

BINÁRIS FÁK

Bináris fák FP-10-11-191

Egyszerű műveletek bináris fákon

Legyen

```
datatype 'a tree = L | N of 'a * 'a tree * 'a tree
```

- nodes egy fa csomópontjait számlálja meg.

```
(* nodes : 'a tree -> int
   nodes f = az f fa csomópontjainak a száma *)
fun nodes (N(_, t1, t2)) = 1 + nodes t2 + nodes t1
  | nodes L = 0
```

- Akkumulátort használó változata: nodesa – a kétfelé ágazó rekurzió miatt nem nyerünk vele szinte semmit, de legalább sikerült nehezebben érthetővé tennünk. :-)

```
fun nodesa f =
  let (* nodes0(f, n) = n + a csomópontok száma f-ben
       nodes0 : 'a tree * int -> int *)
      fun nodes0 (N(_, t1, t2), n) =
          nodes0(t1, nodes0(t2, n+1))
        | nodes0 (L, n) = n
      in nodes0(f, 0)
      end
```

Egyszerű műveletek bináris fákon (folyt.)

- A fa gyökeréből a leveléhez vezető úton az élek számát (az út hosszát) az adott levél szintjének is nevezzük. A szintek közül a legnagyobbat a fa *mélységének* hívjuk.
- `depth` egy fa mélységét határozza meg.

```
(* depth : 'a tree -> int
   depth f = az f fa mélysége *)
fun depth (N(_, t1, t2)) = 1 + Int.max(depth t2, depth t1)
  | depth L = 0
```

- `depth` akkumulátort használó változata: `deptha` – a kétfelé ágazó rekurzió miatt most sem nyerünk vele szinte semmit.

```
fun deptha f =
  let fun depth0 (N(_, t1, t2), d) =
        Int.max(depth0(t1, d+1), depth0(t2, d+1))
      | depth0 (L, d) = d
  in
    depth0(f, 0)
  end
```

Egyszerű műveletek bináris fákon (folyt.)

- `fulltree` n mélységű *teljes bináris fát* épít, és a fa csomópontjait 1-től $2^n - 1$ -ig beszámozza.

```
(* fulltree : int -> int tree
   fulltree n = n mélységű teljes fa *)
fun fulltree n = let fun ftree (_, 0) = L
                    | ftree (k, n) = N(k, ftree(2*k, n-1),
                                         ftree(2*k+1, n-1))
  in
    ftree(1, n)
  end
```

Egy teljes bináris fában minden csomópontból pontosan két él indul ki, és minden levelének ugyanaz a szintje.

- `reflect` a fát a függőleges tengelye mentén tükrözi.

```
(* reflect : 'a tree -> 'a tree
   reflect t = a függőleges tengelye mentén tükrözött t fa *)
fun reflect L = L
  | reflect (N(v,t1,t2)) = N(v, reflect t2, reflect t1)
```

Lista előállítása bináris fa elemeiből

- Mindhárom függvény *bináris fából listát* állít elő. Abban különböznek egymástól, hogy a csomópontokban tárolt értékeket mikor veszik ki, és milyen sorrendben járják be a részfákat:
 - preorder először az értéket veszi ki, majd bejárja a bal, és azután a jobb részfát;
 - inorder először bejárja a bal részfát, majd kiveszi az értéket, végül bejárja a jobb részfát;
 - postorder először bejárja a bal, majd a jobb részfát, és utoljára veszi ki az értéket.
- Az akkumulátort nem használó változatok egyszerűek, érthetőek, de nem elég hatékonyak a @ operátor használata miatt.

```
(* preorder, inorder, postorder : 'a tree -> 'a list *)
(* preorder f = az f fa elemeinek preorder sorrendű listája *)
fun preorder L = []
  | preorder (N(v,t1,t2)) = v :: preorder t1 @ preorder t2
(* inorder f = az f fa elemeinek inorder sorrendű listája *)
fun inorder L = []
  | inorder (N(v,t1,t2)) = inorder t1 @ (v :: inorder t2)
(* postorder f = az f fa elemeinek postorder sorrendű listája *)
fun postorder L = []
  | postorder (N(v,t1,t2)) = postorder t1 @ (postorder t2 @ [v])
```

Lista előállítása bináris fa elemeiből (folyt.)

- Ha *inorder* előző változatában az `inorder t1 @ (v :: inorder t2)` kifejezésben a `v :: inorder t2` részkifejezést nem tesszük zárójelbe, a fordító hibát jelez, mivel `::` és `@` azonos precedenciájú, és ezért zárójelek nélkül a nyilvánvalóan hibás `inorder t1 @ v` részkifejezést akarná kiértékelni.
- *inorder* előző megvalósításával kb. egyenértékű a következő változata, amelyben a `v` elem helyett az egyelemű `[v]` listát fűzzük `inorder t2` elé:

```
fun inorder L = []
  | inorder (N(v,t1,t2)) = inorder t1 @ ([v] @ inorder t2)
```

Ez a változat azonban *roppant sérülékeny*, ugyanis a hatékonysága függ a zárójelek kirakásától. Ha a `[v] @ inorder t2` részkifejezést nem tesszük zárójelbe, akkor a fordító először a `inorder t1 @ [v]` részkifejezést fogja kiértékelni, azaz egy egyelemű listához fűz egy (általában) jóval hosszabbat!

- Az elmondottakhoz hasonló okból *postorder* bemutatott változata is *rendkívül sérülékeny!* Ha ugyanis a `postorder t1 @ (postorder t2 @ [v])` kifejezésben az amúgyis rossz hatékonyságú `postorder t2 @ [v]` részkifejezést nem tesszük zárójelbe, akkor a fordító először a `postorder t1 @ postorder t2` részkifejezést értékeli ki, azaz a két, feltehetően hosszú listát fűzi egybe, majd a létrehozott eredménylistát fűzi az egyelemű listához!

Lista előállítás bináris fa elemeiből (folyt.)

Az akkumulátort használó változatok megint nehezebben érthetőek, de talán valamivel *hatékonyabbak*, főleg a veremhasználat szempontjából (@ helyett ::-ot használunk).

```
(* preord : 'a tree * 'a list -> 'a list
   preord(f, vs) = az f fa elemeinek a vs lista elé fűzött,
                   preorder sorrendű listája *)
fun preord (L, vs) = vs
  | preord (N(v,t1,t2), vs) = v::preord(t1, preord(t2,vs))

(* inord : 'a tree * 'a list -> 'a list
   inord(f, vs) = az f fa elemeinek a vs lista elé fűzött,
                  inorder sorrendű listája *)
fun inord (N(v,t1,t2), vs) = inord(t1, v::inord(t2,vs))
  | inord (L, vs) = vs

(* postord : 'a tree * 'a list -> 'a list
   postord(f, vs) = az f fa elemeinek a vs lista elé fűzött,
                   postorder sorrendű listája *)
fun postord (N(v,t1,t2), vs) = postord(t1, postord(t2, v::vs))
  | postord (L, vs) = vs
```

Bináris fa előállítás lista elemeiből: balPreorder

- Listát *kiegyensúlyozott (balanced) bináris fává* alakítanak a következő függvények: balPreorder, balInorder és balPostorder; a különbség közöttük most is a bejárás sorrendben van.

```
(* balPreorder: 'a list -> 'a tree
   balPreorder xs = az xs lista elemeiből álló, preorder
                   bejárású, kiegyensúlyozott fa
*)
fun balPreorder [] = L
  | balPreorder (x::xs) =
    let val k = length xs div 2
    in
      N(x, balPreorder(List.take(xs, k)),
        balPreorder(List.drop(xs, k)))
    end
```

- A hatékonyságot kisebb mértékben rontja, hogy List.take és List.drop egymástól függetlenül *kétszer* mennek végig a lista első felén.

take és drop egyetlen függvénnyel: take 'ndrop

- Írjunk take 'ndrop néven olyan függvényt, amelynek egy xs listából és egy k egészből álló pár az argumentuma, és egy olyan pár az eredménye, amelynek első tagja a lista első k db eleme, második tagja pedig a lista többi eleme.

```
(* take'ndrop : 'a list * int -> 'a list * 'a list
   take'ndrop(xs, k) = olyan pár, amelynek
                       első tagja xs első k db eleme,
                       második tagja pedig xs maradéka
*)
fun take'ndrop (xs, k) =
  let fun td (xs, 0, ts) = (rev ts, xs)
        | td ([], _, ts) = (rev ts, [])
        | td (x::xs, k, ts) = td(xs, k-1, x::ts)
  in
    td(xs, k, [])
  end
```

- take 'ndrop felhasználása, nevezetesen az eredményül átadott pár miatt módosítani kell balpreorder felépítésén.

