

HASKELL

Tartalom – 2

2. előadás

- A típusnyelv kiterjesztése
 - típusosztályok, többszörös terhelés
 - beépített típusosztályok
 - származtatás
 - számok kezelése
 - Peano-számok megvalósítása
 - többargumentumú típusosztályok
- A Haskell modulnyelve

Tartalom – 1

1. előadás

- Bevezetés
- A Haskell mint funkcionális nyelv
 - típusok és értékek
 - függvények és operátorok
 - adatkonstruktorok tulajdonságai
 - mintaillesztés, örök
 - vezérlési szerkezetek
 - a forráskód beosztása
- A Haskell mint lusta nyelv
 - végtelen adatszerkezetek
 - fenékérték
 - szigorú kiértékelés kikényszerítése
 - listák építése

Tartalom – 3

3. előadás

- „Imperatív” elemek a Haskellben
 - hibakezelés
 - állapotkezelés
 - állapotkezelés hibakezeléssel kombinálva
 - monádok
 - a `do` jelölés
 - imperatív stílusú programozás
 - monádok aritmetikája
 - a lista mint monád
 - a Monad könyvtár
 - ki- és bevétel
- „A Haskell programozó evolúciója” (Fritz Ruehr)

BEVEZETÉS

A HASKELL MINT FUNKCIONÁLIS NYELV

Bevezetés

A Haskell eredete

- Haskell Brooks Curry matematikus tiszteletére (v.ö.: *curry* és *uncurry*)
- 1987: az első Haskell – cél: egy szabványos, lusta kiértékelésű, tisztán funkcionális nyelv
- 1999: Haskell 98 – lényegében azonos a Haskell 1.4-gyel

Interaktív környezetek

- Hugs – kicsi és gyorsan fordít, tanuláshoz ideális
- GHC – nagyobb, sok kiegészítővel, nagyon gyors kódot fordít

Források, irodalom

- Haskell.org
- A Gentle Introduction to Haskell (Paul Hudak, John Peterson, Joseph H. Fasel)
<http://www.haskell.org/tutorial>
- Haskell 98 Report & Library Report
<http://www.haskell.org/onlinereport>

Típusok és értékek – 1

Szintaktika

- névadás egyenlet formájában: *név = érték*
- Church-féle típus megkötés: *név/érték [, név/érték...] :: típus*
- a típus- és adatkonstruktorok nagybetűvel kezdődnek, és prefix pozícióban állnak

Egyszerű típusok

- logikai értékek: `True :: Bool`
- egész számok
 - korlátos: `5 :: Int`
 - „BigNum”: `908789326459032645987326495819280921 :: Integer`
- lebegőpontos számok
 - egyszeres pontosságú: `2.71828 :: Float`
 - dupla pontosságú: `3.14159 :: Double`
- karakterek: `'c' :: Char`

Típusok és értékek – 2

Összetett (polimorfikus) típusok

- listák: `3:6:1:2:[] == ([3,6,1,2] :: [Integer])`
- füzérek: `"haskell" == (['h', 'a', 's', 'k', 'e', 'l', 'l'] :: [Char])`
- ennesek: `('a', 1.23, True) :: (Char, Double, Bool)`
- függvények: `take :: Int -> [a] -> [a]`

Felhasználói típusok

- típuszsinoníma
 - meglévő (összetett) típusok rövid neve
 - a típusnév bárhol felcserélhető a definíciójával
 - `type String = [Char]`
- típuskonstruktor
 - erős absztrakciót valósít meg
 - mintaként illeszthető
 - `data Bool = True | False`
 - `data Tree a = Leaf | Node a (Tree a) (Tree a)`

Típusok és értékek – 4

Felhasználói típusok (folyt)

- mezőnevek
 - egy adatkonstruktor argumentumai elnevezhetők
 - `data Tree a = L | N { value :: a, left :: Tree a, right :: Tree a }`
- adatstruktúra megadása, mintaillesztés:
 - `N 1 L L`
 - `N { value = 1, left = L, right = L }`
- kiválasztó függvények:
 - `value :: Tree a -> a`
 - `left, right :: Tree a -> Tree a`
 - `value (N 1 L L) == 1`
 - a hibás használat csak futási időben derül ki: `value L`
- értékelfedés: `(N 1 L L) { value = 2 } == N 2 L L`

Típusok és értékek – 3

Beépített típuskonstruktorok

- rendezettség: `data Ordering = LT | EQ | GT`
- feltételes típus: `data Maybe a = Nothing | Just a`
- diszjunktív únió: `data Either a b = Left a | Right b`

