Az SML egy résznyelvének szintaxisa és szemantikája

A 2005/06-os tanév őszi félévében a funkcionális programozásról szóló két első előadáson az SML nyelv alábbi elemeit ismertük meg.[1]

Szavak

1. Állandók, pl. `3`, `56`, `1.7`, `1.7878E45`, `false`, `true`, `()`.
2. Operátorok, pl. `+`, `-`, `*`, `/`, `div`, `mod`, `quot`, `rem`, `<`, `<=`, `>`, `>=`, `=`, `<>`, `~`.
3. Kulcsszók, pl. `val`, `fun`, `if`, `then`, `else`, `let`, `in`, `end`, `int`, `bool`, `unit`, `=`, `(`, `)`, `:`, `->`, `*`, `#`, `(*`, `*)`, `,`, `;`.
4. Azonosítók (nevek)
   (a) Egyszerű azonosítók, pl. `x`, `power`.
   (b) Összetett azonosítók, pl. `Math.pi`, `Math.sqrt`.

[1] G. Smolka előadásjegyzete alapján (lásd <http://www.ps.uni-sb.de/courses/prog-ws04/script>) összeállította Hanák Péter. 2005. okt. 9.

Mondatok

1. Kifejezések
   (a) Elemi kifejezések: egyetlen állandóból vagy azonosítóból állnak.
   (b) Alkalmazások
      i. Operátoralkalmazások: <*monadikus operátor*> <*kifejezés*>
      ii. Operátoralkalmazások: <*kifejezés*> <*diadikus operátor*> <*kifejezés*>
      iii. Projekciók: # <*pozitív egészállandó*> <*kifejezés*>
      iv. Eljárásalkalmazások: <*kifejezés*> <*kifejezés*>
   (c) Feltételes kifejezések (feltételből, következményből és alternatívából álló hármasok): `if` <*kifejezés*> `then` <*kifejezés*> `else` <*kifejezés*>
   (d) Ennesek (legalább két tagúak): `(` <*kifejezés*>`, ..., ` <*kifejezés*>`)`
   (e) Kifejezések lokális deklarációval: `let` <*program*> `in` <*kifejezés*> `end`
2. Deklarációk (fejből és törzsből állnak)
   (a) `val` <*minta*> `=` <*kifejezés*>

(b) `fun` <*azonosító*> <*minta*> `=` <*kifejezés*>

(c) `fun` <*azonosító*> <*minta*> `:` <*típus*> `=` <*kifejezés*>

3. Minták

   (a) Értékminták

      i. <*azonosító*>

      ii. `(` <*azonosító*> `, ... ,` <*azonosító*> `)`

   (b) Argumentumminták

      i. `(` <*azonosító*> `:` <*típus*> `, ... ,` <*azonosító*> `:` <*típus*> `)`

4. Típusok

   (a) Atomi típusok: `int`, `real`, `bool`, `string`, `unit`

   (b) Eljárástípusok: <*típus*> `->` <*típus*>

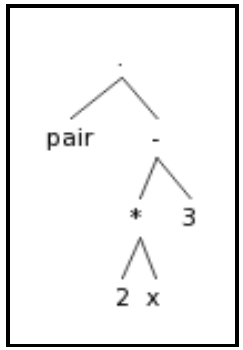
   (c) Ennestípusok: <*típus*> `*` ... `*` <*típus*>

5. Programok: deklarációsorozatok (beleértve az üres deklarációsorozatot).

Mondatok két- és egydimenziós ábrázolása

A `pair` eljárás egy alkalmazásának ábrázolása

két dimenzióban, *grafikusan:*



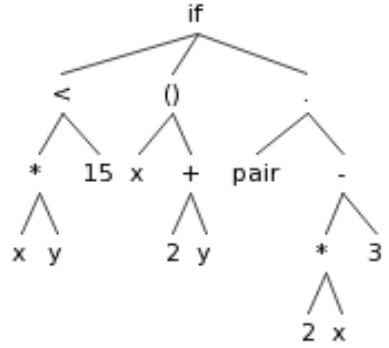
egy dimenzióban, *karakterekkel:*

```
pair(2*x-3)
```

szavakkal (lexikális egységekkel):

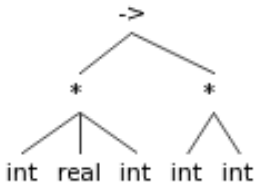
```
pair ( 2 * x - 3 )
```

```
if x*y<15then(x,2+y)else pair(2*x-3)
if x * y < 15 then ( x , 2 + y ) else pair ( 2 * x - 3 )
```