Bináris fa előállítás listaelemeiből: balPreorder, újra

- Ez volt:

```
fun balPreorder [] = L
  | balPreorder (x::xs) =
    let val k = length xs div 2
    in N(x, balPreorder(List.take(xs, k)),
        balPreorder(List.drop(xs, k)))
    end
```

- Ez lett:

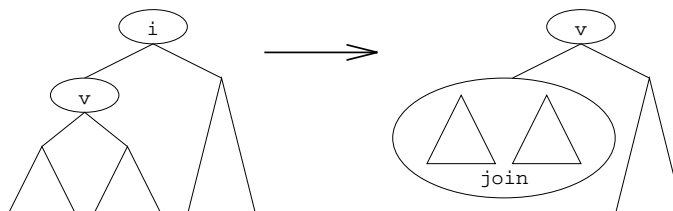
```
(* balPreorder: 'a list -> 'a tree
   balPreorder xs = az xs lista elemeiből álló, preorder ... *)
fun balPreorder [] = L
  | balPreorder (x::xs) =
    let val k = length xs div 2
        val (ts, ds) = take'ndrop(xs, k)
    in N(x, balPreorder ts, balPreorder ds)
    end
```

Bináris fa előállítása lista elemeiből

- ```
(* balInorder: 'a list -> 'a tree
 balInorder xs = az xs lista elemeiből álló, inorder bejárású,
 kiegyensúlyozott fa
*)
fun balInorder [] = L
 | balInorder (x::xs) =
 let val k = length xs div 2
 val ys = List.drop(xxs, k)
 in
 N(hd ys, balInorder(List.take(xxs, k)),
 balInorder(tl ys))
 end
```
- ```
(* balPostorder: 'a list -> 'a tree
   balPostorder xs = az xs lista elemeiből álló, postorder
                    bejárású, kiegyensúlyozott fa
*)
fun balPostorder xs = balPreorder(rev xs)
```
- balInorder take'ndrop-pal való definiálását meghagyjuk gyakorló feladatnak.

Elem rekurzív törlése bináris fából

- Adott értékű *elemet* rekurzív módszerrel *megkeresni* egyszerű feladat.
- Új *elemet beszúrni* sem nehéz: rekurzív módszerrel keresünk egy levelet, és ennek a helyére berakjuk az új értéket. Ha a fa rendezve van, ügyelnünk kell arra, hogy a rendezettség megmaradjon.
- Adott értékű *elemet* vagy *elemeket* rekurzív módszerrel *kitörölni* valamivel nehezebb: ha a törlendő érték az éppen vizsgált részfa gyökerében van, a két részre széteső fa részfáit *egyesíteni* kell, miután a törlést a két részfán már végrehajtottuk.



- Megtehetjük, hogy előbb egyesítjük a két részfát, majd az eredményül kapott fából töröljük az adott értékű elemet.

Elem rekurzív törlése bináris fából (folyt.)

- A join-nal egyesítjük a törlés hatására létrejövő két részfát: a bal részfát lebontja, és közben az elemeit egyesével berakja a jobb részfába.

```
(* join : 'a tree * 'a tree -> 'a tree
   join(b, j) = a b és a j fák egyesítésével létrehozott fa *)
fun join (L, tr) = tr
  | join (N(v, lt, rt), tr) = N(v, join(lt, rt), tr)
```

- A remove rendezetlen bináris fából törli az *i* értékű elem összes előfordulását.

```
(* remove : 'a * 'a tree -> 'a tree
   remove(i, f) = i összes előfordulását törli f-ből *)
fun remove (i, L) = L
  | remove (i, N(v, lt, rt)) =
    if i <> v
    then N(v, remove(i, lt), remove(i, rt))
    else join(remove(i, lt), remove(i, rt))
```

Bináris keresőfák: blookup, binsert

- Rendszerint adott kulcsú elemet keresünk egy rendezett bináris fában, ehhez értékeket kell összehasonlítanunk egymással, ehhez a keresett kulcsnak *egyenlőségi típusúnak* kell lennie (a példában a `string` típust használjuk).
- A függvények *kivételt* jeleznek, ha a keresett kulcsú elem nincs a keresőfában:

```
exception Bsearch of string
```

- A `blookup` függvény adott kulcshoz tartozó értéket ad vissza:

```
(* blookup : (string * 'a) tree * string -> 'a
   blookup(f, b) = az f fában a b kulcshoz tartozó érték
   *)
fun blookup (L, b) = raise Bsearch("LOOKUP: " ^ b)
  | blookup (N((a,x), t1, t2), b) =
    if b < a      then blookup(t1,b)
    else if a < b then blookup(t2, b)
    else x;
```

Bináris keresőfák: bupdate

- A `binsert` függvény egy új kulcsú elemet rak be egy rendezett bináris fába, ha még nincs benne:

```
(* binsert : (string * 'a) tree * (string * 'a) -> (string * 'a) tree
   binsert(f, (b,y)) = az új (b,y) kulcs-érték párral bővített f fa *)
fun binsert (L, (b,y)) = N((b,y), L, L)
  | binsert (N((a, x), t1, t2), (b,y)) =
    if b < a      then N((a, x), binsert(t1, (b,y)), t2)
    else if a < b then N((a, x), t1, binsert(t2, (b,y)))
    else (* a=b *) raise Bsearch("INSERT: " ^ b);
```

- A `bupdate` függvény meglévő kulcsú elembe új értéket ír be egy rendezett bináris fában:

```
(* bupdate : (string * 'a) tree * (string * 'a) -> (string * 'a) tree
   bupdate(f, (b,y)) = az f fa, a b kulcshoz tartozó érték helyén
                       az y értékkel *)
fun bupdate (L, (b,y)) = raise Bsearch("UPDATE: " ^ b)
  | bupdate (N((a,x), t1, t2), (b,y)) =
    if b < a      then N((a,x), bupdate(t1, (b,y)), t2)
    else if a < b then N((a,x), t1, bupdate(t2, (b,y)))
    else (* a=b *) N((b,y), t1, t2);
```

- A függvények *generikussá* tételét meghagyjuk gyakorló feladatnak.

ABSZTRAKCIÓ FÜGGVÉNYEKKEL (ELJÁRÁSOKKAL)

Legnagyobb közös osztó

- Következő példánk a és b legnagyobb közös osztóját számolja ki az euklideszi algoritmussal.
- Az alapgondolat az, hogy ha a -t b -vel osztva r a maradék, akkor a és b közös osztói azonosak b és r közös osztóival.
- A matematikai definíciót most is pontosan követi az SML-függvény.

$$\begin{array}{l} \text{gcd}(a, 0) = a \\ \text{gcd}(a, b) = \text{gcd}(b, a \bmod b) \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{fun gcd (a, 0) = a} \\ \quad | \text{ gcd (a, b) = gcd(b, a mod b)} \end{array} \right.$$

- A *folyamat* iteratív. A lépések száma logaritmikusan nő.

Pontosabban – a *Lamé-tétel* szerint – ha az euklideszi algoritmus egy számpár legnagyobb közös osztóját k lépésben számítja ki, akkor a számpár kisebbik tagja nem lehet kisebb a k -adik Fibonacci-számnál. (Ld. SICP, 1.2.5. szakasz.)

Legyen n az algoritmus kisebbik paramétere. Ha a legnagyobb közös osztó kiszámításához k lépésre van szükség, akkor $n \geq F(k) \approx \Phi^k / \sqrt{5}$. Azaz a k lépésszám valóban az n (Φ alapú) logaritmusával arányos.

Prímteszt

- A `prime` predikátum egy n szám prím voltát teszteli. A `findDivisor` függvény 2-től kezdve megkeresi az n szám legkisebb osztóját. Az n szám prím, ha a legkisebb osztó az n szám maga.
- Az n osztóit 2-től \sqrt{n} -ig kell keresni, így a lépések száma $O(\sqrt{n})$.

```
fun prime n =
  let
    infix divides
    fun smallestDivisor n = findDivisor(n, 2)
    and findDivisor (n, testDivisor) =
      if square testDivisor > n
      then n
      else if testDivisor divides n
      then testDivisor
      else findDivisor(n, testDivisor+1)
    and square x = x * x
    and a divides b = b mod a = 0
  in
    n = smallestDivisor n
  end
```

Gyakorló feladat.

