,Tn) -> Tret.`
- `T1`,...,`Tn` és `Tret` háromféle lehet:
  - `TypeVar`
    Típusváltozó, tetszőleges típus jelölésére
  - `Type`
    Típuskifejezés
  - `Var::Type`
    Paraméterváltozóval bővítve dokumentációs célra
- Paraméter- vagy argumentumváltozó: a típusspecifikáció elemeinek nevet adhatunk, pl.

```
-spec safe_last(Xs::[any()]) -> {ok, X::any()} | error.
% X az Xs lista utolsó eleme.
-spec split(N::integer(), List::[any()]) ->
        {Prefix::[any()], Suffix::[any()]}.
```


Példák függvénytípus specifikálására (1)

```
-spec id_1(X) -> X. % az X itt: típusváltozó
% Az argumentum azonos az eredménnyel, típusuk tetszőleges.
-spec id_2(tuple()) -> tuple().
% Az argumentum és az eredmény azonos típusú, értékük különbözhet.
-spec id_3(X::tuple()) -> X::tuple(). % X: argumentumváltozó
% Az argumentum és az eredmény azonos típusú, értékük azonos.

-spec file:open(FileName, _Mode) -> {ok, _Handle} | {error, Why}.
% A szingli típusváltozót az Erlang jelzi,'_'-sal elkerülhető.
-spec file:read_line(Handle) -> {ok, _Line} | eof.
% A típusspecifikációban term is megadható, pl. atom.

-spec lists:map_1(fun((A) -> B), [A]) -> [B].
% A típusspeckóban lehet függvényérték is, pl. fun((A) -> B).
-spec lists:filter(fun((X) -> boolean()), [X]) -> [X].
% Típusváltozó és típuskifejezés váltogatva is használható.
-spec map_2(fun((A::any()) -> B::any()), As::[any()]) ->
                                                  Bs::[any()].
% Legkifejezőbb az argumentumváltozó és a típuskif. egyidejű használata.
```


Példák függvénytípus specifikálására (2)

```
% A 2018. évi nagy házi feladatból

-type code() :: [integer()]. % [integer()] ≡ list(integer())
% code() egy integer() típusú értékekből álló lista típusa.
-type blacks() :: integer().
-type whites() :: integer().
% Mindkettő az integer() beépített típus szinonimája.
% A szinonima bevezetésének célja az érthetőség növelése.
-type answer() :: {blacks(),whites()}.
% answer() a blacks()és whites() típusú értékekből álló pár típusa.
-type hint()   :: {code(),answer()}.
% hints() a codes() és answer() típusú értékekből álló pár típusa.

-spec mmind:mmind(Max::integer(), Hints::[hint()]) -> Codes::[code()].
% mmind/2 első argumentuma egy egész, második argumentuma egy hint()
% típusú értékekből álló lista, eredménye code() típusú értékek lstája.
```

A paraméterváltozók arra valók, hogy a fejkommentben – lehetőleg deklaratív módon – leírjuk az argumentum(ok) és eredmény közötti összefüggést.

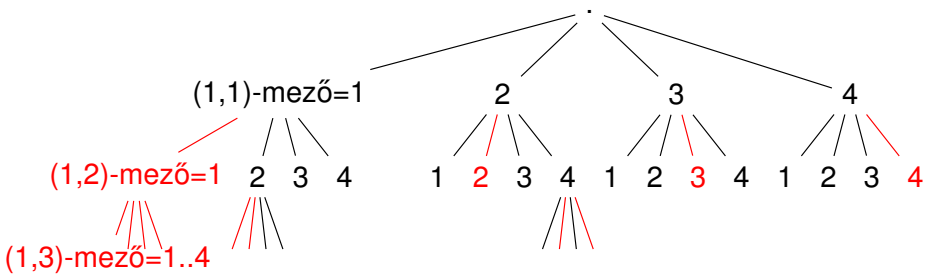
Tartalom

Pontos megoldás (Exact solution)

- Kombinatorikában sokszor *optimális megoldás* (optimal solution) a neve
  - nem közelítő (approximáció)
  - nem szuboptimális (bizonyos heurisztikák alkalmazásával előállított)
- Keresési feladat: valamilyen *értelmezési tartomány* azon elemeit keressük, melyek megfelelnek az előírt *feltételeknek*
  - lehetséges megoldás = *jelölt* (canditate)
  - értelmezési tartomány = *keresési tér (search space)*, jelöltek halmaza
  - feltételek = *korlátok* vagy *kényszerek (constraints)*
- Példák: egy 16 mezős Sudoku-feladvány helyes megoldásai, 8 királynő egy sakktáblán, Hamilton-kör egy gráfban, Imre herceg nagyszülei . . .
- A Prolog végrehajtási algoritmusa képes egy predikátumokkal és egy célsorozattal leírt probléma összes megoldását felsorolni (!)
- Funkcionális megközelítésben a megoldások felsorolását *a programozónak meg kell írnia* (logikaiban is megírható természetesen)

Keresési tér bejárása

- Itt csak véges keresési térrel foglalkozunk
- A megoldás keresését esetekre bonthatjuk, azokat alesetekre stb. $\rightsquigarrow$ Ilyenkor egy *keresési fát* járunk be
- Pl. egy 16 mezős Sudoku *(1. sor, 1. oszlop)* mezejének értéke lehet 1,2,3,4;
  az *(1. sor, 2. oszlop)* mezejének értéke szintén lehet 1,2,3,4 stb.



- Bizonyos esetekben (pirossal jelöljük) tudjuk, hogy nem lehet megoldás (egy sorban ugyanaz az érték több mezőben nem fordulhat elő)
- Hatékony megoldás: a keresési fa egyes részeit levágjuk (nem járjuk be).

Példa: Send + More = Money

- Feladat: Keressük meg azon `(S,E,N,D,M,O,R,Y)` számnyolcasokat, melyekre $0 \leq$ `S,E,N,D,M,O,R,Y` ≤ 9 és `S,M`> 0, ahol az eltérő betűk eltérő értéket jelölnek, és

```
  S E N D
+ M O R E
---------
M O N E Y
```

a papíron történő összeadás szabályai szerint, vagyis

$$(1000\mathtt{S} + 100\mathtt{E} + 10\mathtt{N} + \mathtt{D}) + (1000\mathtt{M} + 100\mathtt{O} + 10\mathtt{R} + \mathtt{E}) = \\ = 10000\mathtt{M} + 1000\mathtt{O} + 100\mathtt{N} + 10\mathtt{E} + \mathtt{Y}.$$

- Naív megoldásunk: járjuk be a teljes keresési teret, és szűrjük azokra a nyolcasokra, amelyekre teljesülnek a feltételek
- Keresési tér $\subseteq \{0, 1, \ldots, 9\}^8$, azaz egy 8-elemű Descartes-szorzat, mérete 10^8 (tizedrendű nyolcadosztályú ismétléses variáció)
- Megoldás:

$$\{(\mathtt{S},\mathtt{E},\mathtt{N},\mathtt{D},\mathtt{M},\mathtt{O},\mathtt{R},\mathtt{Y}) \mid \mathtt{S},\mathtt{E},\mathtt{N},\mathtt{D},\mathtt{M},\mathtt{O},\mathtt{R},\mathtt{Y} \in \{0..9\},\ \mathtt{all\_different},\\ \mathtt{S},\mathtt{M} > 0,\ \mathtt{SEND} + \mathtt{MORE} = \mathtt{MONEY}\}$$

Kimerítő keresés

Exhaustive search, Generate and test, Brute force

- Kimerítő keresés: teljes keresési tér bejárása, jelöltek szűrése

sendmory.erl – Send More Money megoldások, alapfogalmak

```
-type d() :: 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9.
-type octet() :: {d(),d(),d(),d(),d(),d(),d(),d()}.

-spec num(Ns::[d()]) -> N::integer().
% Az Ns számjegylista decimális számként N.
num(Ns)-> lists:foldl(fun(X,E) -> E*10+X end, 0, Ns).

-spec check_sum(octet()) -> boolean().
% A jelölt teljesíti-e az összeadási feltételt.
check_sum({S,E,N,D,M,O,R,Y}) ->
    Send = num([S,E,N,D]),
    More = num([M,O,R,E]),
    Money = num([M,O,N,E,Y]),
    Send+More =:= Money.
```


Kimerítő keresés – folytatás

sendmory.erl – folytatás

```
-spec all_different(Xs::[any()]) -> B::boolean()
all_different(L) -> length(L) =:= length(lists:usort(L)).

-spec smm0() -> [octet()].
smm0() ->  Ds = lists:seq(0, 9),
           [{S,E,N,D,M,O,R,Y} ||
               S <- Ds,
               E <- Ds,
               N <- Ds,
               D <- Ds,
               M <- Ds,
               O <- Ds,
               R <- Ds,
               Y <- Ds,
               all_different([S,E,N,D,M,O,R,Y]),
               S > 0, M > 0,
               check_sum({S,E,N,D,M,O,R,Y})].
```

GENERATE
———
and
TEST

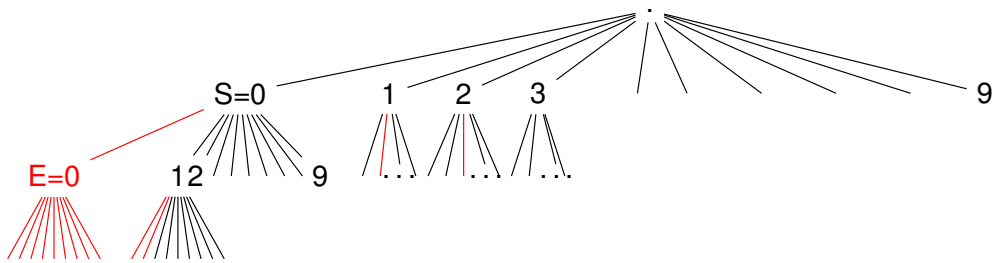
Keresési fa csökkentése (1)

- 10^8 eset ellenőrzése túl sokáig tart
- Ötlet: korábban, már generálás közben is szűrhetjük az egyezéseket

sendmory.erl – folytatás

```
-spec smm1() -> [octet()].
smm1() ->
    Ds = lists:seq(0, 9),
    [{S,E,N,D,M,O,R,Y} ||
        S <- Ds,
        E <- Ds, E =/= S,
        N <- Ds, not lists:member(N, [S,E]),
        D <- Ds, not lists:member(D, [S,E,N]),
        M <- Ds, not lists:member(M, [S,E,N,D]),
        O <- Ds, not lists:member(O, [S,E,N,D,M]),
        R <- Ds, not lists:member(R, [S,E,N,D,M,O]),
        Y <- Ds, not lists:member(Y, [S,E,N,D,M,O,R]),
        S > 0, M > 0,
        check_sum({S,E,N,D,M,O,R,Y})].
```


Keresési fa csökkentése (2)



- A keresési fában azokat *a részfákat, amelyekben egyezés van* (pirosak), már generálás közben elhagyhatjuk
- Ez már nem kimerítő keresés (nem járjuk be az összes jelöltet)
- A javulást annak köszönhetjük, hogy a jelöltek **tesztelését előrébb hoztuk**
- Vegyük észre, hogy a **keresési tér csökkentésével** is ide juthatunk: új keresési tér $\subseteq$ {10 elem nyolcadadosztályú ismétlés nélküli variációi}
- Mérete $10!/(10-8)! = 1\,814\,400 \ll 100\,000\,000$

Variációk felsorolása listanézettel

```
1> Domain = [a,b,c,d].        % A halmaz.
[a,b,c,d]
2> IVar = [ {X,Y,Z} ||        % Ismétléses variációk.
              X <- Domain,
              Y <- Domain,
              Z <- Domain ].
[{a,a,a}, {a,a,b}, {a,a,c}, {a,a,d}, {a,b,a}, {a,b,b}, {...}|...]
3> length(IVar).
64                            % 4*4*4 = 64.
4> INVar = [ {X,Y,Z} ||       % Ismétlés nélküli variációk.
               X <- Domain,
               Y <- Domain -- [X],
               Z <- Domain -- [X,Y] ].
[{a,b,c}, {a,b,d}, {a,c,b}, {a,c,d}, {a,d,b}, {a,d,c},
 {b,a,c},
 {...}|...]
5> length(INVar).
24                            % 4!/1! = 24.
```


Keresési tér csökkentése

- Újból kimerítő keresés, de kisebb a keresési tér

sendmory.erl – folytatás

```
-spec smm2() -> [octet()].
% Ellenőrzés csak a generálás után!
smm2() ->
    Ds = lists:seq(0, 9),
    [{S,E,N,D,M,O,R,Y} ||
        S <- Ds -- [],
        E <- Ds -- [S],
        N <- Ds -- [S,E],
        D <- Ds -- [S,E,N],
        M <- Ds -- [S,E,N,D],
        O <- Ds -- [S,E,N,D,M],
        R <- Ds -- [S,E,N,D,M,O],
        Y <- Ds -- [S,E,N,D,M,O,R],
        S > 0, M > 0,
        check_sum({S,E,N,D,M,O,R,Y})].
```


Kimerítő keresés újból: keresési tér explicit felsorolása

- Érdemes-e a jelöltek generálását elválasztani az ellenőrzéstől? Nem!

sendmory.erl – folytatás

```
-spec invars() -> [octet()].
% Számjegyek ismétlés nélküli nyolcadosztályú variációi
invars() -> Ds = lists:seq(0,9),
            [ {S,E,N,D,M,O,R,Y} ||
                S <- Ds -- [],
                E <- Ds -- [S],
                N <- Ds -- [S,E],
                D <- Ds -- [S,E,N],
                M <- Ds -- [S,E,N,D],
                O <- Ds -- [S,E,N,D,M],
                R <- Ds -- [S,E,N,D,M,O],
                Y <- Ds -- [S,E,N,D,M,O,R] ].

-spec smm3() -> [octet()].
smm3() -> [Sol || {S,_E,_N,_D,M,_O,_R,_Y} = Sol <- invars(),
                  S > 0, M > 0, check_sum(Sol)].
```


Kimerítő keresés újból: keresési tér explicit felsorolása (2)

- Tovább csökkenthető a keresési tér, ha előrébb mozgatunk feltételeket

sendmory.erl – folytatás

```
-spec smm4() -> [octet()].
% További ellenőrzések generálás közben.
smm4() ->
    Ds = lists:seq(0,9),
    [{S,E,N,D,M,O,R,Y} ||
        S <- Ds -- [0],              % 0 kizárva
        E <- Ds -- [S],
        N <- Ds -- [S,E],
        D <- Ds -- [S,E,N],
        M <- Ds -- [0,S,E,N,D],      % 0 kizárva
        O <- Ds -- [S,E,N,D,M],
        R <- Ds -- [S,E,N,D,M,O],
        Y <- Ds -- [S,E,N,D,M,O,R],
        check_sum({S,E,N,D,M,O,R,Y})].
```

Vágások a keresési fában generálás közben

- Ötlet: építsük hátulról a számokat, és ellenőrizzük a részösszegeket még generálás közben

sendmory.erl – folytatás

```
smm5() ->                          %%      S E N D
    Ds = lists:seq(0, 9),          %%    + M O R E
    [{S,E,N,D,M,O,R,Y} ||          %%  = M O N E Y
        D <- Ds -- [],
        E <- Ds -- [D],
        Y <- Ds -- [D,E],
        (D+E) rem 10 =:= Y,
        N <- Ds -- [D,E,Y],
        R <- Ds -- [D,E,Y,N],
        (num([N,D])+num([R,E])) rem 100 =:= num([E,Y]),
        O <- Ds -- [D,E,Y,N,R],
        (num([E,N,D])+num([O,R,E])) rem 1000 =:= num([N,E,Y]),
        S <- Ds -- [D,E,Y,N,R,O,0],
        M <- Ds -- [D,E,Y,N,R,O,S,0],
        check_sum({S,E,N,D,M,O,R,Y})].
```


Futási eredmények (Intel x86/64 i5-3210M CPU @ 2.50GHz)

Az eddig kidolgozott megoldások jellemzése és a futási eredmények

- smm0 – kimerítő keresés
- smm0e – mint smm0, de kis trükkel (S <– [9,8,7,...]
- smm1 – keresési fa redukálása egyezések szűrésével generálás közben
- smm2 – keresési tér redukálása a változók tartományának szűkítésével
- smm3 – mint smm2, de ellenőrzéssel generálás közben
- smm4 – mint smm2, a változók tartományának további szűkítésével
- smm5 – számok építése hátulról, részösszegek ellenőrzése generálás közben

```
%                                    Number of candidates with approx. length
% Id  SEND+MORE=MONEY      Time        1    2    3    4         5
% 0 : 9567+1085=10652    82660 ms       0    0    0    0 100000000 cands
% 0e: 9567+1085=10652     5320 ms       0    0    0    0   5671083 cands
% 1 : 9567+1085=10652     2060 ms       0    0    0    0   1814400 cands
% 2 : 9567+1085=10652     1660 ms       0    0    0    0   1814400 cands
% 3 : 9567+1085=10652     3310 ms       0    0    0    0   1814400 cands
% 4 : 9567+1085=10652     1510 ms       0    0    0    0   1451520 cands
% 5 : 9567+1085=10652       20 ms     720 3024 1450 1536      1536 cands
```


Vágások a keresési fában generálás közben (2)

- A vágások eredményeképpen nagyságrendileg gyorsabb megoldást kapunk
- Minél korábbi fázisában vágunk, annál jobb a generálás: a keresési fában *nem a legalsó szintről kell visszalépni*, hogy új megoldást keressünk
- Előzőből ötlet: építsünk részmegoldásokat, és minden építő lépésnél ellenőrizzük, hogy van-e értelme a részmegoldást megoldássá bővíteni

sendmory.erl – folytatás

```
-type partial_solution() ::
        {SendList::[d()], MoreList::[d()], MoneyList::[d()]}.

-spec smm6() -> [octet()].
smm6() ->
    smm6({[],[],[]}, 5, lists:seq(0,9)).
```

- `{[],[],[]}` a kiindulási részmegoldásunk (`PartialSolution`)
- Ötjegyű számokat kell építeni, ezért `5` a második argumentum (`Num`)
- `lists:seq(0,9)` a változók tartománya (`Domain`)

Vágások a keresési fában generálás közben (3)

- Egy `PartialSolution = {SendList, MoreList, MoneyList}` részmegoldás csak akkor bővíthető megoldássá, ha
  - a listákban a számjegyeket jelentő változók jó pozícióban vannak;
  - a részösszeg is helyes, csak az átvitelben lehet eltérés.

sendmory.erl – folytatás

```
-spec check_equals(partial_solution()) -> boolean().
check_equals(PartialSolution) ->
 case PartialSolution of
   {[D],[E],[Y]}                    -> all_different([D,E,Y]);
   {[N,D],[R,E],[E,Y]}              -> all_different([N,D,R,E,Y]);
   {[E,N,D],[O,R,E],[N,E,Y]}        -> all_different([O,N,D,R,E,Y]);
   {[S,E,N,D],[M,O,R,E],[O,N,E,Y]} -> all_different([S,M,O,N,D,R,E,Y]);
   {[O,S,E,N,D],[O,M,O,R,E],[M,O,N,E,Y]} ->
       all_different([S,M,O,N,D,R,E,Y]) andalso all_different([O,S,M]);
   _                                -> false
 end.
```

Vágások a keresési fában generálás közben (4)

- Egy `PartialSolution = {SendList, MoreList, MoneyList}` részmegoldás csak akkor bővíthető megoldássá, ha
  - a listákban a számjegyek jó pozícióban vannak: az azonos betűk egyeznek, a többi számjegy különbözik;
  - a részösszeg is helyes, csak az átvitelben lehet eltérés.