Felhasználói típusok (folyt)

- fedőtípus
 - a típuszsinonímához hasonlóan egy meglévő típus átnevezése
 - a típuskonstruktorhoz hasonlóan erős absztrakció, illeszthető mintaként
 - *nincs plusz memóriai igény, csak a típusellenőrzéskor van szerepe*
 - `newtype Natural = Natural Integer`
 - `Natural 15 :: Natural`

Függvények és operátorok – 1

Lambda függvények

- `\arg1 [arg2 ...] -> törzs`
- `\x -> \y -> x+y`
- `\x y -> x+y`

Nevesített függvények

- a típusmegkötés explicit módon megadható
- általában *curried* alakúak (ld. operátorok)
- `-- add x y = x és y összege`
`add :: Integer -> Integer -> Integer`
`add x y = x+y`
`-- ugyanaz, mint: add = \x y -> x+y`

Operátorok

- kétargumentumú, *curried* függvények
- ha a függvény neve *szimbólumokból* áll, akkor operátor, ha *alfanumerikus*, akkor prefix függvény

Függvények és operátorok – 2

Operátorok (folyt)

- `(.)` `:: (b -> c) -> (a -> b) -> (a -> c)`
`f . g = \x -> f (g x)`
- `f . g x = f (g x)` szintaktikusan hibás! (v.ö.: *kétargumentumú*)
- szeletek (sections)
 - az operátorok is részlegesen alkalmazhatók
 - `(x+)` `= \y -> x+y`
 - `(+y)` `= \x -> x+y`
 - `(+)` `= \x y -> x+y` (az operátorok prefix alakja)
- ``add`` a függvények infix alakja: `3 `add` 4 == 5`
- kötés megadása
 - balra kötő: `infixl 6 *`
 - jobbra kötő: `infixr 3 &&`
 - nem kötő: `infix 4 /=`
 - alapértelmezés: `infixl 9`

Mintaillesztés, örök

Mintaillesztés

- bármely adatkonstruktor használható mintában
- alternatív mintákat több egyenlettel adunk meg
- `_`: univerzális minta, mindenre illeszkedik
- réteges minta: `név @ minta`
- `take` `:: Int -> [a] -> [a]`
`take 0 _ = []`
`take _ [] = []`
`take n (x:xs) = x : take (n-1) xs`

Örök

- nem minden eset választható szét mintákkal
- `őr` = a klóztörzs kiértékelhetőségének feltétele
- `compare x y` | `x == y` = EQ
 | `x <= y` = LT
 | otherwise = GT

Adatkonstruktorok tulajdonságai

Infix adatkonstruktorok

- a neve csak szimbólumokból áll, és kettősponttal kezdődik
- ugyanúgy van precedenciája, mint az infix függvényeknek
- pl. tört definiálása:
 - `data Fraction = Integer ./ Integer`
 - `3 ./ 5 :: Fraction`

Adatkonstruktorok, mint függvények

- az adatkonstruktorok függvényként is használhatók
- `map Just [1,2] == ([Just 1, Just 2] :: [Maybe Integer])`
- ez igaz az ennesre is!
 - `(,) True 'x' == (True, 'x')`
 - `(,,) "ok" 2 :: a -> (String, Integer, a)`

Vezérlési szerkezetek – 1

Esetszétválasztás

- mintaillesztéses esetszétválasztás

```
take      :: Int -> [a] -> [a]
take m xs = case (m,xs) of
    (0,_)   -> []
    (_,[])  -> []
    (m,x:xs) -> x : take (m-1) xs
```

- feltételes kifejezés
 - `max x y = if x >= y then x else y`
 - szintaktikus édesítőszer: `if e then e1 else e2` ekvivalens alakja:


```
case e of
    True  -> e1
    False -> e2
```

Vezérlési szerkezetek – 2

Lokális érvényű deklarációk

- let-kifejezés

- a deklarációk egy *kifejezésen* belül érvényesek

```
distance (x1,y1) (x2,y2) = let xd = x1-x2
                             yd = y1-y2
                             in sqrt(xd*xd + yd*yd)
```

- where-deklaráció

- a deklarációk egy (esetleg több őrzött esetből álló) *deklaráción* belül érvényesek

- tipikusan segédfüggvény definiálásakor használjuk

```
gcd x y = gcd' (abs x) (abs y)
  where gcd' x 0 = x
        gcd' x y = gcd' y (x `rem` y)
```