`prime` egyesével lépkedve keresi meg az n legkisebb osztóját. Írjon gyorsabb megoldást!

Prímteszt (folyt.)

- A következő SML-predikátum egy szám prím voltát *valószínűségi módszerrel* teszteli. A lépések száma $O(\lg n)$.
- Az algoritmus a kis Fermat-tételre alapul, amely azt mondja ki, hogy:
ha n prím és $0 < a < n$, akkor a^n modulo n szerint *kongruens* a -val, azaz $a^n \bmod n = a$.
 - Két szám akkor *kongruens* modulo n szerint, ha n -nel osztva mindkettőnek ugyanaz a maradéka. Egy a szám n -nel való osztásának maradékát a modulo n szerinti maradékának, vagy röviden a modulo n -nek is nevezik.
- Ha n nem prím, akkor az $a < n$ számok nagy hányadára nem teljesül a fenti reláció.
- A prímteszt algoritmus a ezek után a következő :
 - Adott n -re véletlenszerűen válasszunk egy $a < n$ számot: ha $a^n \bmod n \neq a$, akkor n nem prím. Ellenkező esetben nagy a valószínűsége, hogy n prím.
 - Válasszunk véletlenszerűen egy másik $a < n$ számot: ha $a^n \bmod n = a$, akkor növekedett annak a valószínűsége, hogy az n prím. Újabb és újabb a értékeket választva egyre biztosabbak lehetünk abban, hogy az n prím.

Prímteszt (folyt.)

- Az `expmod` segédfüggvény a `base` szám `exp`-edik hatványának modulo `m` szerinti maradékát adja eredményül.

```
(* expmod (base, exp, m) = base exp-edik hatványa modulo m
*)
```

```
fun expmod (_, 0, _) = 1
  | expmod (b, e, m) =
    if even e
    then square(expmod(b, e div 2, m)) mod m
    else b * expmod(b, e-1, m) mod m
and even n = n mod 2 = 0
and square x = x * x;
```

- Nagyon hasonló felépítésű `exptFast`-hoz. A lépések száma a kitevő logaritmusával arányos.
- Szükségünk van véletlenszámok előállítására. Részletek az SML alapkönyvtárából:

```
Random.range (min, max) gen = an integral random number in the
  range [min, max). Raises Fail if min > max.
Random.newgen () = a random number generator, taking the seed
  from the system clock.
```

Prímteszt (folyt.)

- Betöltjük a Random könyvtárat:

```
load "Random" ;
```

- `fermatTest` generál egy álvéletlen-számot, és egyszer elvégzi a vizsgálatot:

```
(* fermatTest n = false if n is not prime *)
fun fermatTest n =
  let fun tryIt a = expmod(a, n, n) = a
      in tryIt(Random.range (1, n) (Random.newgen())) )
  end
```

- `fastPrime times`-szor megismétli a vizsgálatot:

```
(* fastPrime (n, times) = true if n passes the prime test
   times times
*)
fun fastPrime (n, 0) = true
  | fastPrime (n, t) = fermatTest n andalso fastPrime(n, t-1)
```

- Ez a megoldás csak nagy valószínűséggel, de nem teljes bizonyossággal ad választ a kérdésre. Például az 561 átmege a Fermat-teszten, bár nem prím.

Függvények mint általános számítási módszerek

- Láttuk, hogy a függvény (ill. általában az eljárás) olyan *absztrakció*, amely – a paraméterként átadott adatok konkrét értékétől függetlenül – összetett műveleteket ír le.
- Az olyan magasabbrendű függvény, amelynek függvény a paramétere, még *magasabb szintű* absztrakció, hiszen az általa megvalósított összetett műveletet nemcsak egyes konkrét adatoktól, hanem egyes konkrét műveletektől is függetlenné tesszük.
- A magasabbrendű függvény (eljárás) tehát valamilyen *általános számítási módszert* fejez ki.
- A következő lapokon két nagyobb példát ismertetünk: általános számítási módszert függvények *zérushelyeinek* és *fixpontjának* a megtalálására.

Egyenlet gyökeinek meghatározása intervallumfelezéssel

- Az intervallumfelezés módszere hatékony eljárás az $f(x) = 0$ egyenlet gyökeinek megtalálására, ahol f folytonos függvény.
- A közismert alapötlet a következő:
 - Megfelelően megválasztott a -ra és b -re, amelyekre $f(a) < 0 < f(b)$, f -nek legalább egy zérushelye van a és b között.
 - A zérushely megtalálásához legyen $x = a + b/2$. Ha $f(x) > 0$, akkor f zérushelyét a és x között, ha $f(x) < 0$, akkor x és b között kell keresnünk.
 - A keresést – a rekurziót – akkor hagyjuk abba, amikor két egymás utáni közelítő érték *eltérése* egy előre meghatározott értéknél kisebb lesz.
- Mivel az eltérés minden lépésben a felére csökken, az f zérushelyének megtalálásához szükséges lépések száma $O(L/T)$, ahol L az intervallum hossza kezdetben, és T a megengedett eltérés.
- A leírt algoritmust valósítja meg a search függvény (ld. a következő lapon):

```
(* search (f, negPoint, posPoint) = root of f x in the
                                negPoint <= x <= posPoint interval
   PRE: f negPoint <= 0 and f posPoint >= 0
*)
```

Egyenlet gyökeinek meghatározása intervallumfelezéssel (folyt.)

```
fun search (f, negPoint, posPoint) =
  let val midPoint = average(negPoint, posPoint)
  in
    if closeEnough(negPoint, posPoint)
    then midPoint
    else let val testValue = f midPoint
         in
            if positive(testValue)
            then search(f, negPoint, midPoint)
            else if negative(testValue)
            then search(f, midPoint, posPoint)
            else midPoint
          end
        end
  end
and average (x, y) = (x+y)/2.0
and closeEnough (x, y) = abs(x-y) < 0.001
and positive x = x >= 0.0
and negative x = x < 0.0
```

Egyenlet gyökeinek meghatározása intervallumfelezéssel (folyt.)

- Az előfeltételek betartását célszerű `search` alkalmazásakor ellenőrizni, nehogy rossz választ kapjunk az SML értelmezőtől.

```
• - search(Math.sin, 4.0, 2.0) (* Helyes az eredménye *)
  > val it = 3.14111328125 : real
```

```
• - search(Math.sin, 2.0, 4.0) (* Hibás az eredménye *)
  > val it = 2.00048828125 : real
```

- A `halfIntervalMethod` függvény elvégzi az ellenőrzést, és jelzi, ha `negPoint` vagy `posPoint` kezdeti értéke nem jó.

```
(* halfIntervalMethod (f, a, b) = root of f x in the
                               a <= x <= b interval
*)
```

- Figyeljük meg az *ügyek szétválasztása* elv alkalmazását: `search` a gyökkeresési stratégiát valósítja meg, `halfIntervalMethod` pedig az előfeltételek meglétét ellenőrzi.

Egyenlet gyökeinek meghatározása intervallumfelezéssel (folyt.)

- ```
fun halfIntervalMethod(f, a, b) =
 let val aValue = f a
 val bValue = f b
 in
 if negative aValue andalso positive bValue
 then search(f, a, b)
 else if negative bValue andalso positive aValue
 then search(f, b, a)
 else print ("Values " ^ makestring a ^ " and " ^
 makestring b ^ " are not of opposite sign.\n")
 end
```

- A `makestring` függvény (típusa `numtxt -> string`) tetszőleges numerikus (`int`, `real`, `word`, `word8`), `char` és `string` típusú értéket `string` típusvá alakít.

- A függvénynek ez a változata hibás, mert az `if-then-else` feltételes kifejezés összes ágának *ugyanolyan típusú* eredményt *kell* adnia, márpedig `print` eredménye nem `int` típusú.

- Megoldás az  $(e; f)$  alakú ún. *szekvenciális kifejezés* használata: az értelmező kiértékeli `e`-t és `f`-et a felírt sorrendben, eredményül pedig `f` értékét adja.