`sendmory.erl` – folytatás

```
-spec check_partialsum(partial_solution()) -> boolean().
% Ellenőrzi, hogy aritmetikailag helyes-e a részmegoldás.
% Az átvitellel (carry) nem foglalkozik, mert pl.
% {[1,2],[3,4],[4,6]} és {[9],[2],[1]} egyformán helyes,
% ui. építhető belőlük teljes megoldás.
check_partialsum({Send, More, Money}) ->
    S = num(Send), M = num(More), My = num(Money),
    (S+M) rem round(math:pow(10,length(Send))) =:= My.
```


Vágások a keresési fában generálás közben (5)

`sendmory.erl` – folytatás

```
-spec smm6(PS::partial_solution(), Num::integer(),
%           Domain::[integer()]) -> Sols::[octet()].
% Sols az összes megoldás, mely a PS részmegoldásból építhető,
% mérete (Send hossza) =< Num, a számjegyek tartománya Domain.
smm6({Send,_,_} = PS, Num, _Domain) when length(Send) =:= Num ->
  {[O,S,E,N,D], [O,M,O,R,E], [M,O,N,E,Y]} = PS,
  [{S,E,N,D,M,O,R,Y}];
smm6({Send,More,Money}, Num, Domain) when length(Send) < Num ->
  [Solution ||
     Dsend <- Domain,
     Dmore <- Domain,
     Dmoney <- Domain,
     PSol1 <- [ {[Dsend|Send],[Dmore|More],[Dmoney|Money]} ],
       % pl. így tudunk változóhoz értéket kötni: PSol1 <- [ Érték ],
     check_equals(PSol1),
     check_partialsum(PSol1),
     Solution <- smm6(PSol1, Num, Domain) ].
```


Vágások a keresési fában generálás közben (6)

`sendmory.erl` – folytatás

```
-spec smm7() -> [octet()].
% Hátulról építi a számokat, ellenőrzi a részösszegeket.
smm7() ->
    [{S,E,N,D,M,O,R,Y} ||
        {[O,S,E,N,D], [O,M,O,R,E], [M,O,N,E,Y]} <-
                                          smm7(5, lists:seq(0,9))].
```

- Az `smm7` program lényegileg megegyezik `smm6`-tal, de tisztább a szerkezete
- Az `smm7/2` függvény állítja elő a megoldások listáját, ebből szedi ki `smm7/0` függvény a megoldást jelentő nyolcasokat
- Most is ötjegyű számokat építünk, ez `smm7/2` első argumentuma
- A számjegyek tartománya: 0...9, ez `smm7/2` második argumentuma

Vágások a keresési fában generálás közben (7)

`sendmory.erl` – folytatás

```
-spec smm7(Num::integer(), Domain::[d()]) -> PS::[partial_solution()].
% Visszaadja a Num (= Send hossza) méretű részmegoldások listáját,
% Domain a számjegykészlet.
smm7(0, _)      ->
    [{[],[],[]}];
smm7(N, Domain) ->
   [ PartialSolution ||
      {Send,More,Money} <- smm7(N-1, Domain),
      Dsend  <- Domain,
      Dmore  <- Domain,
      Dmoney <- Domain,
      begin
         PartialSolution = {[Dsend|Send], [Dmore|More], [Dmoney|Money]},
         true
      end,
      check_equals(PartialSolution),
      check_partialsum(PartialSolution)
   ].
```

Hol és hogyan lehetne csökkenteni az `smm7/2` függvényben a keresési teret?

Vágások a keresési fában generálás közben (8)

sendmory.erl – folytatás

```
-spec smm7(Num::integer(), Domain::[d()]) -> PS::[partial_solution()].
% Visszaadja a Num (= Send hossza) méretű részmegoldások listáját,
% Domain a számjegyek készlete.
smm7(0, _)      ->
    [{[],[],[]}];
smm7(N, Domain) ->
   [ PartialSolution ||
     {Send,More,Money} <- smm7(N-1, Domain),
     Dsend  <- Domain,
     Dmore  <- Domain,
     Dmoney <- Domain, %  <-- ITT
     begin
        PartialSolution = {[Dsend|Send], [Dmore|More], [Dmoney|Money]},
        true
     end,
     check_equals(PartialSolution),
     check_partialsum(PartialSolution)
   ].
```


Vágások a keresési fában generálás közben (9)

sendmory.erl – folytatás

```
-spec smm7a(Num::integer(), Domain::[d()]) -> PS::[partial_solution()].
smm7a(0, _)      ->
    [{[],[],[]}];
smm7a(N, Domain) ->
   [PartialSolution ||
     {Send,More,Money} <- smm7a(N-1, Domain),
     Dsend  <- Domain,
     Dmore  <- Domain,
     Dmoney <- [ begin Carry = if Send =:= [] -> 0 ;
                                  true -> (hd(Send) + hd(More)) div 10
                               end,
                 (Dsend + Dmore + Carry) rem 10
               end
             ],
     begin PartialSolution = {[Dsend|Send],[Dmore|More],[Dmoney|Money]},
           true end,
     check_equals(PartialSolution),
     check_partialsum(PartialSolution)
   ].
```


Vágások a keresési fában generálás közben (10)

```
smm7a(0, _)      ->
...                      % Send, More és Money az éppen bővíteni
  {Send,More,Money} <- smm7a(N-1, Domain), % kívánt részmegoldás
  Dsend  <- Domain,
  Dmore  <- Domain,      % Dsend, Dmore, Dmoney az új számjegyek,
  Dmoney <-              % Domain a számjegyek teljes tartománya
     [ begin
         Carry =
           if Send =:= [] -> % Ha Send üres, More is üres,
                  0 ;        %  nincs átvitel (Carry = 0)
              true ->        % Egyébként Send és More fejének összegétől
                  (hd(Send) + hd(More)) div 10 % függően Carry=0 vagy =1
           end,
           (Dsend + Dmore + Carry) rem 10 % Dmore pontos értékét ez
       end ],                             % a három szám határozza meg.
      begin PartialSolution = {[Dsend|Send],...}, true end,
      check_equals(PartialSolution) % ,
      check_partialsum(PartialSolution) % feleslegessé vált, törölhető
].
```

Jelentős a nyereség: `Dmoney` méretét 10-ről 1-re csökkentettük!

Futási eredmények (Intel x86/64 i5-3210M CPU @ 2.50GHz)

Az újabb megoldások jellemzése és a futási eredmények

- smm5 – számok építése hátulról, részösszegek ellenőrzése generálás közben (ez a megoldás nagyon hatékonynak bizonyult, ezért az összehasonlításhoz újra szerepeltetjük)
- smm6 – részmegoldások építése hátulról, ellenőrzés után az ígéretes részmegoldások bővítése
- smm7 – mint smm6, de átláthatóbb kóddal
- smm7a – mint smm7, de az első két tartományból (Dsend, Dmore) számítja ki a harmadik tartományt (Dmoney), és ezzel Dmoney 10-edére csökken

```
%                                  Number of candidates with approx. length
% Id  SEND+MORE=MONEY      Time        1    2    3    4         5
% 5 : 9567+1085=10652      20 ms     720 3024 1450 1536      1536 cands
% 6 : 9567+1085=10652     170 ms     720 3024 1450 2196       148 cands
% 7 : 9567+1085=10652     150 ms     720 3024 1450 2196       148 cands
% 7a: 9567+1085=10652      30 ms      72  290  183  196         1 cands
```

Korlátkielégítési probléma (Constraint satisfaction problem, CSP)

- Eddig előre „könnyen” átlátható keresési fát terveztünk meg, vágtunk meg és jártunk be; de a végső cél nem az átlátható keresési fa
- CSP-megközelítés:
  - amíg lehet, szűkítsük a választási lehetőségeket a *korlátok* alapján
  - ha már nem lehet, bontsuk esetekre a választási lehetőségeket

SMM mint CSP = (Változók, Tartományok, Korlátok)

- Változók: `S,E,N,D,M,O,R,Y`, segédváltozók: `0`, C_1, C_2, C_3, C_4
- Tartományok:

Tartományok:	0	c_1	c_2	c_3	c_4	s	e	n	d	m	o	r	y
Alsó határ:	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
Felső határ:	0	1	1	1	1	9	9	9	9	9	9	9	9

- Korlátok:

```
  S E N D
+ M O R E
---------
M O N E Y
```

$$d + e + 0 = y + 10 \cdot c_1$$
$$n + r + c_1 = e + 10 \cdot c_2$$
$$e + o + c_2 = n + 10 \cdot c_3$$
$$s + m + c_3 = o + 10 \cdot c_4$$
$$0 + 0 + c_4 = m + 10 \cdot 0$$

`all_different`

CSP tevékenységek – szűkítés

- **Szűkítés egy korlát szerint**: egy korlát egy változójának d_i értéke *felesleges*, ha nincs a korlát többi változójának olyan értékrendszere, amely d_i-vel együtt kielégíti a korlátot
  Pl. az utolsó korlát: $0 + 0 + c_4 = m + 10 \cdot 0$, a változók tartománya:
  $0 \in [0]$, $c_4 \in [0,1]$, $m \in [1,2,3,4,5,6,7,8,9]$
  Az $m \in [2,3,4,5,6,7,8,9]$ értékek feleslegesek!
- Felesleges érték elhagyásával (szűkítéssel) ekvivalens CSP-t kapunk
- SMM kezdeti tartománya; és megszűkítve, tovább már nem szűkíthető:

```
c1: 01
c2: 01
c3: 01
c4: 01
s:  123456789
e: 0123456789
n: 0123456789
d: 0123456789
m:  123456789
o: 0123456789
r: 0123456789
y: 0123456789
```

szűkítés az összes lehetséges korláttal, ameddig sikerül:

```
c1: 01
c2: 01
c3: 01
c4:  1
s:        89
e: 0123456789
n: 0123456789
d: 0123456789
m:  1
o: 01
r: 0123456789
y: 0123456789
```


CSP tevékenységek – címkézés (labeling)

- Tovább már nem szűkíthető CSP esetén vizsgáljuk a többértelműséget
- Többértelműség: van olyan tartomány, amely legalább két elemet tartalmaz, és egyetlen tartomány sem üres
- **Címkézés (elágazás)**:
  1. kiválasztunk egy többértelmű változót (pl. a legkisebb tartományút),
  2. a tartományt két vagy több részre osztjuk (választási pont),

```
c1: 01
c2: 01
c3: 01
c4:  1
s:        89
e: 0123456789
...
```

Két új CSP-t készítünk: `c1=0` és `c1>0` esetek:

```
c1: 0
c2: 01
c3: 01
c4:  1
s:        89
e: 0123456789
...
```

és

```
c1: 1
c2: 01
c3: 01
c4:  1
s:        89
e: 0123456789
...
```

3. az egyes választásokat – mint új CSP-ket – mind megoldjuk.

CSP tevékenységek – visszalépés

- Ha nincs többértelműség, két eset lehet:
  - Ha valamely változó tartománya üres, nincs megoldás ezen az ágon
  - Ha minden változó tartománya egy elemű, előállt egy megoldás

Az SMM CSP-megoldásának folyamata, összefoglalva:

1. Felvesszük a változók és segédváltozók tartományait, ez az első *állapotunk* (az állapot egy CSP), ezt betesszük az S listába
2. Ha az S lista üres, megállunk, nincs több megoldás
3. Az S listából kiveszünk egy állapotot, és szűkítjük, ameddig csak lehet
4. Ha van üres tartományú változó, akkor az állapotból nem jutunk megoldáshoz, folytatjuk a 2. lépéssel
5. Ha nincs többértelmű változó az állapotban, az állapot egy megoldás, eltesszük, folytatjuk a 2. lépéssel
6. Valamelyik többértelmű változó tartományát részekre osztjuk, az így keletkező állapotokat visszatesszük a listába, folytatjuk a 2. lépéssel

SMM CSP-megoldással – részlet

`smm99.erl` – SMM CSP megoldásának alapjai

```
-type state()   :: [{varname(), domain()}].
-type varname() :: any().
-type domain()  :: [d()].

-spec initial_state() -> St::state().
% St describes the variables of the SEND MORE MONEY problem.
initial_state() ->
    VarNames = [0,c1,c2,c3,c4,s,e,n,d,m,o,r,y],
    From     = [0, 0, 0, 0, 0,1,0,0,0,1,0,0,0],
    To       = [0, 1, 1, 1, 1,9,9,9,9,9,9,9,9],
    [ {V,lists:seq(F,T)} ||
        {V,{F,T}} <- lists:zip(VarNames, lists:zip(From, To))].

-spec smm() -> [octet()].
smm() ->
    St = initial_state(),
    process(St, [], []).
```


SMM CSP megoldással – részlet (2)

`smm99.erl` – SMM CSP-megoldásának fő függvénye

```
% process(St0::state(),Sts::[state()],Sols0::[octet()])->Sols::[octet()].
% Sols = Sols1++Sols0 s.t. Sols1 are the sols obtained from [St0|Sts].
process(...) -> ...;
process(St0, Sts, Sols0) ->
    St = narrow_domains(St0),
    DomSizes = [ length(Dom) || {_,Dom} <- St ],
    Max = lists:max(DomSizes),
    Min = lists:min(DomSizes),
    if Min =:= 0 ->           % there are empty domains
           process(final, Sts, Sols0);
       (St =/= St0) ->        % state changed
           process(St, Sts, Sols0);
       Max =:= 1 ->           % all domains singletons, solution found
           Sol = [Val || {_,[Val]} <- problem_vars(St)],
           process(final, Sts, [Sol|Sols0]);
       true ->
           {CSt1, CSt2} = make_choice(St),   % labeling
           process(CSt1, [CSt2|Sts], Sols0)
    end.
```


Futási eredmények (Intel x86/64 i5-3210M CPU @ 2.50GHz)

A hatékony megoldások jellemzése és a futási eredmények

- smm5 – számok építése hátulról, részösszegek ellenőrzése generálás közben
- smm7a – részmegoldások építése hátulról, ellenőrzés után az ígéretes részmegoldások bővítése, az első két tartományból (Dsend, Dmore) a harmadik tartomány (Dmoney) kiszámítása, és ezzel Dmoney 10-edére csökkentése
- CSP-alapú megoldás (CSP = Constraint Satisfaction Problem, korlátkielégítési probléma)

```
%                              Number of candidates with approx. length
% Id  SEND+MORE=MONEY      Time        1    2    3    4         5
% 5 : 9567+1085=10652      20 ms     720 3024 1450 1536      1536 cands
% 7a: 9567+1085=10652      30 ms      72  290  183  196         1 cands
% 99: 9567+1085=10652      20 ms       0    0    0    0        21 cands
```


Tartalom

Futam definiálása

- *Futam*: olyan nem üres lista, amelynek szomszédos elemei valamilyen feltételnek megfelelnek
- A feltételt az előző és az aktuális elemre alkalmazandó *predikátumként* adjuk át a futamot előállító fügvénynek
- *Predikátum:* logikai (igaz/hamis) értéket eredményül adó függvény.
- Példa:

```
1> P = fun erlang:'<'/2.
#Fun<erlang.<.2>
2> P(1, 2).
true
```

- Feladat: írjunk olyan Erlang-függvényt, amely egy lista egymás utáni elemeiből képzett diszjunkt, tovább nem bővíthető futamok listáját adja eredményül – az elemek eredeti sorrendjének megőrzésével
- Az első, naív változatban egy segédfüggvényt írunk egy lista *első futamának* (prefixumának), valamint egy másikat a *maradéklistának* az előállítására (vö. `lists:splitwith/2`)

Futamok előállítása – naív változat

- Példa (ahol P = fun erlang:'<'/2):

```
4> futam:elso_futam(P, [1,3,9,5,7,2,5,9,1,6,0,0,3,5,6,2]).
[1,3,9]
```

`futam.erl` – Futamok felsorolása

```
-type elem() :: any().
-type pred() :: fun((elem(), elem()) -> bool()).

-spec elso_futam(P::pred(), Ls::[elem()]) -> Fs::[elem()].
% Fs az Ls P-t kielégítő első, tovább nem bővíthető futama
% (prefixuma).
elso_futam(_P, [X]) ->
    [X];
elso_futam(P, [X|Ys=[Y|_]]) -> % Ys=[Y|_]: réteges minta
    case P(X, Y) of
        false -> [X];
        true  -> [X|elso_futam(P, Ys)]
    end.
```