A forráskód beosztása (layout)

Mi választja el az egyes deklarációkat, kifejezéseket egymástól? Ekvivalens-e a következő két kifejezés:

```
let y = a*b
    f x = (x+y)/y
in f c + f d

let y = a*b f
    x = (x+y)/y
in f c + f d
```

A válasz: *beosztás* (layout), azaz a forráskód kétdimenziós elrendezése:

- alapvetően intuitív, könnyen olvasható;
- a where, let, of kulcsszók utáni első nemszóköz karakter határozza meg a deklarációk ill. minták kezdőoszlopát;
- egy *beágyazott* blokk kezdőoszlopa mindig beljebb legyen, mint a *beágyazó* blokké;
- egy deklarációnak, kifejezésnek vége, ha valami a blokk kezdőoszlopától balra kezdődik.

A tagolás *explicit* módon is megadható: { ; }, pl. ha több deklarációt szeretnénk egy sorba írni.

```
let { y = a*b
     ; f x = (x+y)/y
    }
in f c + f d

let y = a*b; f x = (x+y)/y
in f c + f d
```

Kérdés

A HASKELL MINT LUSTA NYELV

Mi a különbség a *függvények* és a *nemfüggvény értékek* között?

Válasz

Semmi!

nemfüggvény érték = argumentum nélküli függvény

Fenekérték – 1

1. próbálkozás

- `bot = bot`
- Mi a típusa? `bot :: a`
- ha kiértékeljük, végtelen ciklusba esünk

2. próbálkozás

- `bot | False = bot`
- Mi a típusa? `bot :: a`
- ha kiértékeljük, futási hibát kapunk
- jelölése: \perp (ejtsd: *fenékérték* vagy bottom)
- az okozott hiba *fatális*, a program leáll
- ha nem értékeljük ki, nem okoz gondot: `(\x -> 1) bot == 1`
- a Standard Prelude-ben `undefined`-nak hívják

Végtelen adatszerkezetek

Deklaráció

- egyesek végtelen listája: `ones = 1 : ones`
- egészek n-től felfelé: `upFrom n = n : upFrom (n+1)`
- négyzetszámok: `squares = map (^2) (upFrom 0)`
- Fibonacci sorozat – 1. változat

```
fib = 1 : 1 : fib +: (tail fib)
      where (x:xs) +: (y:ys) = x+y : xs +: ys
```

- Fibonacci sorozat – 2. változat

```
fib @ (_,tfib) = 1 : 1 : zipWith (+) fib tfib
```

Felhasználás

- `take 5 ones == [1,1,1,1,1]`
- `take 7 squares == [0,1,4,9,16,25,36]`
- `take 10 fib == [1,1,2,3,5,8,13,21,34,55]`

Fenekérték – 2

Hibajelzés

- \perp visszaadása: jó, de nem túl „bőbeszédű”
- `error` hibajelző függvény
 - `error :: String -> a`
 - `head :: [a] -> a`
`head (x:_) = x`
`head [] = error "head{PreludeList}: head []"`
 - szemantikai értelemben az `error` függvény értéke \perp

Szigorú kiértékelés kikényszerítése

Szigorú adatkonstruktorok

- általában előfordulhat, hogy egy adatszerkezet egy részét soha nem értékeljük ki

```
fst ("ok", undefined) == "ok"
```

- időnként szemantikailag indokolt lehet csak teljesen kiértékelhető struktúrák megengedése

```
data Fraction = !Integer :/ !Integer
  (\(x :/ y) -> x) (1 :/ undefined) ==> undefined
```

- növeli a hatékonyságot

Szigorú kiértékelés

- `f $! x` hívás *legfelső szintjét* kiértékeli, és alkalmazza rá `f`-et
- `(\x -> 1) undefined == 1`
- `(\x -> 1) $! undefined ==> undefined`
- `(\x -> 1) $! (undefined, undefined) == 1`

Listák építése – 2

Listanézet (folyt)

- Fibonacci sorozat – 3. változat

```
fib = 1 : 1 : [ a+b | (a,b) <- zip fib tfib ]
  where _:tfib = fib
```

Számtani sorozatok

- számtani sorozat függvénnyel

```
fromThenTo n n' m = nn'm
  where nn'm = takeWhile p (n : map ((n'-n) +) nn'm)
        p | n' >= n = (m >=)
          | otherwise = (m <=)
```

```
fromThenTo 1 3 10 == [1,3,5,7,9]
```