## Egyenlet gyökeinek meghatározása intervallumfelezéssel (folyt.)

```

fun halfIntervalMethod(f, a, b) =
 let val (aValue, bValue) = (f a, f b)
 in
 if negative aValue andalso positive bValue
 then search(f, a, b)
 else if negative bValue andalso positive aValue
 then search(f, b, a)
 else (print ("Values " ^ makestring a ^ " and " ^
 makestring b ^ " are not of opposite sign.\n");
 0.0)
 end;

- halfIntervalMethod(Math.sin, 2.0, 4.0);
> val it = 3.14111328125 : real
- halfIntervalMethod(fn x => x*x*x-2.0*x-3.0, 1.0, 2.0);
> val it = 1.89306640625 : real
- halfIntervalMethod(Math.sin, 2.0, 2.5);
Values 2.0 and 2.5 are not of opposite signs
> val it = 0.0 : real

```

## Függvény fixpontjának meghatározása

- Az  $f(x) = x$  egyenletet kielégítő  $x$  az  $f$  függvény *fixpontja*.
- Egy  $f$  függvény valamely fixpontját megfelelő kezdőértékből kiindulva  $f$  rekurzív alkalmazásával határozhatjuk meg:

$fx, f(fx), f(f(fx)), f(f(f(fx))), \dots$

A rekurzió akkor fejezhető be, amikor már elhanyagolható mértékű a változás.

- A `fixedPoint` függvény paramétere egy pár; ennek első tagja egy függvény, amelynek a fixpontját keressük, a második tagja pedig a fixpont egy első közelítése.

```

(* fixedPoint (f, firstGuess) = fixpoint of f in the proximity
 of firstGuess with tolerance tolerance
*)

```

- Szükségünk van még a közelítés megkívánt pontosságára:

```
val tolerance = 0.00001;
```

## Függvény fixpontjának meghatározása (folyt.)

---

```

fun fixedPoint (f, firstGuess) =
 let
 fun closeEnough (v1, v2) = abs(v1-v2) < tolerance
 fun try guess =
 let
 val next = f guess
 in
 if closeEnough(guess, next)
 then next
 else try next
 end
 in
 try firstGuess
 end;

load "Math";
fixedPoint(Math.cos, 1.0);
fixedPoint(fn y => Math.sin y + Math.cos y, 1.0);

```

## Függvény fixpontjának meghatározása (folyt.)

---

- A fixpontoszámítás hasonlít a négyzetgyökvonás korábban megbeszélte folyamatára: mindkettő azon alapul, hogy addig finomítjuk a közelítést, amíg valamilyen feltétel nem teljesül.
- A négyzetgyökvonás könnyedén megfogalmazható fixpontoszámításként: ha  $x$  négyzetgyöke  $y$ , akkor  $y * y = x$ , azaz  $y = x/y$ . Az  $fy = x/y$  függvény fixpontja tehát az  $x$  négyzetgyöke.

```
fun sqrt x = fixedPoint (fn y => x/y, 1.0);
```

- A megoldásunk rossz, ugyanis nem konvergál! Könnyen belátható:  
Legyen  $x$  négyzetgyökének első közelítése  $y_1$ , a második  $y_2 = x/y_1$ , a harmadik  $y_3 = x/y_2 = x/(x/y_1) = y_1$ . Látható, hogy a folyamat sohasem ér véget.
- Az oszcillációt pl. úgy gátolhatjuk meg, hogy *korlátozzuk* két közelítő érték között a változás mértékét.
- Mivel a helyes válasz mindig az  $y$  közelítő érték és  $x/y$  között van,  $y$ -hoz  $x/y$ -nál *közelebb eső* új közelítő értéként  $y$  és  $x/y$  átlagát választhatjuk:  $y \leftarrow (y + x/y)/2$ .

```
fun sqrt x = fixedPoint (fn y => (y+x/y)/2.0, 1.0);
```

- Ezt a gyakran használható módszert *átlagsillapításnak* (angolul *average damping*) nevezik.

## Függvény mint visszatérési érték

---

- A függvényekről mint absztrakciós eszközökről szólva eddig olyan magasabbrendű függvényeket használtunk, amelyeknek más függvények voltak a paraméterei.
- Most olyan magasabbrendű függvényeket mutatunk be, amelyek *függvényt* (pontosabban *függvényértéket*) adnak eredményül.
- A korábban bemutatott *átlagcsillapítás* sokszor használható módszer, ezért érdemes önálló függvényként megírni: ha adott az  $f$  függvény, elő kell állítani  $x$  és  $fx$  átlagát.

```
(* averageDamp f = f valamely x értékre alkalmazva
 előállítja x és f x átlagát *)
fun averageDamp f = fn x => (x + f x) / 2.0;
```

- Jól látható, hogy `averageDamp`, ha csak egyetlen paraméterre alkalmazzuk, függvényértéket ad eredményül. `averageDamp` részlegesen alkalmazható függvény.
- Példa `averageDamp` alkalmazására:

```
(averageDamp (fn x => x*x)) 10.0; (* 10.0 és 100.0 átlaga *)
```

- A kiértékelés sorrendje miatt a külső zárójelpár el is hagyható:

```
averageDamp (fn x => x*x) 10.0;
```

## Függvény mint visszatérési érték (folyt.)

---

- `averageDamp` definíciója felírható (*szintaktikai édesítőszerrel*).

```
fun averageDamp f x = (x + f x) / 2.0;
```

- `sqrt` `averageDamp`-pel felírt változata explicitté teszi a *fixpontmeghatározás* és az *átlagcsillapítás* módszerét, továbbá az  $y = x/y$  egyenlet *használatát*.

```
fun sqrt x = fixedPoint(averageDamp (fn y => x/y), 1.0);
sqrt 4.0;
```

- Tanulság: egy folyamatot sokféle eljárással leírhatunk, de a *lényegét* sokkal könnyebb megérteni, ha *megfelelően megválasztott absztrakciókat* vezetünk be.
- Még egy példa a bemutatottak alkalmazására: az  $x$  köbgyöke az  $y \mapsto x/y^2$  – SML-jelöléssel az `fn y => x/(y*y)` – függvény fixpontja. A megoldás már kész is van!

```
fun cubeRoot x = fixedPoint(averageDamp (fn y => x/y/y), 1.0);
cubeRoot 8.0;
```



## Függvény mint visszatérési érték (folyt.): az általános Newton-módszer

- Legyen  $x \mapsto g(x)$  egy differenciálható függvény és  $f(x) = x - g(x)/g'(x)$ , ahol  $g'(x)$  a  $g$  függvény  $x$  szerinti deriváltja. Ekkor a  $g(x) = 0$  egyenlet  $x$  megoldása az  $x \mapsto f(x)$  függvény egy fixpontja.
- Az *általános Newton-módszer* a fixpontmódszer egy alkalmazása az  $f$  függvény egy fixpontjának megtalálására. Számos  $g$  függvényre és megfelelően megválasztott  $x$  értékre az általános Newton-módszer gyorsan konvergál.
- Először is azt a `deriv` függvényt kell definiálnunk, amelynek (az `averageDamp` függvényhez hasonlóan) függvény a paramétere, és függvényt ad eredményül.
- Ha  $g$  függvény és  $dx$  egy kis szám, akkor a  $g$  függvény  $g'$  deriváltja az a függvény, amelynek értéke bármely  $x$  számra a következő:  $g'(x) = (g(x + dx) - g(x))/dx$ .

```
(* deriv g = g deriváltja
*)
val dx = 0.00001;
fun deriv g = fn x => (g(x+dx) - g x) / dx;
```

- Például az  $x \mapsto x^3$  függvény deriváltja  $x = 5$ -re (pontos értéke 75):  

```
let fun cube x = x*x*x in deriv cube 5.0 end;
```

## Függvény mint visszatérési érték (folyt.): a Newton-módszer fixpont-folyamatként

- `deriv` felhasználásával az általános Newton-módszer definiálható *fixpont-folyamatként*:

```
fun newtonTransform g x = x - (g x / deriv g x)
and newtonsMethod g guess = fixedPoint(newtonTransform g, guess)
```

- Példa `newtonsMethod` használatára:

```
fun sqrt x = newtonsMethod (fn y => y*y-x) 1.0;
sqrt 16.0;
```

- Két általános módszer egy-egy alkalmazását láttuk egy szám négyzetgyökének kiszámítására: az egyik a fixpont-, a másik a Newton-módszer.
- Mivel az utóbbi is a fixpontmódszeren alapul, valójában a fixpontmódszer kétféle alkalmazását láttuk.
- Mindkét esetben egy függvényből indulunk ki, és kiszámítjuk valamely transzformáltjának egy fixpontját.
- Ezt az általános módszert is definiálhatjuk eljárásként (függvényként), ezt mutatjuk be a következő dián.