Futamok előállítása – naív változat (2)

- Példa:

```
4> futam:elso_futam(P, [1,3,9,5,7,2,5,9,1,6,0,0,3,5,6,2]).
[1,3,9]
5> futam:maradek(P, [1,3,9,5,7,2,5,9,1,6,0,0,3,5,6,2]).
[5,7,2,5,9,1,6,0,0,3,5,6,2]
```

`futam.erl` – folytatás

```
-spec maradek(P::pred(), Ls::[elem()]) -> Ms::[elem()].
% Ms az Ls P-t kielégítő első futama utáni maradéka.
maradek(_P, [_X]) ->
    [];
maradek(P, [X|Ys=[Y|_]]) ->
    case P(X, Y) of
        false -> Ys;
        true  -> maradek(P, Ys)
    end.
```


Futamok előállítása – naív változat (3)

- Példa:

```
6> futam:naiv_futamok(P, [1,3,9,5,7,2,5,9,1,6,0,0,3,5,6,2]).
[[1,3,9],[5,7],[2,5,9],[1,6],[0],[0,3,5,6],[2]]
7> futam:naiv_futamok(P, []).
[]
8> futam:naiv_futamok(P, [1]).
[[1]]
```

`futam.erl` – folytatás

```
-spec naiv_futamok(Pred::pred(), Ls::[elem()]) -> Lss:[[elem()]].
% Lss az Ls szomszédos, Pred-et kielégítő elemeiből álló, tovább
% nem bővíthető, diszjunkt futamok listája.
naiv_futamok(_P, [])  -> [];
naiv_futamok(P, Ls) -> Fs = elso_futam(P, Ls),
                       Ms = maradek(P, Ls),
                       [ Fs | naiv_futamok(P, Ms) ].
```

Futamok előállítása – hatékonyabb változat

- Pazarlás kétszer megkeresni az első futamot, lásd előző példák:

```
4> futam:elso_futam(P, [1,3,9,5,7,2,5,9,1,6,0,0,3,5,6,2]).
[1,3,9]
5> futam:maradek(P, [1,3,9,5,7,2,5,9,1,6,0,0,3,5,6,2]).
[5,7,2,5,9,1,6,0,0,3,5,6,2]
```

- Kezeljük az első futamot és a maradékot *egyetlen párként*:

```
9> futam:futam_maradek(P, [1,3,9,5,7,2,5,9,1,6,0,0,3,5,6,2]).
{[1,3,9],[5,7,2,5,9,1,6,0,0,3,5,6,2]}
```

```
-spec futam_maradek(P::pred(), L::[elem()]) ->
                                   {Fs::[elem()], Ms::[elem()]}.
% Fs =:= elso_futam(P, L) és Ms =:= maradek(P, L).
futam_maradek(_P, [X])          -> {[X], []};
futam_maradek(P, [X|Ys=[Y|_]]) ->
    case P(X, Y) of
        true  -> {Fs, Ms} = futam_maradek(P, Ys),
                 {[X|Fs], Ms};
        false -> {[X], Ys}
    end.
```


Futamok előállítása – hatékonyabb változat (2)

`futam.erl` – folytatás

```
-spec *futamok(Pred::pred(), Ls::[elem()]) -> Lss:[[elem()]].
```

```
naiv_futamok(_P, []) ->
  [];
naiv_futamok(P, Ls) ->
  Fs = elso_futam(P, Ls),
  Ms = maradek(P, Ls),
  [Fs|naiv_futamok(P, Ms)].
```

```
futamok(_P, []) ->
  [];
futamok(P, Ls) ->
  {Fs, Ms} = futam_maradek(P, Ls),
  [Fs|futamok(P, Ms)].
```

- Példa `futam_maradek` felhasználására: számtani sorozatok gyűjtése

```
10> futam:difek([1,3,5,7,7,5,3,1,1,1,1,2]).
[[1,3,5,7],[7,5,3,1],[1,1,1],[2]]
```

```
-spec difek(Xs::[number()]) -> Dss::[[number()]].
% Dss az Xs számtani sorozatot alkotó részlistáinak listája.
difek([X1,X2|_]=Xs) ->
    {Fs,Ms} = futam_maradek(fun(A, B) -> B-A =:= X2-X1 end, Xs),
    [Fs|difek(Ms)];
difek([_]=Xs) -> [Xs];
difek([]) -> [].
```


Tartalom

Prolog és Erlang: néhány eltérés

Prolog	**Erlang**
predikátum, kétféle érték	függvény, értéke tetszőleges típusú
siker esetén változóbehelyettesítés	csak bemenő argumentum és visszatérési érték van
választási pontok, több megoldás	determinizmus, egyetlen megoldás
$C_1, \ldots, C_n$ célsorozat, redukció + visszalépés	$S_1, \ldots, S_n$ szekvenciális kifejezés, értéke S_n
összetett kifejezés (struktúra), a lista is az	ennes és lista típus (tuple, list)
operátor definiálása	-
egyesítés szimmetrikus	jobb oldalon tömör kifejezés; bal oldalon mintakifejezés, őrkifejezéssel

Prolog és Erlang: néhány hasonlóság

- A függvény is klózokból áll, kiválasztás mintaillesztéssel, sorrendben
- A függvényt is a funktora (pl. `bevezeto:fac/1`) azonosítja
- Változóhoz csak egyszer köthető érték
- Lista szintaxisa (de: Erlangban önálló típus), sztring (füzér), atom

Tartalom

Lineáris rekurzív adatstruktúrák – Verem (Stack)

- Lista: rekurzív adatstruktúra: `-type list() = [] | [any()|list()].`
- Verem: ennessel valósítjuk meg, listával triviális lenne
- Műveletek: üres verem létrehozása, verem üres voltának vizsgálata, egy elem berakása, utoljára berakott elem leválasztása, utoljára berakott elem

`stack.erl`

```
-type stack() :: empty | {any(),stack()}.

    empty() -> empty.

    is_empty(empty) -> true;
    is_empty({_,_}) -> false.

    push(X, empty)      -> {X,empty};
    push(X, {_X,_S}=S) -> {X,S}.
    % {_X,_S}=S: réteges minta

    pop(empty) -> error;
    pop({_X,S}) -> S.

    top(empty) -> error;
    top({X,_S}) -> X.
```


Kis példák verem használatára

```
2> S1 = stack:push(1, stack:empty()).
{1,empty}
3> S2 = stack:push(2, S1).
{2,{1,empty}}
4> S3 = stack:push(3, S2).
{3,{2,{1,empty}}}
```

- Pl. megfordítunk egy listát; 1. lépés: verembe tesszük az elemeket

```
5> Stack = lists:foldl(fun stack:push/2, stack:empty(), "szoveg").
{103,{101,{118,{111,{122,{115,empty}}}}}}
```

- 2. lépés: a verem elemeit sorban kivesszük és listába fűzzük

`stack.erl` – folytatás

```
% to_list(S) az S verem elemeit tartalmazó lista LIFO sorrendben.
to_list(empty) -> [];
to_list({X,S}) -> [X|to_list(S)].
```

```
6> stack:to_list(Stack).
"gevozs"
```

Elágazó rekurzív adatstruktúrák – Bináris fa

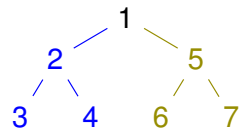
- Műveletek bináris fákon: fa létrehozása, mélysége, leveleinek száma

tree.erl

```
-type btree() :: leaf | {any(),btree(),btree()}.

empty() -> leaf.                % Üres fa.

node(V, Lt, Rt) -> {V,Lt,Rt}.   % Lt és Rt fák összekapcsolása
                                % egy új V értékű csomóponttal.

depth(leaf)      -> 0;          % Fa legnagyobb mélysége.
depth({_,Lt,Rt}) -> 1 + erlang:max(depth(Lt), depth(Rt)).

leaves(leaf)      -> 1;         % Fa leveleinek száma.
leaves({_,Lt,Rt}) -> leaves(Lt) + leaves(Rt).
```


Bináris fa (folyt.): listából fa, fából lista

```
L=empty(), T=node(1, node(2, node(3,L,L),
                             node(4,L,L)),
                     node(5, node(6,L,L),
                             node(7,L,L)))
```



T ↦ {1,{2,{3,leaf,leaf},{4,leaf,leaf}},{5,{6,leaf,leaf},{7,leaf,leaf}}}

tree.erl – folytatás

```
to_list_prefix(leaf)      -> [];
to_list_prefix({V,Lt,Rt}) ->
    [V] ++ to_list_prefix(Lt) ++ to_list_prefix(Rt).

to_list_infix(leaf)      -> [];
to_list_infix({V,Lt,Rt}) ->
    to_list_infix(Lt) ++ ([V] ++ to_list_infix(Rt)).

from_list([]) -> empty();
from_list(L)  -> {L1,[X|L2]} = lists:split(length(L) div 2, L),
                 node(X, from_list(L1), from_list(L2)).
```


Elágazó rekurzív adatstruktúrák – könyvtárszerkezet

Kiegészítő anyag

```
2> Home = {d,"home",                    %  home
           [{d,"kitti",                 %  home/kitti
             [{d,".firefox",[]},        %  home/kitti/.firefox
              {f,"dir.erl"},            %  home/kitti/dir.erl
              {f,"khf1.erl"},           %  home/kitti/khf1.pl
              {f,"khf1.pl"}]},          %  home/kitti/khf1.erl
            {d,"ludvig",[]}]}.          %  home/ludvig
```

dir.erl – Könyvtárszerkezet kezelése

```
-type tree()      :: file() | directory().
-type file()      :: {f, name()}.
-type directory() :: {d, name(), [tree()]}.
-type name()      :: string().

% Fa mérete (könyvtárak és fájlok számának összege).
count({f,_})   -> 1;
count({d,_,L}) -> 1 + lists:sum([count(I) || I <- L]).
```


Könyvtárszerkezet – folytatás

dir.erl – Könyvtárszerkezet kezelése (folytatás)

```
% -spec subtree(Path::[name()], Tree::tree())-> tree() | notfound.
% Tree fa Path útvonalon található részfája.
subtree([Name], {f,Name} = Tree)            -> Tree;
subtree([Name], {d,Name,_} = Tree)          -> Tree;
subtree([Name|[Sub|_]=SubPath], {d,Name,L}) ->
    case lists:keyfind(Sub, 2, L) of
        false   -> notfound;
        SubTree -> subtree(SubPath, SubTree)
    end;
subtree(_, _)                               -> notfound.
```

```
3> dir:subtree(string:tokens("home/kitti/.firefox", "/"), Home).
{d,".firefox",[]}
4> dir:subtree(string:tokens("home/kitti/firefox", "/"), Home).
notfound
```

V. rész

Haladó Prolog

- Az előző Prolog előadás-blokk (jegyzetbeli 3. fejezet) célja volt:
  - a Prolog nyelv alapjainak bemutatása,
  - a logikailag „tiszta” résznyelvre koncentrálva.
- A jelen előadás-blokk (jegyzetben a 4. fejezet) fő célja: olyan
  - beépített eljárások,
  - programozási technikák

  bemutatása, amelyekkel
  - hatékony Prolog programok készíthetők,
  - esetleg a tiszta logikán túlmutató eszközök alkalmazásával.

Haladó Prolog – tartalomjegyzék

Tartalom

A meta-logikai, azaz a logikán túlmutató eljárások fajtái:

- A Prolog kifejezések pillanatnyi behelyettesítettségi állapotát vizsgáló eljárások (értelemszerűen logikailag nem tiszták):
  - kifejezések osztályozása (1)

```
| ?- var(X) /* X változó? */, X = 1. ⟹   X = 1
| ?- X = 1, var(X). ⟹   no
```

  - kifejezések rendezése (4)

```
| ?- X @< 3 /* X megelőzi 3-t? */, X = 4. ⟹   X = 4
   % a változók megelőzik a nem változó kifejezéseket
| ?- X = 4, X @< 3. ⟹   no
```

- Prolog kifejezéseket szétszedő vagy összerakó eljárások:
  - (struktúra) kifejezés $\Longleftrightarrow$ név és argumentumok (2)

```
| ?- X = f(alma,körte), X =.. L ⟹   L = [f,alma,körte]
```

  - névkonstansok és számok $\Longleftrightarrow$ karaktereik (3)

```
| ?- atom_codes(A, [0'a,0'b,0'a]) ⟹   A = aba
```


Meta-predikátumok – motiváló példa

- Formula (`Form`): az 'x' atom; szám; `Form1 + Form2`; `Form1 * Form2`
- Számoljuk ki egy formula értékét egy adott `x` behelyettesítés mellett!

```
% value_of(+Form, +XE, ?E): az x=XE helyettesítéssel Form értéke E.
value_of0(x, X, V) :- V = X.
value_of0(N, _, V) :-
    number(N), V = N.

value_of0(P1+P2, X, V) :-
    value_of0(P1, X, V1),
    value_of0(P2, X, V2),
    V is V1+V2.
value_of0(Frm, X, V) :-
    Frm = *(P1,P2),
    value_of0(P1, X, V1),
    value_of0(P2, X, V2),
    FrmV = *(V1,V2),
    V is FrmV.
```

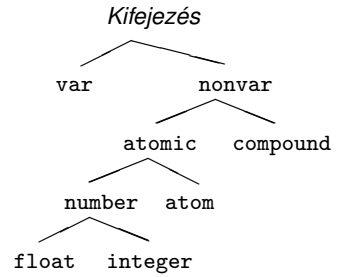
```
value_of(x, X, V) :- V = X.
value_of(N, _, V) :-
    number(N), V = N.

value_of(Frm, X, V) :-
    Frm =.. [Func,P1,P2],
    value_of(P1, X, V1),
    value_of(P2, X, V2),
    FrmV =.. [Func,V1,V2],
    V is FrmV.
```

```
| ?- value_of((x+1)*3-(x-1), 1, V).   ⟹   V = 6 ? ; no
% Nem kellene a zárójeles (kif) feldolgozásával foglalkozni?
| ?- value_of(exp(100,min(x,1/x)), 2, V).   ⟹   V = 10.0 ? ; no
```

- `value_of/3` minden az `is/2` által elfogadott bináris függvényre működik!

Kifejezések osztályozása

- Kifejezésfajták – osztályozó beépített eljárások (ismétlés)



`var(X)`	`X` változó
`nonvar(X)`	`X` nem változó
`atomic(X)`	`X` konstans
`compound(X)`	`X` struktúra
`atom(X)`	`X` atom
`number(X)`	`X` szám
`integer(X)`	`X` egész szám
`float(X)`	`X` lebegőpontos szám

- SICStus-specifikus osztályozó eljárások:
  - `simple(X)`: `X` nem összetett (konstans vagy változó);
  - `callable(X)`: `X` atom vagy struktúra (nem szám és nem változó);
  - `ground(X)`: `X` tömör, azaz nem tartalmaz behelyettesítetlen változót.
- Az osztályozó eljárások használata – példák
  - `var`, `nonvar` – többirányú eljárásokban elágaztatásra
  - `number`, `atom`, ... – nem-megkülönböztetett uniók feldolgozása (pl. szimbolikus deriválás)

Struktúrák szétszedése és összerakása: az *univ* eljárás

- Az *univ* eljárás hívási mintái: `+Kif =..  ?Lista`
  `-Kif =..  +Lista`
- Az eljárás jelentése:
  - `Kif` = $Fun(A_1, \ldots, A_n)$ és `Lista` = $[Fun, A_1, \ldots, A_n]$, ahol Fun egy névkonstans és $A_1, \ldots, A_n$ tetszőleges kifejezések; vagy
  - `Kif` = C és `Lista` = $[C]$, ahol C egy konstans.
- Példák

```
| ?- el(a,b,10) =.. L.      ⟹   L = [el,a,b,10]
| ?- Kif =.. [el,a,b,10].   ⟹   Kif = el(a,b,10)
| ?- alma =.. L.            ⟹   L = [alma]
| ?- Kif =.. [1234].        ⟹   Kif = 1234
| ?- Kif =.. L.             ⟹   hiba
| ?- f(a,g(10,20)) =.. L.   ⟹   L = [f,a,g(10,20)]
| ?- Kif =.. [/,X,2+X].     ⟹   Kif = X/(2+X)
| ?- [a,b,c] =.. L.         ⟹   L = ['.',a,[b,c]]
```

Bev. példa – Adott értékű kifejezések előállítása

- Adott számokból megadott műveletek (pl. +, -, *, /) segítségével építsünk egy megadott értékű aritmetikai kifejezést!
  (Feltételezhető, hogy az adott számok mind különböznek.)
  - A számok nem „tapaszthatók” össze hosszabb számokká
  - Mindegyik adott számot pontosan egyszer kell felhasználni, sorrendjük tetszőleges lehet
  - Nem minden alapműveletet kell felhasználni, egyfajta alapművelet többször is előfordulhat
  - Zárójelek tetszőlegesen használhatók
- Példák a fenti szabályoknak megfelelő, az 1, 3, 4, 6 számokból felépített aritmetikai kifejezésekre: $1 + 6 * (3 + 4)$, $(1 + 3)/4 + 6$
- Viszonylag nehéz megtalálni egy olyan aritmetikai kifejezést, amely az 1, 3, 4, 6 számokból áll, a négy alapműveletet használja és értéke 24