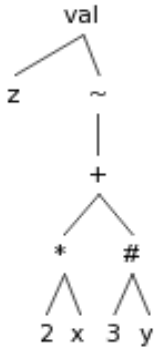
Egy kifejezés ábrázolása karakterekkel, szavakkal és fával

```
int * real * int -> int * int
```



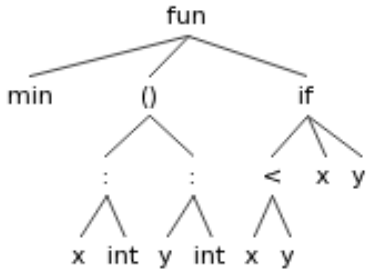
Egy típuskifejezés ábrázolása szavakkal és fával

```
val z = ~( 2 * x + # 3 y )
```



Egy értékdeklaráció ábrázolása szavakkal és fával

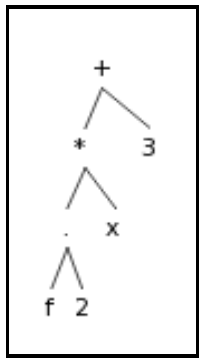
```
fun min ( x :  int , y :  int ) = if x < y then x else y
```



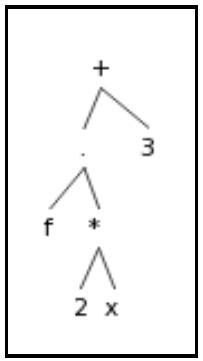
Egy eljárásdeklaráció ábrázolása szavakkal és fával

Zárójelek használata

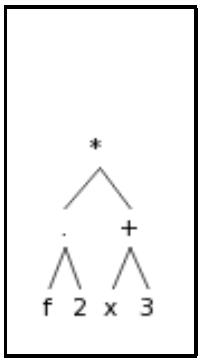
A kétdimenziós ábrázolás egyértelmű, az egydimenziós zárójelezéssel tehető azzá. Pl.



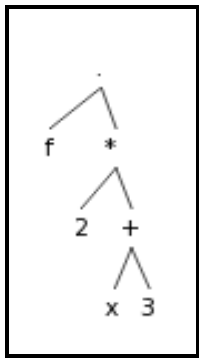
`f 2 * x + 3`



`f(2*x) + 3`



`(f 2) * (x+3)`



`f(2*(x+3))`

Szabad felesleges zárójeleket kitenni:

`2*f~2+3` `2*(f)~2+3` `2*(f~2)+3` `(2*(f~2))+3` `((2*(f~2))+3)`

Kifejezések legfontosabb zárójelezési szabályai, példákon:

`3*4+5` ≡ `(3*4)+5` A multiplikatív műveletek megelőzik az additívakat

`3+4+5` ≡ `(3+4)+5` Az aritmetikai operátorok jobbra kötnek

`3-4+5` ≡ `(3-4)+5`

`f 3+4` ≡ `(f 3)+4` Az eljárásalkalmazások megelőzik az operátorokét

`f g 3` ≡ `(f g)3` Az eljárásalkalmazások jobbra kötnek

Típuskifejezések legfontosabb zárójelezési szabályai, példákkal:

`int*int->int`	$\equiv$	`(int*int)->int`	A keresztszorzásnak van elsőbbsége.
`int->int->int`	$\equiv$	`int->(int->int)`	A leképzés jobbra köt.
`int*int*int`	$\not\equiv$	`(int*int)*int`	A keresztszorzás semerre nem köt!
`int*int*int`	$\not\equiv$	`int*(int*int)`	

Szabad azonosítók és környezetek

Az `x+y` kifejezésben `x` is, `y` is *szabad azonosító*. `x+y` csak akkor értelmezhető, azaz `x+y`-nak csak akkor van értéke, ha `x`-nek is, `y`-nak is van értéke az adott környezetben. A *környezet* az azonosítókötések összessége.

`x+y` pl. értelmezhető az $[x := 5, y := 7]$ környezetben, ahol $x = 5$ és $y = 7$.

A `fun q (x:int) = 3+(p x)` kifejezésben a `p` szabad, az `x` pedig *kötött* azonosító (a matematikai logika terminológiájával: az `x` kvantifikált változó a `q` kvantorhoz van kötve). A deklaráció akkor hajtható végre, ha `p`-nek van értéke az adott környezetben.

A szabad változót tartalmazó mondatot *nyitottnak*, a szabad változót nem tartalmazót *zártnak* nevezzük.