## Függvény mint visszatérési érték (folyt.): a fixpontmódszer kétféle alkalmazása

---

- (\* fixedPointOfTransform (g, transform, guess) =  
a fixed point of (transform g) with the initial guess guess  
\*)  
fun fixedPointOfTransform (g, transform, guess) =  
fixedPoint(transform g, guess)

- Ez volt sqrt fixpontkeresésén alapuló első változata:

```
fun sqrt x = fixedPoint(averageDamp (fn y => x/y), 1.0)
```

- Átírva az általános módszert megvalósító függvénnyel:

```
fun sqrt x = fixedPointOfTransform (fn y => x/y,

averageDamp, 1.0)
```

- Ez volt sqrt Newton általános módszerét használó második változata:

```
fun sqrt x = newtonsMethod (fn y => y*y-x) 1.0;
```

- Átírva az általános módszert megvalósító függvénnyel:

```
fun sqrt x = fixedPointOfTransform (fn y => y*y-x,

newtonTransform, 1.0)
```

## LUSTA KIFEJEZÉSEK AZ ALICE-BEN

---

## Lusta kifejezés és függvény

---

- Egy kifejezés lusta kiértékelése írható elő a `lazy` kulcsszóval:

```
val zs = lazy [1,2,3,4,5,6,7,8,9];
val zs : int list = _lazy
```

- Az ilyen kifejezést lusta kifejezésnek nevezzük. Kiértékelésére csak akkor kerül sor, ha *szükség* van rá, azaz ha egy mohó műveletben argumentumként használjuk.
- Mindig mohó kiértékelésűek a következő kifejezések:
  - mintaillesztésben a vizsgált érték,
  - függvényalkalmazásban a függvényérték,
  - kivétel jelzésében a kivételt alkotó érték,
  - primitív műveletben (pl. `op+`, `op=`) az operandus, amelyre a műveletnek szüksége van.

- A következő példában a mohó `hd`-t függvényt alkalmazzuk a lusta `zs`-re:

```
hd zs;
val it : int = 1
```

## Lusta kifejezés és függvény (folyt.)

---

- Első kiértékelése után a lusta kifejezés (esetleg csak egy részkifejezésének) lusta volta megszűnik.
- Az egyszer kiszámított lusta (rész)kifejezés értéke a továbbiakban az *eltárolt* érték lesz:

```
zs;
val it : int list = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]
```

- A `hd` és a `tl` lusta változata (a név végén a `z` a függvény lusta – lazy – voltára emlékeztet):

```
fun lazy headz (x::_) = x
 | headz [] = raise Empty;
val headz : 'a list -> 'a = _fn

fun lazy tailz (_::xs) = xs
 | tailz [] = raise Empty;
val tailz : 'a list -> 'a list = _fn
```

## Lusta kifejezés és függvény (folyt.)

---

- Példák:

```

headz zs;
val it : int = _lazy

0 + headz zs;
val it : int = 1

zs;
val it : int list = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]

tailz zs;
val it : int list = _lazy

[] @ tailz zs;
val it : int list = _lazy

tailz zs @ [];
val it : int list = [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]

```

- A `[] @ tailz zs` kifejezésben az eredmény előállításához a `@` operátornak *nincs szüksége* a jobb oldali operandusának kiszámítására, ezért az eredmény is lusta kiértékelésű lesz.

## Lusta lista

---

- A lusta lista olyan *nem korlátos méretű* lista, amelynek előnyös tulajdonságai mellett hátrányai, veszélyei is vannak, pl.
  - egy lusta lista *bármely részét* megjeleníthetjük, de *sohasem az egészet*;
  - két lusta lista elemeiből páronként képezhetünk egy harmadikat, de *nem számíthatjuk ki* egy lusta lista *elemeinek összegét*, nem kereshetjük meg benne *a legkisebbet*, nem fordíthatjuk meg *az elemek sorrendjét* stb.;
  - egy program befejeződése helyett csak azt igazolhatjuk, hogy az eredmény *tetszőleges véges része véges idő alatt* előáll.
- Most a `fromz` függvény lusta változatát definiáljuk: `fromz k` olyan lusta listát hoz létre, amelynek az elemei `fromz k`-tól kezdve egyesével növekvő számtani sorozatot alkotnak:

```

fun lazy fromz k = k :: fromz(k+1);
val fromz : int -> int list = _fn

val xs = fromz 3;
val xs : int list = _lazy

```

## Lusta lista (folyt.)

---

- Ha például `xs` fejét kiszámíttatjuk, akkor `xs`-nek már csak a farka marad lusta kiértékelésű:

```
xs;
val xs : int list = _lazy

hd xs;
val it : int = 3

xs;
val it : int list = 3 :: _lazy
```

- További példák `headz` és `tailz` használatára:

```
headz(fromz 3);
val it : int = _lazy

headz(fromz 3) + 0;
val it : int = 3
```

## Lusta lista (folyt.)

---

- További példák `headz` és `tailz` használatára (folyt.):

```
tailz(fromz 3);
val it : int list = _lazy

headz(tailz(fromz 3)) + 0;
val it : int = 4
```

- De vigyázzunk! Veremtúlsorduláshoz vezet a következő kifejezés kiértékelése:

```
tailz(fromz 3) @ [];
```

- A `List.take` és `List.drop` függvényt lusta listára is alkalmazhatjuk a lusta lista egy részének kiértékelésére.

```
List.take(fromz 1, 5);
val it : int list = [1, 2, 3, 4, 5]

List.drop(fromz 1, 5);
val it : int list = _lazy

hd(List.drop(fromz 1, 5));
val it : int = 6
```

## Egyszerű függvények lusta listákra

---

- A kiszámíthatóság érdekében egy függvény eredményének tetszőleges véges része az argumentum véges részétől függhet csak.
- Amikor az eredményre szükség van, akkor ez az igény váltja ki az argumentum feldolgozását.
- A következő lusta függvény egy lusta lista egész elemeinek a négyzetét számítja ki.

```
fun lazy squarez [] = []
 | squarez (x::xs) = x*x :: squarez xs;
val squarez : int list -> int list = _fn

squarez(fromz 1);
val it : int list = _lazy

List.take(squarez(fromz 1), 10);
val it : int list = [1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100]
```

## Egyszerű függvények lusta listákra (folyt.)

---

- Két lusta lista hasonlóan adható össze:

```
fun lazy addz (x::xs, y::ys) = x+y :: addz(xs, ys)
 | addz _ = [];
val addz : int list * int list -> int list = _fn

addz(fromz 1000, squarez(fromz 1));
val it : int list = _lazy

List.take(addz(fromz 1000, squarez(fromz 1)), 7);
val it : int list = [1001, 1005, 1011, 1019, 1029, 1041, 1055]
```

## Egyszerű függvények lusta listákra (folyt.)

---

- Az `appendz` függvény addig nem nyúl `ys`-hez, amíg `xs` ki nem ürül – vagyis csak akkor nyúl hozzá, ha `xs` korlátos.

```
fun lazy appendz (x::xs, ys) = x :: appendz (xs, ys)
 | appendz ([], ys) = ys;
val appendz : 'a list * 'a list -> 'a list = _fn

appendz([1,2,3],[4,5,6]);
val it : int list = _lazy

appendz([1,2,3],[4,5,6]) @ [];
val it : int list = [1, 2, 3, 4, 5, 6]

List.take(appendz([1,2,3], fromz 10), 7);
val it : int list = [1, 2, 3, 10, 11, 12, 13]

List.take(appendz(fromz 10, [4,5,6]), 7);
val it : int list = [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]
```

## Magasabbrendű függvények lusta listákra

---

- A `mapz` lusta változata:

```
fun lazy mapz f [] = []
 | mapz f (x::xs) = f x :: mapz f xs;
val mapz : ('a -> 'b) -> 'a list -> 'b list = _fn
```

- A `filterz` lusta változata:

```
fun lazy filterz p [] = []
 | filterz p (x::xs) = if p x
 then x :: filterz p xs
 else filterz p xs;
val filterz : ('a -> bool) -> 'a list -> 'a list = _fn
```

- Az előző szakaszban definiált `squarez`-t egyszerű felírni `mapz`-vel:

```
val squarez = mapz (fn x => x*x);
val squarez : int list -> int list = _fn
```