Adott értékű kifejezések előállítása – megoldás univ-val

Írjunk egy eljárást az alábbi fejkommentnek megfelelően:

```
% kif(+L, +MuvL, +Ertek, ?Kif): Kif egy olyan kifejezés, amely az L számlista
% elemeiből a MuvL listabeli műveletekkel épül fel, és amelynek értéke Ertek.
kif(L, MuvL, Ertek, Kif) :-
        permutation(L, PL),
        levelek_muv_kif(PL, MuvL, Kif),
        catch(Kif =:= Ertek, _, fail).          % A 0-val való osztás kivédése

% A catch(+Cél,?Kiv,+KCél) beép. elj.: lefuttatja a Cél hívást. Ha a futás
% kivételt dob, akkor Kiv-et egyesíti ezzel a kivétellel, és KCél-t futtatja.

% levelek_muv_kif(+L, +MuvL, ?Kif): A MuvL listabeli műveletekkel felépített
%  Kif kifejezés leveleiben levő számok listája L.
levelek_muv_kif(L, _MuvL, Kif) :-
        L = [Kif], number(Kif).
levelek_muv_kif(L, MuvL, Kif) :-
        append(L1, L2, L), L1 \= [], L2 \= [],
        levelek_muv_kif(L1, MuvL, K1),
        levelek_muv_kif(L2, MuvL, K2),
        member(M, MuvL),
        Kif =.. [M,K1,K2].
```


Struktúrák szétszedése és összerakása: a `functor` eljárás

- `functor/3`: kifejezés funktorának, adott funktorú kifejezésnek az előállítása
  - Hívási minták: `functor(-Kif, +Név, +Argszám)`
    `functor(+Kif, ?Név, ?Argszám)`
  - Jelentése: `Kif` egy `Név/Argszám` funktorú kifejezés.
    - A konstansok 0-argumentumú kifejezésnek számítanak.
    - Ha `Kif` kimenő, az adott funktorú legáltalánosabb kifejezéssel egyesíti (argumentumaiban csupa különböző változóval).
- Példák:

```
| ?- functor(el(a,b,1), F, N).      ⟹   F = el, N = 3
| ?- functor(E, el, 3).             ⟹   E = el(_A,_B,_C)
| ?- functor(alma, F, N).           ⟹   F = alma, N = 0
| ?- functor(Kif, 122, 0).          ⟹   Kif = 122
| ?- functor(Kif, el, N).           ⟹   hiba
| ?- functor(Kif, 122, 1).          ⟹   hiba
| ?- functor([1,2,3], F, N).       ⟹   F = '.', N = 2
| ?- functor(Kif, ., 2).            ⟹   Kif = [_A|_B]
```


Struktúrák szétszedése és összerakása: az `arg` eljárás

- `arg/3`: kifejezés adott sorszámú argumentuma.
  - Hívási minta: `arg(+Sorszám, +StrKif, ?Arg)`
  - Jelentése: A `StrKif` struktúra `Sorszám`-adik argumentuma `Arg`.
  - Végrehajtása: `Arg`-ot az adott sorszámú argumentummal **egyesíti**.
  - Az `arg/3` eljárás így nem csak egy argumentum elővételére, hanem a struktúra változó-argumentumának behelyettesítésére is használható (ld. a 2. példát alább).
- Példák:

```
| ?- arg(3, el(a, b, 23), Arg).    ⟹   Arg = 23
| ?- K=el(_,_,_), arg(1, K, a),
     arg(2, K, b), arg(3, K, 23).  ⟹   K = el(a,b,23)
| ?- arg(1, [1,2,3], A).           ⟹   A = 1
| ?- arg(2, [1,2,3], B).           ⟹   B = [2,3]
```

- Az *univ* visszavezethető a `functor` és `arg` eljárásokra (és viszont), például:

```
Kif =.. [F,A1,A2]   ⟺   functor(Kif, F, 2),
                        arg(1, Kif, A1), arg(2, Kif, A2)
```

`functor/3` és `arg/3` alkalmazása: részkifejezések keresése

- A feladat: egy tetszőleges kifejezéshez soroljuk fel a benne levő számokat, és minden szám esetén adjuk meg annak a *kiválasztóját*!
- Egy részkifejezés kiválasztója egy olyan lista, amely megadja, mely argumentumpozíciók mentén juthatunk el hozzá.
- Az $[i_1, i_2, \ldots, i_k]$ $k \geq 0$ lista egy `Kif`-ből az i_1-edik argumentum i_2-edik argumentumának, ... i_k-adik argumentumát választja ki.
  (Az `[]` kiválasztó `Kif`-ből `Kif`-et választja ki.)
- Pl. `a*b+f(5,8,7)/c`-ben `b` kiválasztója `[1,2]`, `7` kiválasztója `[2,1,3]`.

```
% kif_szám(?Kif, ?N, ?Kiv): Kif Kiv kiválasztójú része az N szám.
kif_szám(X, X, []) :-
        number(X).
kif_szám(X, N, [I|Kiv]) :-
        compound(X), % a var(X) eset kizárása miatt fontos!
        functor(X, _F, ArgNo), between(1, ArgNo, I), arg(I, X, X1),
        kif_szám(X1, N, Kiv).
```

```
| ?- kif_szám(f(1,[b,2]), N, K). ⟹   K = [1], N = 1 ? ;
                                     K = [2,2,1], N = 2 ? ; no
```


Atomok szétszedése és összerakása

- `atom_codes/2`: névkonstans és karakterkód-lista közötti átalakítás
  - Hívási minták: `atom_codes(+Atom, ?KódLista)`
    `atom_codes(-Atom, +KódLista)`
  - Jelentése: `Atom` karakterkódjainak a listája `KódLista`.
  - Végrehajtása:
    - Ha `Atom` adott (bemenő), és a $c_1 c_2 ... c_n$ karakterekből áll, akkor `KódLista`-t egyesíti a $[k_1, k_2, ..., k_n]$ listával, ahol k_i a c_i karakter kódja.
    - Ha `KódLista` egy adott karakterkód-lista, akkor ezekből a karakterekből összerak egy névkonstanst, és azt egyesíti `Atom`-mal.
- Példák:

```
| ?- atom_codes(ab, Cs).            ⟹   Cs = [97,98]
| ?- atom_codes(ab, [0'a|L]).       ⟹   L = [98]
| ?- Cs="bc", atom_codes(Atom, Cs). ⟹   Cs = [98,99], Atom = bc
| ?- atom_codes(Atom, [0'a|L]).     ⟹   hiba
```


Atomok szétszedése és összerakása – példák

- Keresés névkonstansokban

```
% Atom-ban a Rész nem üres részatom kétszer ismétlődik.
dadogó_rész(Atom, Rész) :-
    atom_codes(Atom, Cs),
    Ds = [_|_],
    append([_,Ds,Ds,_], Cs), % append/2, lásd library(lists)
    atom_codes(Rész, Ds).
```

```
| ?- dadogó_rész(babaruhaha, R).   ⟹   R = ba ? ; R = ha ? ; no
```

- Atomok összefűzése

```
% atom_concat(+A, +B, ?C): A és B névkonstansok összefűzése C.
% (Szabványos beépített eljárás atom_concat(?A, ?B, +C) módban is.)
atom_concat(A, B, C) :-
    atom_codes(A, Ak), atom_codes(B, Bk),
    append(Ak, Bk, Ck),
    atom_codes(C, Ck).
```

```
| ?- atom_concat(abra, kadabra, A). ⟹   A = abrakadabra ?
```


Számok szétszedése és összerakása

- `number_codes/2`: szám és karakterkód-lista közötti átalakítás
  - Hívási minták: `number_codes(+Szám, ?KódLista)`
    `number_codes(-Szám, +KódLista)`
  - Jelentése: Igaz, ha `Szám` tizes számrendszerbeli alakja a `KódLista` karakterkód-listának felel meg.
  - Végrehajtása:
    - Ha `Szám` adott (bemenő), és a $c_1 c_2 ... c_n$ karakterekből áll, akkor `KódLista`-t egyesíti a $[k_1, k_2, ..., k_n]$ kifejezéssel, ahol k_i a c_i karakter kódja.
    - Ha `KódLista` egy adott karakterkód-lista, akkor ezekből a karakterekből összerak egy számot (ha nem lehet, hibát jelez), és azt egyesíti `Szám`-mal.
- Példák:

```
| ?- number_codes(12, Cs).            ⟹   Cs = [49,50]
| ?- number_codes(0123, [0'1|L]).     ⟹   L = [50,51]
| ?- number_codes(N, " - 12.0e1").    ⟹   N = -120.0
| ?- number_codes(N, "12e1").         ⟹   hiba (nincs .0)
| ?- number_codes(120.0, "12e1").     ⟹   no (mert a szám adott! :-)
```

Kifejezések rendezése: szabványos sorrend

- A Prolog szabvány definiálja két tetszőleges Prolog kifejezés sorrendjét.
- Jelölés: $X \prec Y$ – az X kifejezés megelőzi az Y kifejezést.
- A szabványos sorrend definíciója:
  1. X és Y azonos $\Leftrightarrow X \not\prec Y$ és $Y \not\prec X$ egyike sem igaz.
  2. Ha X és Y különböző osztályba tartozik, akkor az osztály dönt: *változó* $\prec$ *lebegőpontos szám* $\prec$ *egész szám* $\prec$ *név* $\prec$ *struktúra*.
  3. Ha X és Y változó, akkor sorrendjük rendszerfüggő.
  4. Ha X és Y lebegőpontos vagy egész szám, akkor $X \prec Y \Leftrightarrow X < Y$.
  5. Ha X és Y név, akkor a lexikografikus (abc) sorrend dönt.
  6. Ha X és Y struktúrák:
     1. Ha X és Y aritása ($\equiv$ argumentumszáma) különböző, akkor $X \prec Y \Leftrightarrow X$ aritása kisebb mint Y aritása.
     2. Egyébként, ha a struktúrák neve különböző, akkor $X \prec Y \Leftrightarrow X$ neve $\prec Y$ neve.
     3. Egyébként (azonos név, azonos aritás) balról az első nem azonos argumentum dönt.
- (A SICStus Prologban kiterjesztésként megengedett végtelen (ciklikus) kifejezésekre a fenti rendezés nem érvényes.)

Kifejezések összehasonlítása – beépített eljárások

- Két tetszőleges kifejezés összehasonlítását végző eljárások:

hívás	igaz, ha
`Kif1 == Kif2`	$\texttt{Kif1} \not\prec \texttt{Kif2} \wedge \texttt{Kif2} \not\prec \texttt{Kif1}$
`Kif1 \== Kif2`	$\texttt{Kif1} \prec \texttt{Kif2} \vee \texttt{Kif2} \prec \texttt{Kif1}$
`Kif1 @< Kif2`	$\texttt{Kif1} \prec \texttt{Kif2}$
`Kif1 @=< Kif2`	$\texttt{Kif2} \not\prec \texttt{Kif1}$
`Kif1 @> Kif2`	$\texttt{Kif2} \prec \texttt{Kif1}$
`Kif1 @>= Kif2`	$\texttt{Kif1} \not\prec \texttt{Kif2}$

- Az összehasonlítás mindig a belső ábrázolás (kanonikus alak) szerint történik:
  `| ?- [1, 2, 3, 4] @< struktúra(1, 2, 3).` $\Longrightarrow$ **sikerül (6.1 szabály)**
- Lista rendezése: `sort(+L, ?S)`
  - Jelentése: az `L` lista `@<` szerinti rendezése `S`, `==/2` szerint azonos elemek ismétlődését kiszűrve.

```
| ?- sort([a,c,a,b,b,c,c,e,b,d], S).
S = [a,b,c,d,e] ? ;
no
```


Összefoglalás: a Prolog egyenlőség-szerű beépített eljárásai

- `U = V`: U egyesítendő V-vel. Soha sem jelez hibát.

```
| ?- X = 1+2.      ⟹  X = 1+2
| ?- 3 = 1+2.      ⟹  no
```

- `U == V`: U azonos V-vel. Soha sem jelez hibát és soha sem helyettesít be.

```
| ?- X == 1+2.     ⟹  no
| ?- 3 == 1+2.     ⟹  no
| ?- +(1,2)==1+2   ⟹  yes
```

- `U =:= V`: Az U és V aritmetikai kifejezések értéke megegyezik. Hibát jelez, ha U vagy V nem (tömör) aritmetikai kifejezés.

```
| ?- X =:= 1+2.    ⟹  hiba
| ?- 1+2 =:= X.    ⟹  hiba
| ?- 2+1 =:= 1+2.  ⟹  yes
| ?- 2.0 =:= 1+1.  ⟹  yes
```

- `U is V`: U egyesítendő a V aritmetikai kifejezés értékével. Hiba, ha V nem (tömör) aritmetikai kifejezés.

```
| ?- 2.0 is 1+1.   ⟹  no
| ?- X is 1+2.     ⟹  X = 3
| ?- 1+2 is X.     ⟹  hiba
| ?- 3 is 1+2.     ⟹  yes
| ?- 1+2 is 1+2.   ⟹  no
```

- (`U =.. V`: U „szétszedettje” a V lista)

```
| ?- 1+2 =.. X.    ⟹  X = [+,1,2]
| ?- X =.. [f,1].  ⟹  X = f(1)
```


Összefoglalás: a Prolog nem-egyenlő jellegű beépített eljárásai

A nem-egyenlőség jellegű eljárások soha sem helyettesítenek be változót!

- `U \= V`: U nem egyesíthető V-vel. Soha sem jelez hibát.

```
| ?- X \= 1+2.      ⟹  no
| ?- +(1,2) \= 1+2. ⟹  no
```

- `U \== V`: U nem azonos V-vel. Soha sem jelez hibát.

```
| ?- X \== 1+2.     ⟹  yes
| ?- 3 \== 1+2.     ⟹  yes
| ?- +(1,2)\==1+2   ⟹  no
```

- `U =\= V`: Az U és V aritmetikai kifejezések értéke különbözik. Hibát jelez, ha U vagy V nem (tömör) aritmetikai kifejezés.

```
| ?- X =\= 1+2.     ⟹  hiba
| ?- 1+2 =\= X.     ⟹  hiba
| ?- 2+1 =\= 1+2.   ⟹  no
| ?- 2.0 =\= 1+1.   ⟹  no
```

A Prolog (nem-)egyenlőség jellegű beépített eljárásai – példák

		Egyesítés		*Azonosság*		*Aritmetika*		
U	*V*	*U* = *V*	*U* \= *V*	*U* == *V*	*U* \== *V*	*U* =:= *V*	*U* =\= *V*	*U* is *V*
1	2	*no*	yes	*no*	yes	*no*	yes	*no*
a	b	*no*	yes	*no*	yes	error	error	error
1+2	+(1,2)	yes	*no*	yes	*no*	yes	*no*	*no*
1+2	2+1	*no*	yes	*no*	yes	yes	*no*	*no*
1+2	3	*no*	yes	*no*	yes	yes	*no*	*no*
3	1+2	*no*	yes	*no*	yes	yes	*no*	yes
X	1+2	X=1+2	*no*	*no*	yes	error	error	X=3
X	Y	X=Y	*no*	*no*	yes	error	error	error
X	X	yes	*no*	yes	*no*	error	error	error

Jelmagyarázat: `yes` – siker; *no* – meghiúsulás, error – hiba.

Tartalom

Keresési feladat Prologban – felsorolás vagy gyűjtés?

- Keresési feladat: adott feltételeknek megfelelő dolgok meghatározása.
- Prolog nyelven egy ilyen feladat alapvetően kétféle módon oldható meg:
  - gyűjtés – az összes megoldás összegyűjtése, pl. egy listába;
  - felsorolás – a megoldások visszalépéses felsorolása: egyszerre egy megoldást kapunk, de visszalépéssel sorra előáll minden megoldás.
- Egyszerű példa: egy lista páros elemeinek megkeresése:

% Gyűjtés:

```
% páros_elemei(L, Pk): Pk az L
% lista páros elemeinek listája.
páros_elemei([], []).
páros_elemei([X|L], Pk) :-
    X mod 2 =\= 0,
    páros_elemei(L, Pk).
páros_elemei([P|L], [P|Pk]) :-
    P mod 2 =:= 0,
    páros_elemei(L, Pk).
```

% Felsorolás:

```
% páros_eleme(L, P): P egy páros
% eleme az L listának.
páros_eleme([X|L], P) :-
    X mod 2 =:= 0, P = X.
páros_eleme([_X|L], P) :-
    % _X akár páros, akár páratlan
    % folytatjuk a felsorolást:
    páros_eleme(L, P).

% egyszerűbb megoldás:
páros_eleme2(L, P) :-
    member(P, L), P mod 2 =:= 0.
```


Gyűjtés és felsorolás kapcsolata

- Ha adott `páros_elemei`, hogyan definiálható `páros_eleme`?
  - A `member/2` könyvtári eljárás segítségével, pl.

```
páros_eleme(L, P) :-
    páros_elemei(L, Pk), member(P, Pk).
```

  - Természetesen ez így nem hatékony!
- Ha adott `páros_eleme`, hogyan definiálható `páros_elemei`?
  - Megoldásgyűjtő beépített eljárás segítségével, pl.

```
páros_elemei(L, Pk) :-
    findall(P, páros_eleme(L, P), Pk).
    % páros_eleme(L, P) összes P megoldásának listája Pk.
```

  - a `findall/3` beépített eljárás – és társai – az Erlang listanézetéhez hasonlóak, pl.:

```
% seq(+A, +B, ?L): L = [A,...,B], A és B egészek.
seq(A, B, L) :-
    B >= A-1,
    findall(X, between(A, B, X), L).
```

A `findall(?Gyűjtő, :Cél, ?Lista)` beépített eljárás

- Az eljárás végrehajtása (procedurális szemantikája):
  - a `Cél` kifejezést eljáráshívásként értelmezi, meghívja (A `:Cél` annotáció meta- (azaz eljárás) argumentumot jelez);
  - minden egyes megoldásához előállítja `Gyűjtő` egy *másolatát*, azaz a változókat, ha vannak, szisztematikusan újakkal helyettesíti;
  - Az összes `Gyűjtő` másolat listáját egyesíti `Lista`-val.
- Példák az eljárás használatára:

```
| ?- findall(X, (member(X, [1,7,8,3,2,4]), X>3), L).
                ⟹     L = [7,8,4] ? ; no
| ?- findall(Y, member(X-Y, [a-c,a-b,b-c,c-e,b-d]), L).
                ⟹    L = [c,b,c,e,d] ? ; no
```

- Az eljárás jelentése (deklaratív szemantikája):
  `Lista` = { `Gyűjtő` másolat | (∃ `X...Z`)`Cél` igaz }
  ahol `X`, ..., `Z` a `findall` hívásban levő *szabad változók*.