Most néhány további példát mutatunk be. Nézzük a következő programot:

```
fun p (x:int) = x
fun q (x:int) = 3+(p x)
```

A `p` deklarációja és a teljes program zárt, a `q` deklarációja önmagában azonban nyitott lenne.

A `val x = x` deklaráció *nyitott*, mert az ilyen deklaráció nem rekurzív, azaz a törzsben szereplő `x` nem azonos a deklarálandó `x`-szel.

A `fun f (x:int):int = if x<1 then 1 else x*f(x-1)` deklaráció ezzel szemben *zárt*, ui. a `fun`-deklaráció rekurzív, és így a törzsben szereplő `f` azonos a deklarálandó `f`-fel.

Eljárások ábrázolása hármas formájában

A `fun p (x:int) = x+a` deklaráció nyitott, önmagában nem deklarál semmit. Egy eljárásdeklaráció végrehajtásához az eljárás kódja mellett szükség van arra a környezetre is, amely a szabad változóihoz értéket köt, és ismerni kell az eljárás típusát is.

Egy eljárást tehát a $P = (C, T, E)$ egyenlettel írhatunk le, ahol a (C, T, E) hármas elemei rendre a kódot, a típust és a környezetet jelentik.

Nézzük például a

```
val a = 2*7
fun p (x:int) = x + a
```

programot. A deklarációk végrehajtása a p azonosítót a

(*fun p x = x + a, int -> int,* $[a := 14]$)

hármashoz köti. A

```
val a = 2*7
fun p (x:int) = x + a
fun q (x:int) = x + p x
```

program végrehajtása az alábbi kötéseket hozza létre, ahol q is zárt, mert tartalmazza p-t:

$a :=$ 14
$p :=$ (*fun p x = x + a, int -> int,* $[a := 14]$)
$q :=$ (*fun q x = x + p x, int -> int,*
$[p :=$ (*fun p x = x + a, int -> int,* $[a := 14]$)$]$)

Nézzük a következő programot és a végrehajtásával létrehozott kötéseket:

```
fun p (x:int) = x
fun q (x:int) = p x
fun p (x:int) = 2 * x
val a = (p 5, q 5)
```

$p :=$ (*fun p x = 2 * x, int -> int,* $[]$)
$q :=$ (*fun q x = p x, int -> int,*
$[p :=$ (*fun p x = x, int -> int,* $[]$)$]$)
$a :=$ $(10, 5)$

mert q-t még p első kötésével hozta létre a program.

Egy eljárás törzse tehát azokat a kötéseket őrzi meg, amelyek az eljárás deklarálásakor voltak érvényben. Ezt a módszert *statikus* vagy *lexikális kötésnek* nevezik.

Szemantikai helyesség

Az értelmezőprogram a végrehajtása előtt ellenőrzi egy program szemantikai helyességét. Egy szemantikusan helyes programnak mindenek előtt *zártnak* és *típushelyesnek* kell lennie.

Típusszabályok

Diadikus aritmetikai operátorok:

$$\frac{e_1 : t_1 \qquad \circ : t_1 * t_2 \to t_3 \qquad e_2 : t_2}{e_1 \circ e_2 : t}$$

Feltételes kifejezések:

$$\frac{e_1 : \texttt{bool} \qquad e_2 : t \qquad e_3 : t}{\texttt{if}\ e_1\ \texttt{then}\ e_2\ \texttt{else}\ e_3\ :\ t}$$

Enneskifejezések:

$$\frac{e_1 : t_1 \qquad \cdots \qquad e_n : t_n}{(e_1, \cdots, e_n) : t_1 * \cdots * t_n}$$

Eljárásalkalmazások:

$$\frac{e_1 : t_1 \to t_2 \qquad e_2 : t_1}{e_1\ e_2 : t_2}$$

Végrehajtás

Most a megismert mondatfajták végrehajtását tárgyaljuk. A megoldandó feladatok:

Kifejezések végrehajtása. Adva van az e kifejezés és a V környezet, meg kell határozni az e értékét a V környezetben.

Eljáráshívások végrehajtása. Adva van a p eljárás és a v érték, meg kell határozni a $p\ e$ értéket.

Deklarációk végrehajtása. Adva van a D deklaráció és a V környezet, meg kell határozni azt a környezetet, amelyet a D hoz létre a V környezetben.

Programok végrehajtása. Adva van a P program és a V környezet, meg kell határozni azt a környezetet, amelyet a P hoz létre a V környezetben.