- Az `iteratez` a `fromz` egy általánosítása:

```
fun lazy iteratez f x = x :: iteratez f (f x);
val iteratez : ('a -> 'a) -> 'a -> 'a list = _fn
```

## Magasabbrendű függvények lusta listákra (folyt.)

---

- Olyan számsorozatot állítunk elő, amelyben 50-nél nagyobb, 7-esre végződő egészek vannak:

```
val sevens = filterz (fn n => n mod 10 = 7) (fromz 50);
val sevens : int list = _lazy

List.take(sevens, 8);
val it : int list = [57, 67, 77, 87, 97, 107, 117, 127]
```

- Egy példa iteratez alkalmazására:

```
val zs = iteratez (fn x => x / 2.0) 1.0;
val zs : real list = _lazy

List.take(zs, 5);
val it : real list = [1.0, 0.5, 0.25, 0.125, 0.0625]
```

- fromz-t az iteratez-vel így definiálhatjuk:

```
val fromz = iteratez (fn k => k+1);
val fromz : int -> int list = _fn

List.take(fromz 3, 6);
val it : int list = [3, 4, 5, 6, 7, 8]
```

## Álvéletlenszámok

---

- Hagyományos álvéletlenszám-generátorok: olyan eljárások, amelyek egy *frissíthető változóban* tárolják a *seed* (mag) értéket – ebből állítják elő egy következő hívásnál a következő álvéletlenszámot.
- Lusta listaként megvalósítva a következő álvéletlenszám csak *szükség esetén* áll elő.

```
local val a = 16807.0 and m = 2147483647.0
 (* nextrandom seed = a következő álvéletlenszám
 nextrandom : real -> real
 *)
 fun nextrandom seed =
 let
 val t = a * seed
 in
 t - real(floor(t/m))*m
 end
in
 fun randomz s = mapz (fn x => x/m) (iteratez nextrandom s)
end;
val randomz : real -> real list = _fn
```



## Álvéletlenszámok (folyt.)

- Ha a `nextrandom`-ot 1.0 és 21474836467.0 közötti `seed`-re alkalmazzuk, ugyanebbe a tartományba eső más értéket állít elő az `a * seed mod m` művelettel. (A valós számokat a túlsordulás elkerülésére használjuk.)
- A lusta lista előállítására az `iteratez`-t a `nextrandom`-ra és a `seed` valós számmá alakított kezdőértékére alkalmazzuk. A `mapz` gondoskodik arról, hogy a lusta listában minden értéket eloszunk `m`-mel, és így a `randomz` 1.0-nél kisebb nemnegatív értékeket adjon eredményül. Látható, hogy a lusta lista a megvalósítás részleteit szépen elrejtí a felhasználó elől.
- Az előállított álvéletlen-számok tehát 1.0-nél kisebb nemnegatív valós számok; `mapz`-val alakíthatjuk át őket 0 és 9 közötti egészekké:

```
val rs = mapz (floor o (fn x => 10.0 * x)) (randomz 1.0);
val rs : Int.int list = _lazy

List.take(rs, 9);
val it : Int.int list = [0, 0, 1, 7, 4, 5, 2, 0, 6]
```

## Prímszámok előállítása *eratosztenészi szítával*

1. Vegyük az egészek 2-vel kezdődő sorozatát: 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...
  2. Töröljük az összes 2-vel osztható számot: 3, 5, 7, 9, 11, ...
  3. Töröljük az összes 3-mal osztható számot: 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...
  4. Töröljük az összes ...
- A sorozat első eleme mindig a következő prím. A sorozatban azok a számok maradnak benne, amelyek az eddig előállított prímeikkel nem oszthatók.

```
fun siftz p = filterz (fn n => n mod p <> 0);
val siftz : int -> int list -> int list = _fn
```

- A `siftz` a `p` argumentum többszöröseit törli egy lusta listából.
- A `sievez`-nek már csak ismételten alkalmaznia kell `siftz`-t a megfelelő lusta listára.

```
fun lazy sievez [] = []
 | sievez (p::ps) = p :: sievez(siftz p ps);
val sievez : int list -> int list = _fn
```

## Prímszámok előállítása *eratosztenészi szitával* (folyt.)

---

- Mivel most a lusta lista sohasem lehet üres, nem kellene az üres lusta listára illeszkedő változatot írunk, de nélküle az Alice arra figyelmeztetne, hogy nem fedtünk le minden esetet.

```
fun lazy sievez (p::ps) = p :: sievez(siftz p ps);
1.9-1.49: warning: match is not exhaustive, because e.g.
 nil
is not covered
val sievez : int list -> int list = _fn
```

- Példa:

```
val primes = sievez(fromz 2);
val primes : int list = _lazy

List.take(primes, 11);
val it : int list = [2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31]
```

## Négyzetgyökvonás Newton-Raphson módszerrel

---

- nextapprox  $x_k$ -ből a gyök egy  $x_{k+1}$  közelítését számítja ki az  $x_{k+1} = \frac{a}{x_k} + x_k$  képlettel:

```
fun nextapprox a x = (a/x+x)/2.0;
val nextapprox : real -> real -> real = _fn
```

- A befejeződés megállapítására egyszerű tesztet írunk:

```
exception Impossible;
fun within (eps : real) (x::(yys as y::yys)) =
 if abs(x-y) <= eps
 then y
 else within eps yys
 | within _ _ = raise Impossible;
val within : real -> real list -> real = _fn
```

- A második klóz azért kell, hogy ne kapjunk figyelmeztetést a lefedetlen esetek miatt: mivel a within függvényt lusta listára fogjuk alkalmazni, ezt a klózt az Alice sohasem értékeli ki.

## Négyzetgyökvonás Newton-Raphson módszerrel (folyt.)

---

- Ezzel a qroot függvény első változata:

```
fun qroot a = within 1e~6 (iteratez (nextapprox a) 1.0);
val qroot : real -> real = _fn

qroot 5.0;
val it : real = 2.23607
```

- A programban a *leállásvizsgálatot* világosan elválasztjuk a *közelítések előállításától*.
- A leállásvizsgálat (within) olyan függvény, amely egy valós számból és egy valós számokat tartalmazó listából egy valós számot állít elő.
- Itt az abszolút különbséget ( $|x - y| < \varepsilon$ ) teszteljük, de vizsgálhatnánk pl. a relatív különbséget ( $|\frac{x}{y} - 1| < \varepsilon$ ) vagy az  $\frac{|x-y|}{\frac{|x|+|y|}{2}+1} < \varepsilon$  feltételt.
- A feladat többi része független attól, hogy milyen leállásvizsgálatot alkalmazunk, és általában is így célszerű megírni a programjainkat.

## Négyzetgyökvonás Newton-Raphson módszerrel (folyt.)

---

- A közelítések előállítását célszerű még világosabban elhatárolni a program többi részétől. approxz a közelítések lusta listáját állítja elő:

```
fun approxz a =
 let
 fun nextapprox x = (a/x+x)/2.0
 in
 iteratez nextapprox 1.0
 end;
val approxz : real -> real list = _fn
```

- Ezzel a qroot függvény egy tisztább változata:

```
val qroot = within 1e~6 o approxz;
val qroot : real -> real = _fn

qroot 5.0;
val it : real = 2.23607
```

## Keresztszorzatokból álló lista

---

- Legyen  $xs$  és  $ys$  egy-egy lusta lista. Képezzünk új lusta listát az  $(x_i, y_j)$  párokból, ahol  $x_i \in xs$  és  $y_j \in ys$ !
- A nem korlátos méretű listák kezelése különleges problémákat vet fel, ezért oldjuk meg először a feladatot korlátos méretű listákkal, `map` és `pair` alkalmazásával.
- $xs$  és  $ys$  egy-egy lista. Képezzünk listát az  $(x_i, y_j)$  párokból, ahol  $x_i \in xs$  és  $y_j \in ys$ !
- `map-et`, `pair-t` és `List.concat`-ot alkalmazva juthatunk el a keresett függvényhez.

```
fun pair x y = (x, y);
val pair : 'a -> 'b -> 'a * 'b = _fn
```

- A `pair-t` a `map`-pel az  $ys$  lista elemeire alkalmazva olyan párokból álló listát kapunk, amelyben a párok első tagja a rögzített  $x$  érték, a második tagja pedig az  $ys$  egy-egy eleme.

```
map (pair x) ys
```