  Szabad változó (definíció): olyan, a hívás pillanatában behelyettesítetlen változó, amely a `Cél`-ban előfordul de a `Gyűjtő`-ben nem.

A `bagof(?Gyűjtő, :Cél, ?Lista)` beépített eljárás

- Példa az eljárás használatára:

```
gráf([a-c,a-b,b-c,c-e,b-d]).

| ?- gráf(_G), findall(B, member(A-B, _G), VegP).      % ld. előző dia
                          ⟹    VegP = [c,b,c,e,d] ? ; no
| ?- gráf(_G), bagof(B, member(A-B, _G), VegPk).
                          ⟹    A = a, VegPk = [c,b] ? ;
                          ⟹    A = b, VegPk = [c,d] ? ;
                          ⟹    A = c, VegPk = [e] ? ; no
```

- Az eljárás végrehajtása (procedurális szemantikája):
  - a `Cél` kifejezést eljáráshívásként értelmezi, meghívja;
  - összegyűjti a megoldásait (a `Gyűjtő`-t és a szabad változók behelyettesítéseit);
  - a szabad változók összes behelyettesítését *felsorolja* és mindegyik esetén a `Lista`-ban megadja az összes hozzá tartozó `Gyűjtő` értéket.
- A `bagof` eljárás jelentése (deklaratív szemantikája):
  `Lista` = { `Gyűjtő` | `Cél` igaz }, `Lista` ≠ `[]`.

A `bagof` megoldásgyűjtő eljárás (folyt.)

- Explicit egzisztenciális kvantorok
  - `bagof(Gyűjtő, V1 ^ ...^ Vn ^ Cél, Lista)` alakú hívása a `V1, ..., Vn` változókat egzisztenciálisan kvantáltnak tekinti, így ezeket nem sorolja fel.
  - jelentése: `Lista` = { `Gyűjtő` | (∃ `V1, ..., Vn`)`Cél` igaz } ≠ `[]`.

```
| ?- gráf(_G), bagof(B, A^member(A-B, _G), VegP).
                          ⟹    VegP = [c,b,c,e,d] ? ; no
```

- Egymásba ágyazott gyűjtések
  - szabad változók esetén a `bagof` nemdeterminisztikus lehet, így érdemes lehet skatulyázni:

```
% A G irányított gráf fokszámlistája FL:
% FL = { A-N | N = |{ V | A-V ∈ G }|, N > 0 }
fokszámai(G, FL) :-
    bagof(A-N, Vk^(bagof(V, member(A-V, G), Vk),
                   length(Vk, N)                ), FL).

| ?- gráf(_G), fokszámai(_G, FL).
              ⟹    FL = [a-2,b-2,c-1] ? ; no
```


A `bagof` megoldásgyűjtő eljárás (folyt.)

- Fokszámlista kicsit hatékonyabb előállítása
  - Az előző példában a meta-argumentumban célsorozat szerepelt, ez mindenképpen interpretáltan fut – nevezzük el segédeljárásként
  - A segédeljárás bevezetésével a kvantor is szükségtelenné válik:

```
% pont_foka(?A, +G, ?N): Az A pont foka a G irányított gráfban N, N>0.
pont_foka(A, G, N) :-
        bagof(V, member(A-V, G), Vk), length(Vk, N).

% A G irányított gráf fokszámlistája FL:
fokszámai(G, FL) :-    bagof(A-N, pont_foka(A, G, N), FL).
```

- Példák a `bagof/3` és `findall/3` közötti kisebb különbségekre:

```
| ?- findall(X, (between(1, 5, X), X<0), L). ⟹   L = [] ? ; no
| ?-   bagof(X, (between(1, 5, X), X<0), L). ⟹   no
| ?- findall(S, member(S, [f(X,X),g(X,Y)]), L).
                          ⟹   L = [f(_A,_A),g(_B,_C)] ? ; no
| ?-   bagof(S, member(S, [f(X,X),g(X,Y)]), L).
                          ⟹   L = [f(X,X),g(X,Y)] ? ; no
```

- A `bagof/3` logikailag tisztább mint a `findall/3`, de időigényesebb!

A `setof(?Gyűjtő, :Cél, ?Lista)` beépített eljárás

- az eljárás végrehajtása:
  - ugyanaz mint: `bagof(Gyűjtő, Cél, L0), sort(L0, Lista),`
  - itt `sort/2` egy univerzális rendező eljárás, amely az `L0` listát `@<` szerint rendezi, az ismétlődések kiszűrésével, és az eredményt `Lista`-ban adja vissza.
- Példa a `setof/3` eljárás használatára:

```
gráf([a-c,a-b,b-c,c-e,b-d]).

% Gráf egy pontja P.
pontja(P, Gráf) :- member(A-B, Gráf), ( P = A ; P = B).

% A G gráf pontjainak listája Pk.
gráf_pontjai(G, Pk) :- setof(P, pontja(P, G), Pk).

| ?- gráf(_G), gráf_pontjai(_G, Pk).
⟹   Pk = [a,b,c,d,e] ? ; no
| ?- gráf(_G), bagof(P, pontja(P, _G), Pk).
⟹   Pk = [a,c,a,b,b,c,c,e,b,d] ? ; no
```


Tartalom

Nyelvi eszközök a keresési tér szűkítésére

- Az első Prolog rendszerektől kezdve: vágó, szabványos jelölése `!`
- Későbbi kiterjesztés: az `( if -> then ; else )` feltételes szerk.
- Feltételes szerkezet – procedurális szemantika (ismétlés)
  A `(felt->akkor;egyébként),folyt` célsorozat végrehajtása:
  - Végrehajtjuk a `felt` hívást (egy önálló végrehajtási környezetben).
  - Ha `felt` sikeres ⟹ „`akkor,folyt`” célsorozattal folytatjuk, a `felt` első megoldása által eredményezett behelyettesítésekkel.
    A `felt` cél többi megoldását nem keressük meg!
  - Ha `felt` meghiúsul ⟹ „`egyébként,folyt`” célsorozattal folytatjuk.
- A vágó beépített eljárás – procedurális szemantika (ismétlés)
  - mindig sikerül; de mellékhatásként megszünteti a választási pontokat egészen a szülő célig, azt is beleértve. (Egy *C* cél szülője az a cél, amelyet, a *C*-t tartalmazó klóz fejével illesztettünk.)
- A vágó szemléltetése a 4-kapus doboz modellben: a vágó `Fail` kapujából a körülvevő (szülő) doboz `Fail` kapujára megyünk.

Példa: `első_poz_elem(+L, ?P)`: `P` az `L` lista első pozitív eleme

- Rekurzív megoldás (mérnöki)

```
első_poz_elem1([X|L], EP) :- (   X > 0 -> EP = X
                              ;   első_poz_elem1(L, EP)
                              ).
```

- Visszalépéses keresés (matematikusi), nem hatékony

```
első_poz_elem2(L, EP) :-
    append(NemPozL, [EP|_], L), EP > 0,
    \+ van_poz_eleme(NemPozL).

van_poz_eleme(L) :-
    member(P, L),
    P > 0.
```

- Választás a feltételben (Prolog hekker)

```
első_poz_elem3(L, EP) :-
    (   member(EP, L), EP > 0 -> true   ).
```

  Az eljárás `(+,+)` módban hibás: `első_poz_elem3([1,2], 2)` ⟹ `yes`
  `(+,+)` módban a fenti kód jelentése: `P` az `L` lista egyik pozitív eleme.
- Kimenő paramétér értékadásának késleltetése (Prolog hekker)

```
első_poz_elem4(L, EP) :-
    (   member(X, L), X > 0 -> EP = X   ).   % (+,+) módban is jó!
```

A 3.–4, megoldás épít a `member/2` felsorolási sorrendjére!

Vágót használó megoldások a példafeladatra

- A vágó beépített eljárás (`!`) kétféle hatása:
  1. letiltja az adott predikátum további klózainak választását
     ```
     első_poz_elem5([X|_], X) :- X > 0, !.
     első_poz_elem5([X|L], EP) :- X =< 0, első_poz_elem5(L, EP).
     ```
  2. megszünteti a választási pontokat az előtte levő eljáráshívásokban.
     ```
     első_poz_elem6(L, EP) :-  member(EP, L), EP > 0, !.
     ```
- Miért vágunk le ágakat a keresési térben?
  - Mi tudjuk, hogy nincs megoldás, de a Prolog nem – zöld vágó
    - (Például, a legtöbb Prolog megvalósítás „nem tudja”, hogy a $X > 0$ és $X \leq 0$ feltételek kizárják egymást.)
  - Eldobunk megoldásokat – vörös vágó, ez a program jelentését megváltoztatja
- Célszerű lehet hatékonysági okból elhagyni a fenti `X =< 0` feltételt:
  ```
  első_poz_elem7([X|_], X) :- X > 0, !.
  első_poz_elem7([X|L], EP) :- első_poz_elem7(L, EP).
  ```
- Milyen színűek a fenti vágók?
  Mi a válasz az `első_poz_elem...([1,2], 2)` alakú hívásokra?

További példák a vágó eljárás használatára

Milyen színűek az alábbi vágók?

```
% fakt(+N, ?F): N! = F.
fakt(0, 1) :- !.                                          zöld
fakt(N, F) :- N > 0, N1 is N-1, fakt(N1, F1), F is N*F1.

% last(+L, ?E): L utolsó eleme E.
last([E], E) :- !.                                        zöld
last([_|L], Last) :- last(L, Last).

% pozitívak(+L, -P): P az L pozitív elemeiből áll.
pozitívak([], []).
pozitívak([E|Ek], [E|Pk]) :-
       E > 0, !,                                          vörös
.      pozitívak(Ek, Pk).
pozitívak([_E|Ek], Pk) :-
       /* \+ _E > 0, */ pozitívak(Ek, Pk).               Ha nincs kikommentezve
                                                          akkor zöld
```

Figyelem: a fenti példák nem tökéletesek, hatékonyabb és/vagy általánosabban használható változatukat később ismertetjük!

A vágás alapszabálya

- Ha a vágó zöld, nincs gond a jelentéssel, de ez többnyire ismételt/felesleges vizsgálatokkal jár
- Ha a vágó vörös, attól a program működhet helyesen is
- Miért nem működik helyesen az `?- első_poz_elem7([1,2], 2)` hívás?
  ```
  első_poz_elem7([X|_], X) :- X > 0, !.                   (1)
  első_poz_elem7([X|L], EP) :- első_poz_elem7(L, EP).
  ```
  A fejillesztés `(1)`-gyel nem sikerül! `(1)` ekvivalens átírása:
  ```
  első_poz_elem7([X|_], EP) :- EP = X, X > 0, !.          (2)
  ```
  Az `EP = X` vizsgálat nem feltétele a vágásnak, a vágás utánra való!
- A megoldás a **vágás alapszabálya**:
  A kimenő paraméterek értékadását mindig a vágó után végezzük!
  ```
  első_poz_elem8([X|_], EP) :- X > 0, !, EP = X.
  első_poz_elem8([X|L], EP) :- első_poz_elem8(L, EP).
  ```
- Ez nemcsak általánosabban használható, hanem hatékonyabb kódot is ad: csak akkor helyettesíti be a kimenő paramétert, ha már tudja, hogy pozitív (nincs „előre-behelyettesítés”, mint `(1)`-ben és `(2)`-ben
- Az alapszabály betartásakor az indexelés is hatékonyabb lesz

A korábbi példáknak a vágás alapszabályát betartó változata

```
% fakt(+N, ?F): N! = F.
fakt(0, F) :- !, F = 1.
fakt(N, F) :- N > 0, N1 is N-1, fakt(N1, F1), F is N*F1.

% last(+L, ?E): az L nem üres lista utolsó eleme E.
last([E], Last)    :- !, Last = E.
last([_|L], Last)  :- last(L, Last).

% pozitívak(+L, ?Pk): Pk az L pozitív elemeiből áll.
pozitívak([], []).
pozitívak([E|Ek], Pk) :-
        E > 0, !, Pk = [E|Pk0], pozitívak(Ek, Pk0).
pozitívak([_E|Ek], Pk) :-
        /* \+ _E > 0, */ pozitívak(Ek, Pk).
```

- A vágó helyett **a diszjunktív feltételes szerkezet használatát javasoljuk**. (Az `első_poz_elem8` és `első_poz_elem1` eljárásokból ugyanaz a kód generálódik!)
- Feltételes szerkezet használatakor is fontos, hogy a kimenő paraméterek ne szerepeljenek a feltételben (vö. `első_poz_elem3` és `első_poz_elem4`)

Példa: `max(X, Y, Z)`: `X` és `Y` maximuma `Z` (kiegészítő anyag)

- 1. változat, tiszta Prolog. Lassú (előre-behelyettesítés, két hasonlítás), választási pontot hagy.

```
max(X, Y, X) :- X >= Y.
max(X, Y, Y) :- Y > X.
```

- 2. változat, zöld vágóval. Lassú (előre-behelyettesítés, két hasonlítás), nem hagy választási pontot.

```
max(X, Y, X) :- X >= Y, !.
max(X, Y, Y) :- Y > X.
```

- 3. változat, vörös vágóval. Gyorsabb (előre-behelyettesítés, egy hasonlítás), nem hagy választási pontot, de nem használható ellenőrzésre, pl. `| ?- max(10, 1, 1)` sikerül.

```
max(X, Y, X) :- X >= Y, !.
max(X, Y, Y).
```

- 4. változat, vörös vágóval. Helyes, nagyon gyors (egy hasonlítás, nincs előre-behelyettesítés) és nem is hoz létre választási pontot.

```
max(X, Y, Z) :- X >= Y, !, Z = X.
max(X, Y, Y) /* :- Y > X */.
```


Tartalom

Determinizmus

- Egy hívás determinisztikus, ha (legfeljebb) egyféleképpen sikerülhet.
- Egy eljáráshívás egy sikeres végrehajtása determinisztikusan futott le, ha nem hagyott választási pontot a híváshoz tartozó részfában:
  - vagy választásmentesen futott le, azaz létre sem hozott választási pontot (figyelem: ez a Prolog megvalósítástól függ!);
  - vagy létrehozott ugyan választási pontot, de megszüntette (kimerítette, levágta).
- A SICStus Prolog nyomkövetésében `?` jelzi a nemdeterminisztikus lefutást:

```
p(1, a).
p(2, b).
p(3, b).
```

```
| ?- p(1, X).                    %  det. hívás,
                1 1 Exit: p(1,a) %    det. lefutás
| ?- p(Y, a).                    %  det. hívás,
             ? 1 1 Exit: p(1,a) %    nemdet. lefutás
| ?- p(Y, b), Y > 2.             %  nemdet. hívás
             ? 1 1 Exit: p(2,b) %    nemdet. lefutás
               1 1 Exit: p(3,b) %    det. lefutás
```


A determinisztikus lefutás és a választásmentesség

- Mi a determinisztikus lefutás haszna?
  - a futás gyorsabb lesz,
  - a tárigény csökken,
  - más optimalizálások (pl. jobbrekurzió) alkalmazhatók.
- Hogyan ismerheti fel a fordító a választásmentességet
  - egyszerű feltételes szerkezet (vö. Erlang őrfeltétel)
  - indexelés (indexing)
  - vágó és indexelés kölcsönhatása
- Az alábbi definíciók esetén a `p(`*Nonvar*`, Y)` hívás választásmentes, azaz nem hoz létre választási pontot:

Egyszerű feltétel

```
p(X, Y) :-
    (   X =:= 1 -> Y = a
    ;   Y = b
    ).
```

Indexelés

```
p(1, a).
p(2, b).
```

Indexelés és vágó

```
p(1, Y) :- !,
    Y = a.
p(_, b).
```

Választásmentesség feltételes szerkezetek esetén

- Feltételes szerkezet végrehajtásakor általában választási pont jön létre.
- A SICStus Prolog a „`( felt -> akkor ; egyébként )`” szerkezetet választásmentesen hajtja végre, ha a `felt` konjunkció tagjai csak:
  - aritmetikai összehasonlító eljáráshívások (pl. `<, =<, =:=`), és/vagy
  - kifejezés-típust ellenőrző eljáráshívások (pl. `atom, number`), és/vagy
  - általános összehasonlító eljáráshívások (pl. `@<, @=<,==`).
- Választásmentes kód keletkezik a „`fej :- felt, !, akkor.`” klózból, ha `fej` argumentumai különböző változók, és `felt` olyan mint fent.
- Például választásmentes kód keletkezik az alábbi definíciókból:

```
vektorfajta(X, Y, Fajta) :-
  (   X =:= 0, Y =:= 0
      % X=0, Y=0 nem lenne jó
  ->  Fajta = null
  ;   Fajta = nem_null
  ).
```

```
vektorfajta(X, Y, Fajta) :-
  X =:= 0, Y =:= 0, !,
  Fajta = null.
vektorfajta(_X, _Y, nem_null).
```


Indexelés

- Mi az indexelés?
  - egy adott hívásra illeszthető klózok gyors kiválasztása,
  - egy eljárás klózainak fordítási idejű csoportosításával.
- A legtöbb Prolog rendszer, így a SICStus Prolog is, az első fej-argumentum alapján indexel (first argument indexing).
- Az indexelés alapja az első fejargumentum külső funktora:
  - `C` szám vagy névkonstans esetén `C/0`;
  - `R` nevű és `N` argumentumú struktúra esetén `R/N`;
  - változó esetén nem értelmezett.
- Az indexelés megvalósítása:
  - Fordítási időben: funktor $\Rightarrow$ illeszthető fejű klózok részhalmaza.
  - Futási időben: a részhalmaz lényegében konstans idejű kiválasztása (hash tábla használatával).
  - Fontos: ha egyelemű a részhalmaz, nincs választási pont!