Adjunkciónak nevezzük azt a $V_1 + V_2$ műveletet, amely V_1-ből és V_2-ből előállítja a V környezetet, mégpedig úgy, hogy

1. ha egy x azonosító csak V_1-ben fordul elő, akkor az x a V_1-beli értékhez lesz kötve V-ben is,
2. ha egy x azonosító csak V_2-ben fordul elő, akkor az x a V_2-beli értékhez lesz kötve V-ben is,
3. ha egy x azonosító mind V_1-ben, mind V_2-ben előfordul, akkor az x a V_2-beli értékhez lesz kötve V-ben is.

Példák:

$$[x := 5, y := 7] + [x := 1, z := 3] = [x := 1, y := 7, z := 3]$$

$$[x := 1, z := 3] + [x := 5, y := 7] = [x := 5, y := 7, z := 3]$$

Kifejezések végrehajtása

Feltesszük, hogy a kifejezéseket a V környezetben hajtjuk végre.

1. Ha egy kifejezés egyetlen állandóból áll, akkor a kifejezés végrehajtása ennek az állandónak az értékét adja eredményül.

2. Ha egy kifejezés egyetlen azonosítóból áll, akkor a kifejezés végrehajtása ennek az azonosítónak a V-beli értékét adja eredményül.

3. Ha egy kifejezés a $\circ e$ operátoralkalmazásból áll, ahol $\circ$ egy monadikus operátor, akkor a kifejezés végrehajtása az e részkifejezés V-beli értékének meghatározásával kezdődik. Ha ez a v értéket szolgáltatja, akkor a kifejezés végrehajtása a $\circ v$ operátoralkalmazás által szolgáltatott értéket adja eredményül.

4. Ha egy kifejezés az $e_1 \circ e_2$ operátoralkalmazásból áll, ahol $\circ$ egy diadikus operátor, akkor a kifejezés végrehajtása az e_1 és e_2 részkifejezések V-beli értékének meghatározásával kezdődik. Ha ezek a v_1 és v_2 értékeket szolgáltatják, akkor a kifejezés végrehajtása a $v_1 \circ v_2$ operátoralkalmazás által szolgáltatott értéket adja eredményül.

5. Ha egy kifejezés a $\#k\ e$ projekcióból áll, akkor a kifejezés végrehajtása az e részkifejezés V-beli értékének meghatározásával kezdődik. Ha ennek az eredménye egy legalább k elemű ennes, akkor a kifejezés végrehajtása az ennes k-adik tagjának értékét adja eredményül.
6. Ha egy kifejezés az $e_1\ e_2$ eljárásalkalmazásból áll, akkor a kifejezés végrehajtása az e_1 és e_2 részkifejezések V-beli értékének meghatározásával kezdődik. Ha ezek a p eljárást és a v értéket szolgáltatják, akkor a kifejezés végrehajtása a $p\ v$ eljáráshívás végrehajtásával kapott értéket adja eredményül.
7. Ha egy kifejezés az `if` e_1 `then` e_2 `else` e_3 feltételes kifejezésből áll, akkor a kifejezés végrehajtása az e_1 feltétel V-beli értékének meghatározásával kezdődik. A kifejezés végrehajtása, ha az e_1 végrehajtása a `true` értéket szolgáltatja, az e_2 következmény, ha pedig a `false` értéket szolgáltatja, az e_3 alternatíva végrehajtásával folytatódik. A kifejezés végrehajtásának az eredménye a következmény, illetve az alternatíva végrehajtásával kapott érték.
8. Ha egy kifejezés az $(e_1, \ldots, e_n)$ enneskifejezésből áll, akkor a kifejezés végrehajtása az $e_1, \ldots, e_n$ részkifejezések V-beli értékének meghatározásával kezdődik. Ha ezek a $v_1, \ldots, v_n$ értékeket szolgáltatják, akkor a típuskifejezés végrehajtásának eredménye a $(v_1, \ldots, v_n)$ ennes.

9. Ha egy kifejezés a `let` P `in` e `end` lokális deklarációt tartalmazó kifejezésből áll, akkor a kifejezés végrehajtása az P program V-beli végrehajtásával kezdődik. Ha ez a V' környezetet szolgáltatja, akkor a végrehajtás az e kifejezés V'-beli értékének meghatározásával folytatódik. A lokális deklarációt tartalmazó kifejezés végrehajtásának eredménye az így kapott érték.