## Keresztszorzatokból álló lista (folyt.)

---

- Hogyan érhetjük el, hogy az  $x$  végigfusson az  $xs$  lista összes elemén? Az eddig szabad  $x$ -et kössük le egy függvény argumentumaként:

```
fn x => map (pair x) ys
```

majd alkalmazzuk újból a `map-et` erre a függvényre és  $xs$ -re:

```
map (fn x => map (pair x) ys) xs
```

- Listák listáját kapjuk eredményül, mert a belső `map` már listát adott vissza, amelynek minden eleméből újabb listát képeztünk a külső `map`-pel.

```
fun pairss xs ys = map (fn x => map (pair x) ys) xs;
val pairss : 'a list -> 'b list -> ('a * 'b) list list = _fn
```

- `List.concat` elvégzi a szükséges simítást:

```
fun pairs xs ys = List.concat(pairss xs ys);
val pairs : 'a list -> 'b list -> ('a * 'b) list = _fn
```

## Keresztszorzatokból álló lusta lista

- A pairss-hez hasonlóan állíthatjuk elő párok lusta listájának lusta listáját:

```
fun pairssz xs ys = mapz (fn x => mapz (pair x) ys) xs;
val pairssz : 'a list -> 'b list -> ('a * 'b) list list = _fn
```

- Az eredmény véges része kiírható takeRect-tel, amely a bal felső saroktól számított első m sorból és n oszlopból álló *téglalapot* jeleníti meg az xss lusta listából:

```
fun takeRect (xss, (m, n)) =
 map (fn y => List.take(y, n)) (List.take(xss, m));
val takeRect : 'a list list * (int * int) -> 'a list list = _fn
```

- Példa: olyan lusta lista, amelyben a párok első tagja az egymás után következő egészek 30-tól kezdve, második tagja pedig a prímszámok 2-től kezdve:

```
val pss = pairssz (fromz 30) (sievez(fromz 2));
val pss : (int * int) list list = _lazy

takeRect(pss, (3, 5));
val it : (int * int) list list =
 [[(30, 2), (30, 3), (30, 5), (30, 7), (30, 11)],
 [(31, 2), (31, 3), (31, 5), (31, 7), (31, 11)],
 [(32, 2), (32, 3), (32, 5), (32, 7), (32, 11)]]
```

## Keresztszorzatokból álló lusta lista (folyt.)

- Mostantól a pss már részben ki van értékelve:

```
pss;
val it : (int * int) list list =
 ((30, 2) :: (30, 3) :: (30, 5) :: (30, 7) :: (30, 11) :: _lazy)
 ((31, 2) :: (31, 3) :: (31, 5) :: (31, 7) :: (31, 11) :: _lazy)
 ((32, 2) :: (32, 3) :: (32, 5) :: (32, 7) :: (32, 11) :: _lazy)
 _lazy
```

- Ha ki akarunk símitani egy lusta listát, a List.concat függvénnyel nem megyünk semmire, ugyanis appendz (xs, ys) = xs. Ellenben két lusta lista elemei például *páronként egymásba ékelhető* – interleavez a *rekurzív hívásban* váltogatja a két lusta listát:

```
fun lazy interleavez ([], ys) = ys
 | interleavez (x::xs, ys) = x :: interleavez(ys, xs);
val interleavez : 'a list * 'a list -> 'a list = _fn
```

- Példa interleavez alkalmazására:

```
List.take(interleavez(fromz 0, fromz 50), 10);
val it : int list = [0, 50, 1, 51, 2, 52, 3, 53, 4, 54]
```

## Keresztszorzatokból álló lusta lista (folyt.)

---

- `enumeratez` lusta listák lusta listájából egyetlen lusta listát állít elő. Jelöljük a kétszeres mélységű lusta lista fejét `xs`-sel és a farkát `xss`-sel; alkalmazzuk `enumeratez`-t rekurzívan `xss`-re, majd az eredményt ékeljük `xs`-be:

```
fun lazy enumeratez [] = []
 | enumeratez (xs::xss) = interleavez(xs, enumeratez xss);
val enumeratez : 'a list list -> 'a list = _fn
```

- Állítsuk elő például a pozitív egészekből álló párok egy lusta listáját!

```
val pozIntss = pairssz (fromz 1) (fromz 1);
val pozIntss : (int * int) list list = _lazy

List.take(enumeratez pozIntss, 15);
val it : (int * int) list =
 [(1, 1), (2, 1), (1, 2), (3, 1), (1, 3), (2, 2), (1, 4), (4, 1)
 (1, 5), (2, 3), (1, 6), (3, 2), (1, 7), (2, 4), (1, 8)]
```

## LISTÁK RENDEZÉSE

---

## Listák rendezése (folyt.)

---

- inssort (beszúró rendezés),
- selSort (kiválasztó rendezés),
- quicksort (gyorsrendezés),
- tmsort (felülről lefelé haladó összefésülő rendezés),
- bmsort (**alulról fölfelé haladó összefésülő rendezés**),
- smsort (**simarendezés**).

Az alulról fölfelé haladó rendezés O'Keefe-féle algoritmusát és a simarendezés algoritmusát csak a jeles osztályzat eléréséhez kell ismerni.

## Alulról fölfelé haladó összefésülő rendezés

---

- Az alulról fölfelé haladó összefésülő rendezés (*bottom-up merge sort*) legegyszerűbb változata az eredeti  $k$  hosszúságú listát  $k$  darab egyelemű listára bontja, majd a szomszédos listákat összefuttatja, így 2, 4, 8, 16 stb. elemű listákat állít elő.
- R. O'Keefe algoritmusa (1982) lépésről lépésre futtatja össze az egyforma hosszú részlistákat, de csak az utolsó lépésben rendezi az összeset. Az alábbi példában az összefuttatott részlistákat egymás mellé írással jelöljük:

```

A B C D E F G H I J K
AB C D E F G H I J K
AB CD E F G H I J K
ABCD E F G H I J K
ABCD EF G H I J K
ABCD EF GH I J K
ABCD EFGH I J K
ABCDEF GH I J K
ABCDEF GH IJ K
...

```

## Alulról fölfelé haladó összefésülő rendezés (folyt.)

---

- `bmsort` a `sorting` segédfüggvényt használja, amelynek
  - első argumentuma a rendezendő lista,
  - második argumentuma a már rendezett részlisták akkumulátora,
  - harmadik argumentuma az adott lépésben összefuttatandó elem sorszáma.

```
(* bmsort xs = az xs elemeinek a <= reláció szerint
 rendezett listája
 bmsort : int list -> int list
*)
fun bmsort xs = sorting(xs, [], 0)
```

## Alulról fölfelé haladó összefésülő rendezés (folyt.)

---

- Ha a rendezendő lista (`xs`) még nem fogyott el, soron következő eleméből `sorting` egyelemű listát (`[x]`) képez, és ezt a már rendezett részlisták listája (`lss`) elé fűzve meghívja a `mergepairs` segédfüggvényt. `mergepairs` az argumentumként átadott lista két azonos hosszúságú bal oldali részlistáját fűzi egybe, feltéve persze, hogy vannak ilyenek. `k` az éppen átadott elem sorszáma. Ha a rendezendő lista kiürült, `sorting` a kétszintű lista egyetlen elemét, a rendezett listát adja eredményül.

```
(* sorting(xs, lss, k) = a még rendezetlen xs lista elemeit
 berakja a rendezett részlisták összesen
 már k elemet tartalmazó lss listájába
 sorting : int list * int list list * int -> int list
 PRE: k >= 0
*)
fun sorting (x::xs, lss, k) =
 sorting(xs, mergepairs([x]::lss, k+1), k+1)
 | sorting ([], lss, k) = hd(mergepairs(lss, 0))
```



## Alulról fölfelé haladó összefésülő rendezés (folyt.)

- `mergepairs` egyetlen listában gyűjti a már összefuttatott részlistákat. Az éppen átadott elem `k` sorszámából dönti el, hogy mit kell csinálnia a következő részlistával.

```
(* mergepairs(llss, n)= az n elemet tartalmazó, már
 rendezett llss lista első két részlistáját,
 ha egyforma a hosszuk, összefuttatja
mergepairs : int list list -> int list list
PRE: n >= 0
```

```
*)
```

```
fun mergepairs (llss as ls1::ls2::lss, n) =
 (* legalább kételemű a lista *)
 if n mod 2 = 1
 then llss
 else mergepairs(merge(ls1, ls2)::lss, n div 2)
| mergepairs (lss, _) = lss (* egyelemű a lista *)
```

- Ha  $n$  páratlan, `mergepairs` a listát változtatás nélkül adja vissza, ha páros, akkor az `llss` lista elején álló két, egyforma hosszú listát egyetlen rendezett listává futtatja össze.  $n=0$ -ra `mergepairs` az összes listák listáját olyan listává futtatja össze, amelynek egyetlen eleme maga is lista.