Példa indexelésre

```
p(0, a).          /* (1) */
p(X, t) :- q(X).  /* (2) */
p(s(0), b).       /* (3) */
p(s(1), c).       /* (4) */
p(9, z).          /* (5) */
```

```
q(1).
q(2).
```

- A `p(A, B)` hívással illesztendő klózok:
  - ha `A` változó, akkor (1) (2) (3) (4) (5)
  - ha `A = 0`, akkor (1) (2)
  - ha `A` fő funktora `s/1`, akkor (2) (3) (4)
  - ha `A = 9`, akkor (2) (5)
  - minden más esetben (2)
- Példák hívásokra:
  - `p(1, Y)` nem hoz létre választási pontot.
  - `p(s(1), Y)` létrehoz választási pontot, de determinisztikusan fut le.
  - `p(s(0), Y)` nemdeterminisztikusan fut le.

Struktúrák, változók a fejargumentumban

- Ha a klózok szétválasztásához szükség van az első (struktúra) argumentum részeire is, akkor érdemes segédeljárást bevezetni.
- Pl. `p/2` és `q/2` ekvivalens, de `q(`*Nonvar*`, Y)` determinisztikus lefutású!

```
p(0, a).
p(s(0), b).
p(s(1), c).
p(9, z).
```

```
q(0, a).
q(s(X), Y) :-
     q_seged(X, Y).
q(9, z).
```

```
q_seged(0, b).
q_seged(1, c).
```

- Az indexelés figyelembe veszi a törzs elején szereplő egyenlőséget: `p(X, ...) :- X = Kif, ...` esetén `Kif` funktora szerint indexel.
- Példa: lista hosszának reciproka, üres lista esetén 0:

```
rhossz([], 0).
rhossz(L, RH) :- L = [_|_], length(L, H), RH is 1/H.
```

- A 2. klóz kevésbé hatékony változatai

```
rhossz([X|L], RH) :-  length([X|L], H), RH is 1/H.
                              % ^ újra felépíti [X|L]-t.
rhossz(L, RH) :-  L \= [], length(L, H), RH is 1/H.
                              % L=[] esetén választási pontot hagy.
```

Indexelés – további tudnivalók

- Indexelés és aritmetika
  - Az indexelés nem foglalkozik aritmetikai vizsgálatokkal.
  - Pl. az `N = 0` és `N > 0` feltételek esetén a SICStus Prolog nem veszi figyelembe, hogy ezek kizárják egymást.
  - Az alábbi `fakt/2` eljárás lefutása nem-determinisztikus:

```
fakt(0, 1).
fakt(N, F) :- N > 0, N1 is N-1, fakt(N1, F1), F is N*F1.
```

- Indexelés és listák
  - Gyakran kell az üres és nem-üres lista esetét szétválasztani.
  - A bemenő lista-argumentumot célszerű az első argumentum-pozícióba tenni.
  - Az `[]` és `[...|...]` eseteket az indexelés megkülönbözteti (funktoruk: `'[]'/0` ill. `'.'/2`).
  - A két klóz sorrendje nem érdekes (feltéve, hogy zárt listával hívjuk az első pozíción) – de azért tegyük a leálló klózt mindig előre.

Listakezelő eljárások indexelése: példák

- Az `append/3` választásmentesen fut le, ha első argumentuma zárt végű.

```
append([], L, L).
append([X|L1], L2, [X|L3]) :-  append(L1, L2, L3).
```

- A `last/2` közvetlen megfogalmazása nemdeterminisztikusan fut le:

```
% last(L, E): Az L lista utolsó eleme E.
last([E], E).
last([_|L], E) :- last(L, E).
```

- Érdemes segédeljárást bevezetni, `last2/2` választásmentesen fut

```
last2([X|L], E) :- last2(L, X, E).

% last2(L, X, E): Az [X|L] lista utolsó eleme E.
last2([], E, E).
last2([X|L], _, E) :- last2(L, X, E).
```


Az indexelés és a vágó kölcsönhatása

- Hogyan vehető figyelembe a vágó az indexelés fordításakor?
- Példa: a `p(1, A)` hívás választásmentes, de a `q(1, A)` nem!

```
p(1, Y) :- !, Y = 2.  % (1)          | q(1, 2) :- !.      % (1)
p(X, X).              % (2)          | q(X, X).           % (2)
Arg1=1 → (1), Arg1≠1 → (2)           | Arg1=1 → {(1),(2)}, Arg1≠1 → (2)
```

- A fordító figyelembe veszi a vágót az indexelésben, ha garantált, hogy egy adott fő funktor esetén a vágót elérjük. Ennek feltételei:
  - 1. arg. változó, konstans, vagy csak változókat tartalmazó struktúra,
  - a további argumentumok változók,
  - a fejben az összes változóelőfordulás különböző,
  - a törzs első hívása a vágó (előtte megengedve egy fejillesztést kiváltó egyenlőséget).
- Ekkor az adott funktorhoz tartozó listából kihagyja a vágó utáni klózokat.
- Példa: `p(X, D, E) :- X = s(A, B, C), !, ....  p(X, Y, Z) :- ....`
- Ez egy újabb érv a vágás alapszabálya mellett:

A kimenő paraméterek értékadását mindig a vágó után végezzük!

A vágó és az indexelés hatékonysága – kieg. anyag

- Fibonacci-szerű sorozat: $f_1 = 1;\ f_2 = 2;\ f_n = f_{\lfloor 3n/4 \rfloor} + f_{\lfloor 2n/3 \rfloor},\ n > 2$

```
% determ. xx=''          | % determ. lefut. xx='c'  | % választásmentes, xx='ci'
fib(1, 1).                | fibc(1, 1) :- !.         | fibci(1, F) :- !, F = 1.
fib(2, 2).                | fibc(2, 2) :- !.         | fibci(2, F) :- !, F = 2.
fib(N, F) :-              | fibc(N, F) :-            | fibci(N, F) :-
                                                        N > 2, N2 is N*3//4, N3 is N*2//3,
                                                        fibxx(N2, F2), fibxx(N3, F3),
                                                        F is F2+F3.
```

- Futási idők $N = 6000$ esetén

	fib	fibc	fibci
futási idő	1.25 sec	1.22 sec	1.13 sec
meghiúsulási idő	0.29 sec	0.03 sec	0.00 sec
összesen	1.54 sec	1.25 sec	1.13 sec
nyom-verem mérete	37.4Mbyte	18.7 Mbyte	240 byte

- `fibc` esetén a meghiúsulási idő azért nem 0, mert a rendszer a nyom-vermet (trail-stack) dolgozza fel. (A nyom-verem tárolja a változó-értékadások visszacsinálási információit.)

Tartalom

Jobbrekurzió (farok-rekurzió, tail-recursion) optimalizálás

- Az általános rekurzió költséges, helyben és időben is.
- Jobbrekurzióról beszélünk, ha
  - a rekurzív hívás a klóztörzs utolsó helyén van, vagy az utolsó helyen szereplő diszjunkció egyik ágának utolsó helyén stb., és
  - a rekurzív hívás pillanatában nincs választási pont a predikátumban (a rekurzív hívást megelőző célok determinisztikusan futottak le, nem maradt nyitott diszjunkciós ág).
- Jobbrekurzió optimalizálás: az utolsó hívás végrehajtása előtt az eljárás által lefoglalt hely felszabadul ill. szemétgyűjtésre alkalmassá válik.
- Ez az optimalizálás nemcsak rekurzív hívás esetén, hanem minden **utolsó** hívás esetén megvalósul – a pontos név: utolsó hívás optimalizálás (last call optimisation).
- A jobbrekurzió így tehát nem növeli a memória-igényt, korlátlan mélységig futhat – mint a ciklusok az imperatív nyelvekben. Példa:

```
ciklus(Állapot) :- lépés(Állapot, Állapot1), !, ciklus(Állapot1).
ciklus(_Állapot).
```


Predikátumok jobbrekurzív alakra hozása – listaösszeg

- A listaösszegzés „természetes”, nem jobbrekurzív definíciója:

```
% sum0(+L, ?S): L elemeinek összege S (S = 0+Ln+Ln−1+...+L1).
sum0([], 0).
sum0([X|L], S):-        sum0(L,S0), S is S0+X.
```

- Jobbrekurzív lista-összegző:

```
% sum(+L, ?S): L  elemeinek összege S (S = 0+L1+L2+...+Ln).
sum(L, S):-             sum(L, 0, S).

% sum(+L, +S0, ?S): L elemeit S0-hoz adva kapjuk S-t. (≡  Σ L = S-S0)
sum([], S, S).
sum([X|L], S0, S):-     S1 is S0+X, sum(L, S1, S).
```

- A jobbrekurzív `sum` eljárás több mint 3-szor gyorsabb mint a `sum0`!
- Az akkumulátor az imperatív (azaz megváltoztatható értékű) változó fogalmának deklaratív megfelelője:
  - A `sum/3`-ban az `S0` és `S` argumentumok akkumulátorpárt alkotnak.
  - Az akkumulátorpár két része az adott változó mennyiség (a példában az összeg) különböző időpontokban vett értékeit mutatja:
    - `S0` az összeg a `sum/3` meghívásakor: a változó kezdőértéke;
    - `S` az összeg a `sum/3` lefutása után: a változó végértéke.

Az akkumulátorok használata

- Az akkumulátorokkal általánosan több egymás utáni változtatást is leírhatunk:

```
p(..., A0, A):-
        q0(..., A0, A1), ...,
        q1(..., A1, A2), ...,
        qn(..., An, A).
```

- A `sum/3` második klóza ilyen alakra hozva:

```
sum([X|L], S0, S):- plus(X, S0, S1), sum(L, S1, S).

plus(X, S0, S) :- S is S0+X.
```

- Akkumulátorváltozók elnevezési konvenciója: kezdőérték: *Vált*`0`; közbülső értékek: *Vált*`1`, ..., *Vált*`n`; végérték: *Vált*.
- A Prolog akkumulátorpár nem más mint a funkcionális programozásból ismert gyűjtőargumentum és a függvény eredményének együttese.

Akkumulátorok használata – folytatás

- Többszörös akkumulálás – lista összege és négyzetösszege

```
% sum2(+L, +S0, ?S, +Q0, ?Q): S-S0 =Σ Li, Q-Q0 = Σ Li^2
sum2([], S, S, Q, Q).
sum2([X|L], S0, S, Q0, Q):-
        S1 is S0+X, Q1 is Q0+X*X, sum2(L, S1, S, Q1, Q).
```

- Többszörös akkumulátorok összevonása egyetlen állapotváltozóvá

```
% sum3(+L, +S0/Q0, ?S/Q): S-S0 =Σ Li, Q-Q0 = Σ Li^2
sum3([], SQ, SQ).
sum3([X|L], SQ0, SQ) :-
        plus3(X, SQ0, SQ1), sum3(L, SQ1, SQ).
        % teljesen analóg a "sima" összegzővel

plus3(X, S0/Q0, S/Q) :- S is S0+X, Q is Q0+X*X.
```


Tartalom

Hogyan írjunk át imperatív nyelvű algoritmust Prolog programmá?

- Példafeladat: Hatékony hatványozási algoritmus
  - Alaplépés: a kitevő felezése, az alap négyzetre emelése.
  - A kitevő kettes számrendszerbeli alakja szerint hatványoz.
- Az algoritmust megvalósító C nyelvű függvény:

```
/* hatv(a, h) = a**h */
int hatv(int a, unsigned h)
{
  int e = 1;
  while (h > 0)
  {
    if (h & 1) e *= a;
    h >>= 1; a *= a;
  }
  return e;
}
```

- Az algoritmusban három változó van: `a`, `h`, `e`:
  - `a` és `h` végértékére nincs szükség,
  - `e` végső értéke szükséges (ez a függvény eredménye).

A `hatv` C függvénynek megfelelő Prolog eljárás

- Kétargumentumú C függvény $\Longrightarrow$ 2+1-argumentumú Prolog eljárás.
- A függvény eredménye $\Longrightarrow$ utolsó arg.: `hatv(+A, +H, ?E)`: $A^H = E$.
- Ciklus $\Longrightarrow$ segédeljárás: `hatv(+A0, +H0, +E0, ?E)`: $A0^{H0} * E0 = E$.
- »`a`« és »`h`« C változók $\Longrightarrow$ »`+A0`« és »`+H0`« bemenő *paraméterek* (nem kell végérték),
  »`e`« C változó $\Longrightarrow$ »`+E0, ?E`« *akkumulátorpár* (kezdőérték, végérték).

```
hatv(A, H, E) :-
    hatv(A, H, 1, E).

hatv(A0, H0, E0, E) :- H0 > 0, !,
    (   H0 /\ 1 =:= 1
        % /\ ≡ bitenkénti "és"
    ->  E1 is E0*A0
    ;   E1 = E0
    ),
    H1 is H0 >> 1,
    A1 is A0*A0,
    hatv(A1, H1, E1, E).
hatv(_, _, E, E).
```

```
int hatv(int a, unsigned h)
{       int e = 1;

  ism:  if (h > 0)
        {  if (h & 1)
             e *= a;




           h >>= 1;
           a *= a;
           goto ism;
        } else return e;
}
```

A C ciklus és a Prolog eljárás kapcsolata

- A ciklust megvalósító Prolog eljárás minden pontján minden C változónak megfeleltetethető egy Prolog változó (pl. `h`-nak `H0, H1, ...`):
  - A ciklusmag elején a C változók a megfelelő Prolog argumentumban levő változónak felelnek meg.
  - Egy C értékadásnak egy új Prolog változó bevezetése felel meg, az ez után következő kódban az új változó felel meg a C változónak.
  - Ha a diszjunkció, vagy if-then-else egyik ága megváltoztat egy változót, akkor a többi ágon is be kell vezetni az új Prolog változót, a régivel azonos értékkel (ld. `if (h & 1) ...`).
- A C ciklusmag végén a Prolog eljárást vissza kell hívni, argumentumaiban az egyes C változóknak pillanatnyilag megfeleltetett Prolog változóval.
- A C ciklus ciklus-invariánsa nem más mint a Prolog eljárás fejkommentje, a példában:

  `% hatv(+A0, +H0, +E0, ?E):` $A0^{H0} * E0 = E$.

Programhelyesség-bizonyítás (kiegészítő anyag)

- Egy algoritmus (függvény) specifikációja:
  - előfeltételek: a bemenő paramétereknek teljesíteniük kell ezeket,
  - utófeltételek: a paraméterek és az eredmény kapcsolatát írják le.
- Egy algoritmus helyes, ha minden, az előfeltételeket kielégítő adatra a függvény hibátlanul lefut, és eredményére fennállnak az utófeltételek.
- Példa: `x = mfoku_gyok(a,b,c)`
  - előfeltételek: `b*b-4*a*c >= 0, a` $\neq$ `0`
  - utófeltétel: `a*x*x+b*x+c = 0`
  - a program:

```
double mfoku_gyok(a, b, c)
double a, b, c;
{  double d = sqrt(b*b-4*a*c);
   return (-b+d)/2/a;
}
```

- A program helyességének bizonyítása lineáris kódra viszonylag egyszerű.

Ciklikus programok helyességének bizonyítása (kieg. anyag)

- A ciklusokat „fel kell vágni” egy ciklus-invariánssal, amely:
  - az előfeltételekből és a ciklust megelőző értékadásokból következik,
  - ha a ciklus elején fennáll, akkor a ciklus végén is (indukció),
  - belőle és a leállási feltételből következik a ciklus utófeltétele.

```
int hatv(int a0, unsigned h0) /*utófeltétel: hatv(a0, h0) = a0^h0 */
{ int e = 1, a = a0, h = h0;
  while /*ciklus-invariáns: a0^h0 == e*a^h */ (h > 0)
  {
    /* induláskor a kezdőértékek alapján triviálisan fennáll */
    if (h & 1) e *= a;          /* e' = e * a^(h&1) */
    h >>= 1;                    /* h' = (h-(h&1))/2 */
    a *= a;                     /* a' = a*a */
  }                             /*indukció: e'*a'^h' = ... = e*a^h */
  return e;
  /* Az invariánsból h = 0 miatt következik az utófeltétel */
}
```


Tartalom

Vezérlési eljárások, a `call/1` beépített eljárás

- Vezérlési eljárás: A Prolog végrehajtáshoz kapcsolódó beépített eljárás.
- A vezérlési eljárások többsége **magasabbrendű** eljárás, azaz olyan eljárás, amely egy vagy több argumentumát eljáráshívásként értelmezi.
- A meta-eljárások fő képviselője a `call(+Cél)`:
  - `Cél` egy struktúra vagy névkonstans (vö. `callable/1`).
  - Jelentése (deklaratív szemantika): `Cél` igaz.
  - Hatása (procedurális szemantika): a `Cél` kifejezést hívássá alakítja és végrehajtja.
- A klóztörzsben célként megengedett egy `X` változó használata, ezt a rendszer egy `call(X)` hívássá alakítja át.

```
| kétszer(X) :- call(X), X.

| ?- kétszer(write(ba)), nl.   ⟹    baba
| ?- listing(kétszer).         ⟹    kétszer(X) :-
                                       call(X), call(X).
```


Vezérlési szerkezetek mint eljárások

- A `call/1` argumentumában szerepelhetnek vezérlési szerkezetek is, mert ezek beépített eljárásként is jelen vannak a Prolog rendszerben:
  - `(',')/2`: konjunkció.
  - `(;)/2`: diszjunkció.
  - `(->)/2`: if-then; `(;)/2`: if-then-else.
  - `(\+)/2`: meghiúsulásos negáció.
- A `call`-ban szereplő vezérlési szerkezetek ugyanúgy futnak, mint az interpretált (azaz `consult`-tal betöltött) kód.
- A `Cél`-beli vágó csak a `call` belsejében vág (szülője a `call(Cél)` hívás).
- Példák:

```
| ?- _Cél = (kétszer(write(ba)), write(' ')), kétszer(_Cél), nl.
baba baba
| ?- kétszer((member(X, [a,b,c,d]), write(X), fail ; nl)).
abcd
abcd
```


`call/1` példa: futási időt mérő meta-eljárás

```
% Kiírja Goal első megoldásának előállításához vagy a meghiúsuláshoz
% szükséges időt, a Txt szöveg kiséretében.
time(Txt, Goal) :-
        statistics(runtime, [T0,_]),  % T0 az indítás óta eltelt CPU idő,
                                      % msec-ban (szemétgyűjtés nélkül).
        (   call(Goal) -> Res = true
        ;   Res = false
        ),
        statistics(runtime, [T1,_]), T is T1-T0,
        format('~w futási idő = ~3d sec\n', [Txt,T]),
                % ~w formázó: kiírás a write/1 segítségével
                % ~3d formázó: I egész kiírása I/1000-ként, 3 tizedesre
        Res = true.                   % meghiúsul, ha Goal meghiúsult
```


További beépített vezérlési eljárások

- `once(Cél)`: `Cél` igaz, és csak az első megoldását kérjük. Definíciója:

```
once(X) :- call(X), !.
```

  vagy, feltételes szerkezettel

```
once(X) :- (   call(X) -> true   ).
```

- `true`: azonosan igaz, `fail`: azonosan hamis (mindig meghiúsul).
- `repeat`: végtelen sokszor igaz (végtelen választási pont). Definíciója:

```
repeat.
repeat :- repeat.
```

- A `repeat` eljárást egy mellékhatásos eljárás ismétlésére használhatjuk.
- Példa (egyszerű kalkulátor):

```
bc :-  repeat, read(Expr),
            (   Expr = end_of_file -> true
            ;   Res is Expr, write(Expr = Res), nl, fail
            ),
       !.
```

- A végtelen választási pontot kötelező egy vágóval semlegesíteni!