- számtani sorozat szintaktikai édesítőszerrel

- `[3..15] == [3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15]`
- `['a','c'..'f'] == "ace"`
- `[0.0, 1.1..] ==> [0.0, 1.1, 2.2, 3.3, ...]` végtelen lista

Listák építése – 1

Listanézet (List Comprehension)

- a listaépítés és -transzformálás tömör, kifejező formája
- lefedti a `map` és a `filter` függvényeket, és még sokkal többet
- általános alak: `[elemkif | minta <- listakif, örkif, ...]`

```
map f xs = [ f x | x <- xs ]
```

```
filter p xs = [ x | x <- xs, p x ]
```

- összes lehetséges pár (Descartes-szorzat):

```
cartesian :: [a] -> [b] -> [(a,b)]
cartesian xs ys = [ (x,y) | x <- xs, y <- ys ]
```

```
cartesian [1,2] ['a','b'] == [(1,'a'), (1,'b'), (2,'a'), (2,'b')]
```

- gyorsrendezés – a lehető legtömörebben

```
quicksort [] = []
quicksort (x:xs) = quicksort [ y | y <- xs, y < x ] ++
  x : quicksort [ y | y <- xs, y >= x ]
```

A TÍPUSNYELV KITERJESZTÉSE

Típusosztályok, többszörös terhelés – 1

A polimorfizmus változatai

- **Paraméteres ~:** ez a „megszokott”, típusváltozót használó. Az elvégzendő művelet mindig *ugyanaz*, nem (teljesen) használja ki az argumentum típusát.
- **Ad-hoc ~:** közismertebb néven többszörös terhelés vagy overloading. Itt csak a szintaktika azonos, a számítás teljesen különböző lehet minden típusra. Például
 - az 1, 2, ... állandók jelenthetnek egész és lebegőpontos számokat is
 - az aritmetikai operátorok, mint a + vagy a * sokféle számtípuson működnek
 - az egyenlőségvizsgáló operátorok, mint a == és az /= nagyon sokféle típusra működnek
- Jó hír:
 - a Haskellben a felhasználó is definiálhat többszörösen terhelt függvényeket, sőt,
 - a meglévő, többszörösen terhelt függvényeket *kiterjesztheti újabb típusokra*.

- Mi a member_of függvény típusa?

```
x `member_of` [] = False
x `member_of` (y:ys) = x == y || x `member_of` ys
```

Nem egyszerűen a -> [a] -> Bool!

Típusosztályok, többszörös terhelés – 3

További kontextusok

- lehet (kell, hogy legyen) kontextusa a példányosításnak:

```
data Tree a = Leaf | Node a (Tree a) (Tree a)
instance Eq a => Eq (Tree a) where
  Leaf == Leaf = True
  Node v1 l1 r1 == Node v2 l2 r2 = (v1,l1,r1) == (v2,l2,r2)
  _ == _ = False
```

- lehet saját kontextusa az egyes *metódusoknak*:

```
class MyClass a where method :: Eq b => b -> b -> a
```

Alapértelmezett metódusmegvalósítás

- class Eq a where


```
(==), (/=) :: a -> a -> Bool

-- Minimal complete definition: (==) or (/=)
x == y = not (x/=y)
x /= y = not (x==y)
```

Típusosztályok, többszörös terhelés – 2

Típusosztály, példány, kontextus

- egy típus *példánya* egy *típusosztálynak*, ha a típushoz tartozó értékekre alkalmazható a típusosztályba tartozó összes függvény
- például: egyenlőségi osztály


```
class Eq a where (==), (/=) :: a -> a -> Bool
```
- Eq a fejezi ki azt a *kényszert*, hogy az a típusnak az Eq osztály egy példányának kell lennie
- egy típuskifejezésre vonatkozó kényszert a kifejezés *kontextusának* nevezzük
- (==) :: Eq a => a -> a -> Bool
- ez alapján: member_of :: Eq a => a -> [a] -> Bool
- példányosítás:

```
data Fraction = !Integer ./ !Integer
instance Eq Fraction where
  (a:/b) == (x:/y) = a*y == x*b
```