## Alulról fölfelé haladó összefésülő rendezés (folyt.)

- A legrosszabb esetben  $O(n \cdot \log n)$  lépésre van szükség.
- A függvények működését egy példán is bemutatjuk. A kezdőhívás legyen

```
bmsort [1,2,3,4,5,6,7,8,9]
----> sorting ([1,2,3,4,5,6,7,8,9], [], 0)
```

- Amíg `sorting` első argumentuma a nem üres (`x::xs`) lista, `sorting` saját magát hívja meg. A rekurzív hívás
  - első argumentuma a lépésenként egyre rövidülő `xs` lista,
  - második argumentuma a `mergepairs([x]::lss, k+1)` függvényalkalmazás eredménye, ahol kezdetben `lss = []`,
  - harmadik argumentuma  $(k+1)$  a már feldolgozott listaelemek száma.

```
fun sorting (x::xs, lss, k) =
 sorting(xs, mergepairs([x]::lss, k+1), k+1)
| sorting ([], lss, k) = hd(mergepairs(lss, 0))
```

## Alulról fölfelé haladó összefésülő rendezés (folyt.)

- A következő táblázatos elrendezés
  - `mergепairs` mindkét argumentumát,
  - a rekurzív `sorting` hívás itt `j`-vel jelölt 3. argumentumát, `k+1`-et, és
  - bináris számként `k`-t mutatja lépésről lépésre.
- A `sorting` függvény hívja `mergепairs`-t azokban a sorokban, amelyekben a `j` új értéket vesz föl, a többi helyen `mergепairs` hívása rekurzív.
- Ne feledjük, hogy `mergепairs`-nek listák listája az első argumentuma!
- A táblázat utolsó oszlopa a vonatkozó magyarázatra hivatkozik.
- Vegyük észre, hogy kapcsolat van az `lss` első eleme utáni listaelemek hossza és a `k` bitjei között! Ha `k` valamelyik bitje 1, akkor (balról jobbra haladva) az `lss` megfelelő listaelemének a hossza az adott bit helyiértékével egyenlő. A 0 értékű biteknek megfelelő listaelemek „hiányoznak” `lss`-ből.

```
fun sorting (x::xs, lss, k) =
 sorting(xs, mergепairs([x]::lss, k+1), k+1)
 | sorting([], lss, k) = hd(mergепairs(lss, 0))
```

## Alulról fölfelé haladó összefésülő rendezés (folyt.)

|                                        |                |                |                |    |                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|----------------------------------------|----------------|----------------|----------------|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <code>lss</code>                       | <code>n</code> | <code>j</code> | <code>k</code> |    | <code>fun sorting (x::xs, lss, k) =</code>                                                                                                                                                                                                                                   |
| <code>[[1]]</code>                     | 1              | 1              | 0              | m1 | <code>    sorting(</code>                                                                                                                                                                                                                                                    |
| <code>[[2],[1]]</code>                 | 2              | 2              | 1              | m2 | <code>        xs,</code>                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <code>[[1,2]]</code>                   | 1              |                |                | m3 | <code>        mergепairs([x]::lss, k+1),</code>                                                                                                                                                                                                                              |
| <code>[[3],[1,2]]</code>               | 3              | 3              | 10             | m3 | <code>        k+1</code>                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <code>[[4],[3],[1,2]]</code>           | 4              | 4              | 11             | m2 | <code>    )</code>                                                                                                                                                                                                                                                           |
| <code>[[3,4],[1,2]]</code>             | 2              |                |                | m2 | <code>    sorting([], lss, k) =</code>                                                                                                                                                                                                                                       |
| <code>[[1,2,3,4]]</code>               | 1              |                |                | m3 | <code>    hd(mergепairs(lss, 0))</code>                                                                                                                                                                                                                                      |
| <code>[[5],[1,2,3,4]]</code>           | 5              | 5              | 100            | m3 | <b>m1:</b> Az argumentumként átadott listának egyetlen eleme van (maga is lista), ezért az argumentumot <code>mergепairs</code> második klóza változtatás nélkül visszaadja az őt hívó <code>sorting</code> -nak.                                                            |
| <code>[[6],[5],[1,2,3,4]]</code>       | 6              | 6              | 101            | m2 | <b>m2:</b> <code>n</code> páros, ez azt jelzi, hogy az argumentumként átadott lista első két eleme egyforma hosszú lista, amelyeket <code>merge</code> egyetlen rendezett listává futtat össze, majd az eredménnyel <code>mergепairs</code> első klóza meghívja saját magát. |
| <code>[[5,6],[1,2,3,4]]</code>         | 3              |                |                | m3 |                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| <code>[[7],[5,6],[1,2,3,4]]</code>     | 7              | 7              | 110            | m3 | <b>m3:</b> <code>n</code> páratlan, ez azt jelzi, hogy az argumentumként átadott lista első két eleme nem egyforma hosszú lista, ezért az argumentumot <code>mergепairs</code> első klóza változtatás nélkül visszaadja az őt hívó <code>sorting</code> -nak.                |
| <code>[[8],[7],[5,6],[1,2,3,4]]</code> | 8              | 8              | 111            | m2 |                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| <code>[[7,8],[5,6],[1,2,3,4]]</code>   | 4              |                |                | m2 |                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| <code>[[5,6,7,8],[1,2,3,4]]</code>     | 2              |                |                | m2 |                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| <code>[[1,2,3,4,5,6,7,8]]</code>       | 1              |                |                | m3 |                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| <code>[[9],[1,2,3,4,5,6,7,8]]</code>   | 9              | 9              | 1000           | m3 |                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| <code>[[9],[1,2,3,4,5,6,7,8]]</code>   | 0              | 0              |                | m4 | <b>m4:</b> <code>n=0</code> , az összes listák listáját olyan listává kell összefuttatni, amelynek egyetlen lista az eleme.                                                                                                                                                  |
| <code>[[1,2,3,4,5,6,7,8,9]]</code>     |                |                |                |    |                                                                                                                                                                                                                                                                              |

## Simarendezés

- Az applikatív simarendezés (*smooth sort*) algoritmus a O'Keefe alulról fölfelé haladó rendezéséhez hasonló, de nem egyelemű listákat, hanem növekvő *futamokat* állít elő.
- Ha a futamok száma  $n$ -től független, azaz a lista majdnem rendezve van, akkor az algoritmus végrehajtási ideje  $O(n)$ , és a legrosszabb esetben is legfeljebb csak  $O(n \cdot \log n)$ .

(\* nextrun (run, xs) = olyan pár, amelynek első tagja xs egy növekvő sorrendű futama, második tagja pedig xs maradéka

```
nextrun : int list * int list -> int list * int list
*)
```

```
fun nextrun (run, x::xs) =
 if x < hd run
 then (rev run, x::xs)
 else nextrun(x::run, xs)
| nextrun (run, []) = (rev run, [])
```

- nextrun eredménye egy pár, amelynek első tagja a futam (egy növekvő számsorozat), a második tagja pedig a rendezendő lista maradéka.
- A futam csökkenő sorrendben bővül, kilépéskor a futamot meg kell fordítani.

## Simarendezés (folyt.)

- smsorting a futamokat ismételten előállítja és összefuttatja:

(\* smsorting(xs, lss, k) = a még rendezetlen xs lista elemeit berakja a rendezett részlisták összesen már k elemet tartalmazó lss listájába

```
smsorting : int list * int list list * int -> int list
PRE: k >= 0
*)
```

```
fun smsorting (x::xs, lss, k) =
 let val (run, tail) = nextrun([x], xs)
 in smsorting(tail, mergepairs(run::lss, k+1), k+1)
 end
| smsorting ([], lss, k) = hd(mergepairs(lss, 0))
```

- (\* smsort xs = az xs elemeinek  $\leq$  szerint rendezett listája

```
smsort : int list -> int list
```

```
*)
```

```
fun smsort xs = smsorting(xs, [], 0)
```

- A simarendezés egy változata sort néven megtalálható a Listsort könyvtárban.