Példa: magasabbrendű reláció definiálása – Kiegészítő anyag

- Az implikáció (`P` $\Rightarrow$ `Q`) megvalósítása negáció segítségével:

```
% P minden megoldása esetén Q igaz.
forall(P, Q) :-
     \+ (P, \+Q). % Szintaktikus emlékeztető:
                  % az első \+ után kötelező a szóköz!

| ?- _L = [1,2,3],
     % _L minden eleme pozitív:
     forall(member(X, _L), X > 0).
true ?
| ?- _L = [1,-2,3], forall(member(X, _L), X > 0).
no
| ?- _L = [1,2,3],
     % _L szigorúan monoton növő:
     forall(append(_,[A,B|_], _L), A < B).
true ?
```

- `forall/2` csak eldöntendő kérdés esetén használható.

Tartalom

Magasabbrendű eljárások – listakezelés

- Magasabbrendű (vagy meta-eljárás) egy eljárás,
  - ha eljárásként értelmezi egy vagy több argumentumát
  - pl. `call/1, findall/3, \+ /1 stb.`
- Listafeldolgozás `findall` segítségével – példák
  - Páros elemek kiválasztása (vö. Erlang filter)

```
% Az L egész-lista páros elemeinek listája Pk.
páros_elemei(L, Pk) :-
    findall(X, (member(X, L), X mod 2 =:= 0), Pk).
```

```
| ?- páros_elemei([1,2,3,4], Pk).  ⟹  Pk = [2,4]
```

  - A listaelemek négyzetre emelése (vö. Erlang map)

```
% Az L számlista  elemei négyzeteinek listája Nk.
négyzetei(L, Nk) :-
    findall(Y, (member(X, L), négyzete(X, Y)), Nk).

négyzete(X, Y) :- Y is X*X.
```

```
| ?- négyzetei([1,2,3,4], Nk).  ⟹  Nk = [1,4,9,16]
```


Részlegesen paraméterezett eljáráshívások – segédeszközök

- A `négyzete/0` kifejezés a `négyzete/2` részlegesen paraméterezett hívásának tekinthető.
- Ilyen hívások kiegészítésére és meghívására szolgálnak a `call/N` eljárások.
- `call(RPred, A1, A2, ...)` végrehajtása: az `RPred` részleges hívást kiegészíti az `A1, A2, ...` argumentumokkal, és meghívja.
- A `call/N` eljárások SICStus 4-ben már beépítettek, SICStus 3-ban még definiálni kellett ezeket, pl. így:

```
% Pred az A utolsó argumentummal meghívva igaz.
call(Pred, A) :-
        Pred =.. FAs0, append(FAs0, [A], FAs1),
        Pred1 =.. FAs1, call(Pred1).

% Pred az A és B utolsó argumentumokkal meghívva igaz.
call(Pred, A, B) :-
        Pred =.. FAs0, append(FAs0, [A,B], FAs2),
        Pred2 =.. FAs2, call(Pred2).

...
```

Részlegesen paraméterezett eljárások – rekurzív `map/3`

- Részleges paraméterezéssel a `map/3` meta-eljárás rekurzívan definiálható:

```
% map(Xs, Pred, Ys): Az Xs lista elemeire a Pred transzformációt
% alkalmazva kapjuk az Ys listát.
map([X|Xs], Pred, [Y|Ys]) :-
        call(Pred, X, Y), map(Xs, Pred, Ys).
map([], _, []).

másodfokú_képe(P, Q, X, Y) :- Y is X*X + P*X + Q.
```

- Példák:

```
| ?- map([1,2,3,4], négyzete, L).            ⟹   L = [1,4,9,16]
| ?- map([1,2,3,4], másodfokú_képe(2,1), L). ⟹   L = [4,9,16,25]
```

- A `call/N`-re épülő megoldás előnyei:
  - általánosabb és hatékonyabb lehet, mint a `findall`-ra épülő;
  - alkalmazható akkor is, ha az elemekre elvégzendő műveletek nem függetlenek, pl. `foldl`.

Rekurzív meta-eljárások – `foldl` és `foldr`

-
```
% foldl(+Xs, :Pred, +Y0, -Y): Y0-ból indulva, az Xs elemeire
% balról jobbra sorra alkalmazva a Pred által leírt
% kétargumentumú függvényt kapjuk Y-t.
foldl([X|Xs], Pred, Y0, Y) :-
        call(Pred, X, Y0, Y1), foldl(Xs, Pred, Y1, Y).
foldl([], _, Y, Y).

jegyhozzá(Alap, Jegy, Szam0, Szam) :- Szam is Szam0*Alap+Jegy.
```

```
| ?- foldl([1,2,3], jegyhozzá(10), 0, E).  ⟹   E = 123
```

-
```
% foldr(+Xs, :Pred, +Y0, -Y): Y0-ból indulva, az Xs elemeire jobbról
% balra sorra alkalmazva a Pred kétargumentumú függvényt kapjuk Y-t.
foldr([X|Xs], Pred, Y0, Y) :-
        foldr(Xs, Pred, Y0, Y1), call(Pred, X, Y1, Y).
foldr([], _, Y, Y).
```

```
| ?- foldr([1,2,3], jegyhozzá(10), 0, E).  ⟹   E = 321
```


Do-ciklusok (do-loops)

- Szintaxis:

```
(   Iterátor_1, ..., Iterátor_m
do  Célsorozat
)
```

  - Az `L` lista minden elemét megnövelve 1-gyel kapjuk az `NL` listát:

```
novel(L, NL) :-
     (   foreach(X, L), foreach(Y, NL)
     do  Y is X+1
     ).
```

  - Az `L` lista minden elemét megszorozva N-nel kapjuk az `NL` listát:

```
szoroz(L, N, NL) :-
     (   foreach(X, L), foreach(Y, ML), param(N)
     do  Y is N*X
     ).
```


Do-ciklusok: példák további iterátorokra

```
| ?- (          for(I, 1, 5),              foreach(I, List)
     do  true   % I = 1, 2, ..., 5
     ).
                              List = [1,2,3,4,5] ? ; no

| ?- (   foreach(X, [1,2,3]), fromto(0, In, Out, Sum)
     do  Out is In+X
         %In_1=0, Out_1=In_1+X_1, In_2=Out_1, ..., Out_3=In_3+X_3, Sum=Out_3
     ).
                              Sum = 6 ? ; no

| ?- (   foreach(X, [a,b,c,d,e]), count(I, 1, N),     foreach(I-X, Pairs)
     do  true                      %  I = 1, ..., N
     ).
                              N = 5, Pairs = [1-a,2-b,3-c,4-d,5-e] ? ; no

| ?- (   foreacharg(A, f(a,b,c,d,e), I), foreach(I-A, List)
     do  true
     ).
                              List = [1-a,2-b,3-c,4-d,5-e] ? ; no
```

VI. rész

Haladó Erlang

Tartalom

Rekurzió alapesetei

- Lineáris rekurzió
  Példa: lista összegének meghatározása

  `rek.erl` – Rekurzió példák

```
sum([])    -> 0;
sum([H|T]) -> H + sum(T).
```

- Elágazó rekurzió (Tree recursion)
  Példa: bináris fa leveleinek száma

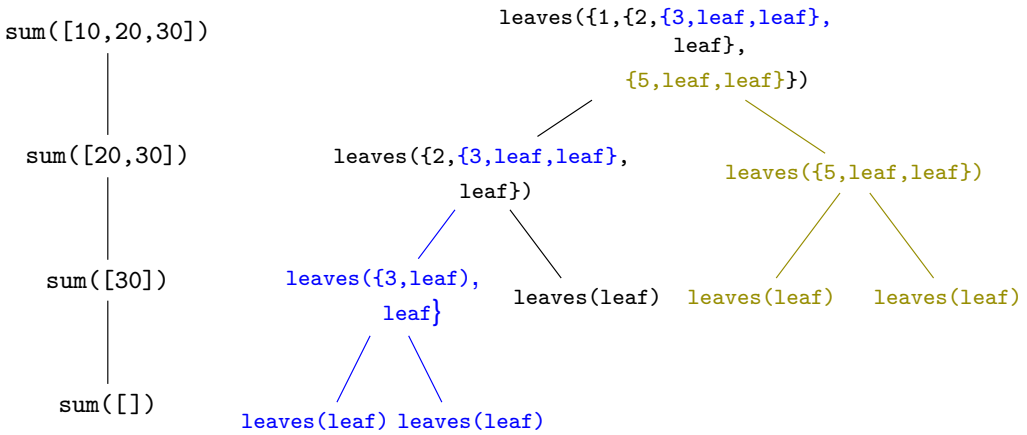
```
-type btree() :: leaf | {any(),btree(),btree()}.
leaves(leaf)      -> 1;
leaves({_,Lt,Rt}) -> leaves(Lt) + leaves(Rt).
```

- Mindkettőből *rekurzív folyamat* jön létre, ha alkalmazzuk: minden egyes rekurzív hívás mélyíti a vermet
- Például `sum/1` az egész listát kiteríti a vermen: `sum([1,2,3])` →

`1 + sum([2,3])` → `1 + (2 + sum([3]))` → `1 + (2 + (3 + sum([])))`

Rekurzív folyamat erőforrásigénye

- Hívási fa (call graph, CG): futás során meghívott függvények



- A lépések száma főként a *CG méretének* függvénye
- A tárigény (veremigény) főként a *CG mélységének* függvénye[8]

[8] Itt: lineáris függvénye.

Jobbrekurzió, iteráció

A rekurziót gyakran érdemes akkumulátorral jobbrekurzióvá alakítani

- Példa: lista összegének meghatározása

```
sumi(L) -> sumi(L,0).

sumi([], N)    -> N;
sumi([H|T], N) -> sumi(T, N+H).
```

- A segédfüggvényt jobb nem exportálni, hogy elrejtsük az akkumulátort
- A jobbrekurzióból *iteratív folyamat* hozható létre, amely nem mélyíti a vermet (azaz `sumi/2` tárigénye konstans): `sumi([1,2,3],0)` → `sumi([2,3],1)` → `sum([3],3)` → `sum([],6)`
- Ne tévesszük össze egymással a rekurzív számítási folyamatot és a rekurzív függvényt, eljárást!
  - Rekurzív függvény esetén csupán a szintaxisról van szó, arról, hogy hivatkozik-e a függvény, eljárás *önmagára*
  - Folyamat esetében viszont a folyamat menetéről, lefolyásáról beszélünk
- Ha egy függvény *jobbrekurzív (tail-recursive),* a megfelelő folyamat – az értelmező/fordító jóságától függően – lehet iteratív

Rekurzív folyamat erőforrásigénye – Példák

Példa[9]	Lépések (CG mérete)	CG mélysége	Tárigény ≈ mélység∗|állapot|
`sum(lists:seq(1, n))`	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n) \cdot \Theta(\log n)$
`sumi(lists:seq(1, n))`	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$ (konst.)	$\Theta(1) \cdot \Theta(\log n)$
`SEND+MORE=MONEY`, kimerítő keresés, itt $n = 8$	$\Theta(10^n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n) \cdot \Theta(\log n)$
Mastermind, (m, h) kimerítő keresés, tipikusan $h \leq 20$	$\Theta(m^h)$	$\Theta(h)$	

- Az |állapot| a CG egy pontjának a memóriamérete. Pl. szummázásnál az állapot a részösszeg, aminek a tárigénye logaritmikus (a számjegyek számával arányos). Az SMM-ben (CSP feladat) ez egy kitöltés memóriamérete.
- A rekurzióból fakadó tárigény lehet jelentős is (vö `sum/1`, `sumi/1`), és lehet elhanyagolható is a lépésekhez képest (SMM, Mastermind)
- Az eljárások, függvények olyan *minták*, amelyek megszabják a számítási folyamatok, processzek menetét, *lokális* viselkedését
- Egy számítási folyamat *globális* viselkedését (pl. idő- és tárigény) általában nehéz megbecsülni, de törekedni kell rá

[9] $f(n) = \Theta(g(n))$ jelentése: $g(n) \cdot k_1 \leq f(n) \leq g(n) \cdot k_2$ valamilyen $k_1, k_2 > 0$-ra

A jobbrekurzió mindig *nagyságrendekkel* előnyösebb? Nem!

- A jobbrekurzív `sumi(L1)` tárigénye konstans (azaz $\Theta(1)$), a lineáris-rekurzív `sum(L1)` össz-tárigénye $\Theta($`length(L1)`$)$
- Melyiknek alacsonyabb a tárigénye?
  - `bevezeto:append(L1,L2)`
  - `R1=lists:reverse(L1),bevezeto:revapp(R1,L2)` *`% jobbrek.`*
- `append` kiteríti `L1` elemeit a vermen, ennek tárigénye $\Theta($`length(L1)`$)$, majd ezeket `L2` elé fűzi, így tárigénye $\Theta($`length(L1)+length(L2)`$)$
- `revapp(R1,L2)` iteratív számítási folyamat, nem mélyíti a vermet, de `revapp` felépíti az `L1++L2` akkumulátort, ennek tárigénye szintén $\Theta($`length(L1)+length(L2)`$)$
- A jobbrekurzív `revapp` tárigénye *nagyságrendileg* hasonló, mint a lineáris-rekurzív `append` függvényé!
- Ha az akkumulátor mérete nem konstans (azaz $\Theta(1)$), meggondolandó a jobbrekurzió...