Eljáráshívások végrehajtása

Egy $p = (\mathit{fun}\, f\, M = e, t, V)$ eljárásnak egy v értékkel történő meghívásakor a végrehajtás annak a V' környezetnek a meghatározásával kezdődik, amely az M mintában előforduló azonosítókat a v argumentum megfelelő értékeihez köti. Ezt követi az e eljárástörzs végrehajtása a $V + [f := p] + V'$ környezetben. Az eljáráshívás eredménye az így kapott érték lesz.

Az $[f := p]$ kötés teszi lehetővé a rekurzív eljáráshívásokat.

Deklarációk végrehajtása

Feltesszük, hogy a deklarációkat a V környezetben hajtjuk végre.

1. Egy *val* $M = e$ deklaráció végrehajtása az e kifejezés V-bei értékének meghatározásával kezdődik. Ha ez a v értéket szolgáltatja, akkor a végrehajtás annak a V' környezetnek a meghatározásával folytatódik, amely az M mintában előforduló azonosítókat a megfelelő v-beli értékekhez köti. A deklaráció végrehajtásának a $V + V'$ környezet az eredménye.

2. Egy *fun* $f\, M = e$ vagy *fun* $f\, M : t = e$ eljárásdeklaráció a

$$V + [f := (\textit{fun}\, f\, M' = e, t', V')]$$

   környezetet szolgáltatja, ahol

   (a) az M' az M-ből a típusok törlésével jön létre,

   (b) a t' a deklarált eljáráshoz rendelt típus,

   (c) a V' pedig az eljárásdeklaráció szabad azonosítóinak V-beli kötéseiből áll.

Programok végrehajtása

Feltesszük, hogy a programokat a V környezetben hajtjuk végre.

1. Ha a program üres, a végrehajtása a V környezetet adja eredményül.
2. Ha a program DP alakú, akkor a végrehajtása a D deklaráció V-beli végrehajtásával kezdődik. Ha ez a V' környezetet szolgáltatja, akkor a végrehajtás a P programrész V'-beli végrehajtásával folytatódik. A program végrehajtásának az így kapott környezet az eredménye.

A végrehajtás fázisai

1. Lexikális elemzés (lexical analysis): a karaktersorozat szavakra tagolása a szintaktikai szabályok alapján.
2. Szintaktikai elemzés (syntactic analysis, parsing): a szósorozat feldolgozása a szintaktikai szabályok alapján.
3. Szemantikai elemzés (semantic analysis, elaboration): a szintaktikailag helyes szósorozat feldolgozása a szemantikai szabályok alapján.
4. Végrehajtás (execution, evaluation) a szemantikai szabályok alapján.

Az elemzési fázisokban egy program *statikus*, a végrehajtási fázisban pedig a *dinamikus* aspektusairól beszélünk.

Egy programnyelv szintaxisa a lexikális és a szintaktikai elemzés alapja. Két részből áll: a lexikális szintaxisból és a mondatszintaxisból. A *lexikális szintaxis* a szavak, a *mondatszintaxis* a mondatok képzésének szabályait írja elő.

Egy programnyelv szemantikája a szemantikai elemzés és a végrehajtás alapja. Az előbbit a *statikus*, az utóbbit a *dinamikus* szemantika szabályozza.

Szintaktikai objektumoknak nevezzük a szavakat és mondatokat, *szemantikai objektumoknak* az értékeket és környezeteket. Különbséget teszünk *elemi* és *összetett* objektumok között is.

Vagyis egy programnyelv szintaxisa a nyelv külső megjelenését szabályozza, a szemantikája pedig a nyelv szintaktikai objektumainak a jelentésével foglalkozik.

Szemantikai egyenlőség

Két mondatot *szemantikailag egyenlőnek* mondunk, ha kívülről sem a statikus, sem a dinamikus szemantikájuk alapján nem lehet őket megkülönböztetni.

Például az `x+x` és a `2*x` kifejezések, valamint a `fun p (x:int, y:int) = x+y`

és a `fun p (y:int, x:int) = x+y` eljárásdeklarációk szemantikailag egyenlők.

Egy programnyelv szemantikája a gyakorlati megvalósítás korlátjait, pl. a tár kapacitását vagy a számábrázolás tartományát nem veszi figyelembe. A szemantikai egyenlőséget is ilyen idealizált környezetben definiáljuk.

Idealizált környezetben például az `(x-y)*(x-y)` és az `x*x - 2*x*y + y*y` kifejezések szemantikailag egyenlőek. Elég nagy számok esetén azonban a két kifejezés eltérően viselkedik a gyakorlatban:

```
val x = 999999999
val y = x

val z = (x-y)*(x-y)
z = 0 : int

val z = x*x - 2*x*y + y*y
!Uncaught exception
!Overflow
```