Példa elágazó rekurzióra: Fibonacci-sorozat (1)

- Amikor hierarchikusan strukturált adatokon kell műveleteket végezni, pl. egy fát kell bejárni, akkor az elágazó rekurzió nagyon is természetes és hasznos eszköz
- Az elágazó rekurzió numerikus számításoknál az algoritmus első megfogalmazásakor is hasznos lehet; pl. írjuk át a Fibonacci-számok (0,0,1,1,2,3,5,8,13,...) matematikai definícióját programmá

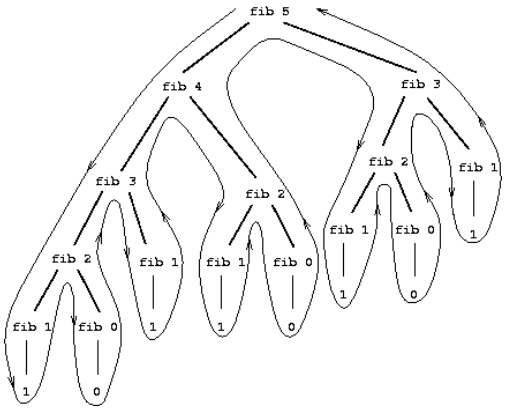
$$F(n) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n = 0, \\ 1, & \text{ha } n = 1, \\ F(n-2) + F(n-1) & \text{különben.} \end{cases}$$

Naív Fibonacci, előfelt.: $N \in \mathcal{N}$

```
fib(0) -> 0;
fib(1) -> 1;
fib(N) -> fib(N-2) + fib(N-1).
```

- Ha már értjük a feladatot, az első, rossz hatékonyságú változatot könnyebb átírni jó, hatékony programmá. Az elágazó rekurzió segíthet a feladat megértésében.
- *Forrás:* Structure and Interpretation of Computer Programs, 2nd ed., by H. Abelsson, G. J. Sussman, J. Sussman, The MIT Press, 1996

Példa elágazó rekurzióra: Fibonacci-sorozat (2)



- Elágazó-rekurzív folyamat hívási fája `fib(5)` kiszámításakor
- Alkalmatlan a Fibonacci-számok előállítására
- Az $F(n)$ meghatározásához pontosan $F(n+1)$ levélből álló fát kell bejárni, azaz ennyiszer kell meghatározni $F(0)$-at vagy $F(1)$-et

- $F(n)$ exponenciálisan nő n-nel: $\lim_{n\to\infty} \frac{F(n+1)}{F(n)} = \varphi$, ahol $\varphi = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1.61803$, az *aranymetszés* arányszáma

Példa elágazó rekurzióra: Fibonacci-sorozat (3)

- A lépések száma – $F(n)$-hez hasonlóan – exponenciálisan nő n-nel
- A tárigény ugyanakkor csak lineárisan nő n-nel, mert csak azt kell nyilvántartani, hogy hányadik szinten járunk a fában
- A Fibonacci-számok azonban lineáris-iteratív folyamattal is előállíthatók: ha az A és B változók kezdőértéke $F(1) \equiv 1$, ill. $F(0) \equiv 0$, és ismétlődve alkalmazzuk az $A \leftarrow A+B$, $B \leftarrow A$ transzformációkat, akkor N lépés után $A = F(N+1)$ és $B = F(N)$ lesz

```
fibi(0) -> 0;                   % fibi(N) az N-edik Fibonacci-szám.
fibi(N) -> fibi(N-1, 1, 0).

% fibi(N,A,B) az A←A+B, B←A transzformáció N-edik ismétlése utáni A.
fibi(0, A, _B) -> A;
fibi(I, A, B)  -> fibi(I-1, B+A, A).
```

- A Fibonacci-példában a lépések száma elágazó rekurziónál n-nel exponenciálisan, lineáris rekurziónál n-nel arányosan nőtt!
- Pl. a `tree:leaves/1` függvény is lineáris-rekurzívvá alakítható, de ezzel nem javítható a hatékonysága: valamilyen LIFO tárolót kellene használni a mélységi bejáráshoz a rendszerverem helyett

Programhelyesség informális igazolása (1)

- Egy rekurzív programról is be kell látnunk – az iteratív programhoz hasonlóan –, hogy
  - funkcionálisan helyes (azaz azt kapjuk eredményül, amit várunk)
  - a kiértékelése biztosan befejeződik (nem „végtelen” a rekurzió)
- Ellenpélda: a `fac(-1)` hívás végtelen ciklushoz vezet, bár az argumentum minden rekurzív híváskor csökken
- A helyesség bizonyítása rekurzió esetén egyszerű, *strukturális indukcióval* lehetséges, azaz visszavezethető a teljes indukcióra valamilyen *strukturális tulajdonság* szerint
- Csak meg kell választanunk a strukturális tulajdonságot, amire vonatkoztatjuk az indukciót; pl. a `fac/1` az `N = 0` paraméterre leáll, de a 0 nem a legkisebb egész szám: a *nemnegatív számok halmazában* viszont a legkisebb → módosítani kell az értelmezési tartományt
- A `map` példáján mutatjuk be a programhelyesség informális igazolását

Programhelyesség informális igazolása (2)

```
-spec map(fun(A) -> B, [A]) -> [B].
map(_F, [])     -> [];
map(F, [X|Xs]) -> [F(X)|map(F, Xs)].
```

1. A strukturális tulajdonság itt a lista hossza
2. A függvény funkcionálisan helyes, mert
   - belátjuk, hogy a függvény jól transzformálja az üres listát;
   - belátjuk, hogy az `F` jól transzformálja a lista első elemét (a fejét);
   - indukciós feltevés: a függvény jól transzformálja az eggyel rövidebb listát (a lista farkát);
   - belátjuk, hogy a fej transzformálásával kapott elem és a farok transzformálásával kapott lista összefűzése a várt listát adja.
3. A kiértekelés véges számú lépésben befejeződik, mert
   - a lista (mohó kiértékelés mellett!) *véges,*
   - a *rekurziót tartalmazó klózban* a függvényt minden lépésben *egyre rövidülő* listára alkalmazzuk (a strukturális tulajdonság „csökken”), és
   - a rekurzió le fog állni, mert *van rekurziót nem tartalmazó klóz,* amire az *alapesetben,* a strukturális tulajdonság zérussá válásakor kerül sor.

Tartalom

Tagsági vizsgálat

- A halmazt mi most rendezetlen listával ábrázoljuk
- A műveletek sokkal hatékonyabbak volnának rendezett adatszerkezettel (pl. rendezett lista, keresőfa, hash)
- Erlang STDLIB: sets, ordsets (based on **ord**ered lists), gb_sets (ordered sets based on **g**eneral **b**alanced trees))

`set.erl` – Halmazkezelő függvények

```
-type set() :: list().
-spec empty() -> E::set().    % E az üres halmaz.
empty() ->                    % Az absztrakció miatt szükséges:
    [].                       % ábrázolástól független interfész.

-isMember(X::any(), Ys::set()) -> B::boolean().
% B igaz, ha az X elem benne van az Ys halmazban.
isMember(_, []) ->                      isMember2(_, [])      -> false;
    false;                              isMember2(X, [X|_Ys]) -> true;
isMember(X, [Y|Ys]) ->                  isMember2(X, [_Y|Ys]) ->
    X=:=Y orelse isMember(X,Ys).            isMember2(X, Ys).
```

- *Megjegyzés:* `orelse`, mint már tudjuk, lusta kiértékelésű

Új elem berakása egy halmazba, listából halmaz

- `newMember` új elemet rak egy halmazba, *ha még nincs benne*

`set.erl` – folytatás

```
-spec newMember(X::any(), Xs::set()) -> Rs::set().
% Az Rs halmaz az Xs halmaz és az [X] halmaz uniója.
newMember(X, Xs) ->
    case isMember(X, Xs) of
        true -> Xs;
        false -> [X|Xs]
    end.
```

- `listToSet` listát halmazzá alakít a duplikátumok törlésével; naív (lassú)

```
-spec listToSet(list()) -> set().
% listToSet(Xs) az Xs lista elemeinek ismétlődésmentes halmaza.
listToSet([]) ->
    [];
listToSet([X|Xs]) ->
    newMember(X, listToSet(Xs)).
```


Halmazműveletek

- Öt ismert halmazműveletet definiálunk a továbbiakban (rendezetlen listákkal ábrázolt halmazokon):
  - unió (`union`, $S \bigcup T$) vö. `lists:fold*/3`
  - metszet (`intersect`, $S \bigcap T$) vö. `lists:filter/2`
  - részhalmaza-e (`isSubset`, $T \subseteq S$) vö. `lists:all/2`
  - egyenlők-e (`isEqual`, $S \equiv T$)
  - hatványhalmaz (`powerSet`, 2^S)
- Otthoni gyakorlásra: halmazműveletek megvalósítása rendezett listákkal, illetve fákkal.

(A zárthelyin várhatók ilyen feladatok.)

Unió, metszet

set.erl – folytatás

```
-spec union(Xs::set(), Ys::set()) -> Zs::set().
% Zs az Xs és Ys halmazok uniója.
union([], Ys)     -> Ys;
union([X|Xs], Ys) ->
  newMember(X, union(Xs, Ys)).
```

```
union2(Xs, Ys) ->
  foldr(fun newMember/2,
        Ys, Xs).
```

```
-spec intersect(Xs::set(), Ys::set()) -> Zs::set().
% Zs az Xs és Ys halmazok metszete.
intersect([], _) ->
    [];
intersect([X|Xs], Ys) ->
    Zs = intersect(Xs, Ys),
    case isMember(X, Ys) of
        true  -> [X|Zs];
        false -> Zs
    end.
```

```
intersect3(Xs, Ys) ->
    [ X || X <- Xs,
           isMember(X, Ys)
    ].
```


Részhalmaza-e, egyenlők-e

set.erl – folytatás

```
-spec isSubset(Xs::set(), Ys::set()) -> B::boolean().
% B igaz, ha Xs részhalmaza Ys-nek.
isSubset([], _) ->
    true;
isSubset([X|Xs], Ys) ->
    isMember(X, Ys) andalso isSubset(Xs, Ys).

-spec isEqual(Xs::set(), Ys::set()) -> B::boolean().
% B igaz, ha Xs és Ys elemei azonosak.
isEqual(Xs, Ys) ->
    isSubset(Xs, Ys) andalso isSubset(Ys, Xs).
```

- `isSubset` lassú a rendezetlenség miatt
- `andalso`, mint már tudjuk, lusta kiértékelésű
- A listák egyenlőségének vizsgálata ugyan beépített művelet az Erlangban, halmazokra mégsem használható, mert pl. `[3,4]` és `[4,3]` listaként különböznek, de halmazként egyenlők.

Halmaz hatványhalmaza

- Az S halmaz hatványhalmazának nevezzük az S *összes* részhalmazának a halmazát, jelölése: $P(S)$
- $P(S)$-t *rekurzívan* például úgy állíthatjuk elő, hogy kiveszünk S-ből egy x elemet, majd előállítjuk az $S \setminus \{x\}$ hatványhalmazát
- Példa: $S = \{10, 20, 30\}$, $x \leftarrow 10$, $P(S \setminus \{x\}) = \{\{\}, \{20\}, \{30\}, \{20, 30\}\}$
- Ha tetszőleges T halmazra $T \subseteq S \setminus \{x\}$, akkor $T \subseteq S$ és $T \bigcup \{x\} \subseteq S$, azaz mind T, mind $T \bigcup \{x\}$ eleme S hatványhalmazának
- Vagyis $P(\{10, 20, 30\}) =$

$$\Big\{\{\}, \{20\}, \{30\}, \{20, 30\}\Big\} \bigcup \Big\{\{\} \cup \{10\}, \{20\} \cup \{10\}, \{30\} \cup \{10\}, \{20, 30\} \cup \{10\}\Big\}$$

```
% powerSet*(S) az S halmaz hatványhalmaza.
powerSet1([]) ->
 [[]];
powerSet1([X|Xs]) ->
 P = powerSet1(Xs),
 P ++ [ [X|Ys] || Ys <- P ].
```

```
powerSet2(Xs) -> % jobbrekurzívan
 foldl(fun(X, P) ->
         P ++ [ [X|Ys] || Ys <- P ]
       end,
       [[]],
       Xs).
```


Halmaz hatványhalmaza – hatékonyabb változat

- A `P ++ [ [X|Ys] || Ys <- P ]` művelet hatékonyabbá tehető

set.erl – folytatás

```
-spec insAll(X::any(),Yss::[[any()]],Zss::[[any()]]) -> Xss::[[any()]].
% Xss az Yss lista Ys elemeinek Zss elé fűzött listája,
% amelyben minden Ys elem elé X van beszúrva.
insAll(_X,[],Zss) ->
    Zss;
insAll(X,[Ys|Yss],Zss) ->
    insAll(X,Yss,[[X|Ys]|Zss]).

powerSet3([]) ->
    [[]];
powerSet3([X|Xs]) ->
    P = powerSet3(Xs),
    insAll(X,P,P).   % [ [X|Ys] || Ys <- P ] ++ P kiváltására
```

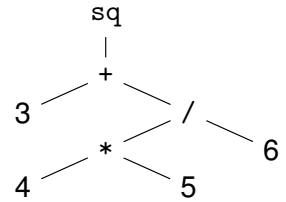
Tartalom

Összetett kifejezés kiértékelése

- Egy összetett kifejezést az Erlang két lépésben értékel ki mohó kiértékeléssel, az alábbi rekurzív kiértékelési szabály szerint:
  1. Először kiértékeli az operátort (műveleti jelet, függvényjelet) és az argumentumait,
  2. majd ezután alkalmazza az operátort az argumentumokra.
- A kifejezéseket *kifejezésfával* ábrázoljuk
- Hasonló a Prolog-kifejezés ábrázolásához:

```
| ?- write_canonical(sq(3+4*5/6)).
sq(+(3,/(*(4,5),6)))
```

- A mohó kiértékelés során az operandusok alulról fölfelé „terjednek”



- Felhasználói függvény mohó alkalmazása (fenti 2. pont):
  1. a függvény törzsében a formális paraméterek összes előfordulását lecseréli a megfelelő aktuális paraméterre,
  2. majd kiértékeli a függvény törzsét.

Függvényalkalmazás mohó kiértékelése

Tekintsük a következő egyszerű függvények definícióját:

```
sq(X) -> X * X.
sumsq(X, Y) -> sq(X) + sq(Y).
f(A) -> sumsq(A+1, A*2).
```

Mohó kiértékelés esetén minden lépésben egy részkifejezést egy vele egyenértékű kifejezéssel helyettesítünk. Pl. az `f(5)` mohó kiértékelése:

`f(5)` → `sumsq(5+1, 5*2)` → `sumsq(6, 5*2)` → `sumsq(6, 10)` → `sq(6) + sq(10)` → `6*6 + sq(10)` → `36 + sq(10)` → `36 + 10*10` → `36 + 100` → `136`

- A függvényalkalmazás itt bemutatott *helyettesítési modellje*, az „egyenlők helyettesítése egyenlőkkel” *(equals replaced by equals)* segíti a függvényalkalmazás *jelentésének* megértését
- Olyan esetekben alkalmazható, amikor egy függvény *jelentése független* a környezetétől (pl. ha minden mellékhatás ki van zárva)
- A fordítók rendszerint bonyolultabb modell szerint működnek

Lusta kiértékelés

- Az Erlang tehát *először* kiértékeli az operátort és az argumentumait, *majd* alkalmazza az operátort az argumentumokra
- Ezt a kiértékelési sorrendet nevezzük *mohó* (eager) vagy *applikatív sorrendű* (applicative order) kiértékelésnek
- Van más lehetőség is: a kiértékelést addig halogatjuk, ameddig csak lehetséges: ezt *lusta* (lazy), *szükség szerinti* (by need) vagy *normál sorrendű* (normal order) kiértékelésnek nevezzük
- Pl. az `f(5)` lusta kiértékelése:

`f(5)` → `sumsq(5+1, 5*2)` → `sq(5+1) + sq(5*2)` → `(5+1)*(5+1) + (5*2)*(5*2)` → `6*(5+1) + (5*2)*(5*2)` → `6*6 + (5*2)*(5*2)` → `36 + (5*2)*(5*2)` → `36 + 10*(5*2)` → `36 + 10*10` → `36 + 100` → `136`

- Pl. a `false andalso f(5) > 100` lusta kiértékelése:

`false andalso f(5) > 100` → `false`

Mohó és lusta kiértékelés összevetése

- Igazolható, hogy olyan függvények esetén, amelyek jelentésének megértésére a helyettesítési modell alkalmas, a kétféle kiértékelési sorrend azonos eredményt ad
- Vegyük észre, hogy lusta (szükség szerinti) kiértékelés mellett egyes részkifejezéseket néha többször is ki kell értékelni
- A többszörös kiértékelést a lusta kiértékelést használó, jobb fordítók (pl. Alice, Haskell) úgy kerülik el, hogy
  - az azonos részkifejezéseket megjelölik,
  - amikor egy részkifejezést először kiértékelnek, *az eredményét megjegyzik,*
  - a többi előfordulásakor pedig ezt az eredményt veszik elő.

  E módszer hátránya a nyilvántartás szükségessége.
  Ma általában ezt nevezik *lusta* kiértékelésnek.

Lusta kiértékelés Erlangban: lusta farkú lista

- Ismétlés: `-type erlang:list() :: [] | [any()|list()].`
- A `[H|T]` egy speciális szintaxisú, két elemű ennes (pár), nem csak listákra használhatjuk:

```
1> [1|[2]].     % Lista, mert a | utáni rész lista.
[1,2]
2> [1|[2|[]]]. % Lista, mint az előző.
[1,2]
3> [1|2].       % Pár, mert a | utáni rész nem lista.
[1|2]
```

- A következő fóliákon az átláthatóság kedvéért a listaszintaxist használjuk egy két elemű ennesre (párra): a lusta listára

`lazy.erl` – Lusta farkú lista

```
-type lazy:list() :: [] | [any()|fun() -> lazy:list()].
```

- A fenti szerkezetben a második tag (a farok) – a függvénydefiníció miatt – *késleltett kiértékelésű* (vö. delayed evaluation)

Lusta farkú lista építése

- Végtelen számsorozat:

`lazy.erl` – folytatás

```
-spec infseq(N::integer())
             -> lazy:list().
infseq(N) ->
  [N | fun() -> infseq(N+1)
       end
  ].
```

- Példák:

```
1> lazy:infseq(0).
[0|#Fun<lazy.1.65678590>]
2> T1 = tl(lazy:infseq(0)).
#Fun<lazy.1.65678590>
3> T1().
[1|#Fun<lazy.1.65678590>]
```

- Véges számsorozat:

`lazy.erl` – folytatás

```
-spec seq(M::integer(),
          N::integer())
          -> lazy:list().
seq(M, N) when M =< N ->
  [M|fun() -> seq(M+1, N) end];
seq(_, _) ->
  [].
```

- Példák:

```
1> lazy:seq(1,1).
[1|#Fun<lazy.0.35745118>]
2> tl(lazy:seq(1,1)).
#Fun<lazy.0.35745118>
3> (tl(lazy:seq(1,1)))().
[]
```


Erlang-lista konvertálása

Erlang-listából lusta lista:

- Nagyon gyors: egyetlen függvényhívás

```
-spec cons(erlang:list())
           -> lazy:list().
cons([]) ->
    [];
cons([H|T]) ->
    [H|fun() -> cons(T) end].
```

```
1> lazy:cons([1,2]).
[1|#Fun<lazy.10.66878903>]
2> T2 = tl(lazy:cons([1,2])).
#Fun<lazy.10.66878903>
3> T2().
[2|#Fun<lazy.10.66878903>]
4> (tl(T2()))().
[]
```

Lusta listából Erlang-lista:

- Csak az első `N` elemét vesszük ki: lehet, hogy végtelen

```
-spec take(lazy:list(),
           N::integer())
           -> erlang:list().
take(_, 0)      -> [];
take([], _)     -> [];
take([H|_], 1) -> [H];% optim.
take([H|T], N) ->
    [H|take(T(), N-1)].
```

```
1> lazy:take(lazy:infseq(0), 5).
[0,1,2,3,4]
2> lazy:take(lazy:seq(1,2), 5).
[1,2]
```

- Ha `N`=1, a `T()` hívás felesleges