(3 ./ 5 == 6 ./ 10) == True

Típusosztályok, többszörös terhelés – 4

Öröklődés

- a típusosztályok *öröklődés* útján kiterjeszthetők
- class Eq a => Ord a where


```
compare :: a -> a -> Ordering
(<), (<=), (>=), (>) :: a -> a -> Bool
max, min :: a -> a -> a

compare x y | x==y = EQ
            | x<=y = LT
            | otherwise = GT
```
- a kontextusban elegendő az *alosztályt* megadni, az *ősosztály* kiírása redundáns


```
quicksort :: Ord a => [a] -> [a]
```
- a többszörös öröklődés megengedett, de a szokásos problémák nem jönnek elő, mivel egy név csak egy osztályba tartozhat, azaz átfedés eleve nem lehet

```
class (A a, B a) => C a where ...
```


Típusosztályok, többszörös terhelés – 5

Típusoperátorok osztályai

- egy típusosztály nem csak típusállandók, hanem típusoperátorok osztálya is lehet

```

class Functor f where
  fmap :: (a -> b) -> (f a -> f b)

instance Functor Tree where
  fmap f Leaf      = Leaf
  fmap f (Node v l r) = Node (f v) (fmap f l) (fmap f r)

instance Functor [] where
  fmap = map

instance Functor Maybe where
  fmap f Nothing = Nothing
  fmap f (Just x) = Just (f x)

```

Beépített típusosztályok – 2

A Show típusosztály

- értékek füzérré alakítására szolgál (kiíráshoz)
- `show (2, 'a')` == `"(2, 'a')"`
- fa kiírása:

```

showTree      :: Show a => Tree a -> String
showTree Leaf      = "<>"
showTree (Node v l r) = "<" ++ showTree l ++ "|" ++
                        show v      ++ "|" ++
                        showTree r ++ ">"

```

Ezzel az a gond, hogy a költsége négyzetes, mivel ++ költség arányos a lista hosszával.

- fa kiírása gyűjtőargumentummal:

```

showsTree      :: Show a => Tree a -> String -> String
showsTree Leaf      = ("<>"++)
showsTree (Node v l r) = ('<':) . showsTree l . ('|':) .
                        shows v      . ('|':) .
                        showsTree r . ('>':)

```

Beépített típusosztályok – 1

- `Eq a`, `Eq a => Ord a` és `Functor f` már ismert
- korlátossági osztály

```

class Bounded a where
  minBound, maxBound :: a

```

- enumerációs osztály számtani sorozatok létrehozásához

```

class Enum a where
  succ, pred      :: a -> a
  toEnum          :: Int -> a
  fromEnum        :: a -> Int
  enumFrom        :: a -> [a]           -- [n..]
  enumFromThen    :: a -> a -> [a]     -- [n,m..]
  enumFromTo      :: a -> a -> [a]     -- [n..m]
  enumFromThenTo  :: a -> a -> a -> [a] -- [n,n'..m]

```

- monadikus* osztály: `Monad`, lásd később
- számosztályok, lásd később

Beépített típusosztályok – 3

A Show típusosztály (folyt)

- hozzáíró függvény*: `type ShowS = String -> String`
- primitív hozzáíró függvények: `('|':)`, `("<>"++)`
- `showsTree` fából hozzáíró függvényt állít elő

```
showsTree :: Show a => Tree a -> ShowS
```

- `class Show a where`

```

show      :: a -> String
showsPrec :: Int -> a -> ShowS
showList  :: [a] -> ShowS

```
- `showsPrec` első argumentuma a különböző precedenciaszintek kezeléséhez
- `showList` azért, hogy a lista a szakasostól eltérő alakban is megjelenhessen, ld. `String`
- `instance Show a => Show (Tree a) where`

```
showsPrec _ = showsTree
```
- `instance Show a => Show [a] where`

```
showsPrec _ = showList
```

Származtatás

Típusosztály példányainak automatikus származtatása

- bizonyos típusosztályok példányainak megírása unalmas, mechanikus munka
- az ilyen osztályok példányai automatikusan előállíthatók
- ```
data Tree a = Leaf | Node a (Tree a) (Tree a)
 deriving (Eq, Ord, Show)
```
- Eq származtatása: az intuíciónak megfelelő
- Ord származtatása: lexikografikus sorrend, balról jobbra
- Show származtatása: a Haskell szintaktikának megfelelő kiírás

## Számok kezelése – 2

### Az Integral osztály

- egész számok ábrázolására
- példányai az Int és Integer típusok
- ```
class (Real a, Enum a) => Integral a where
  quot, rem, div, mod :: a -> a -> a
  quotRem, divMod    :: a -> a -> (a,a)
  even, odd          :: a -> Bool
  toInteger          :: a -> Integer
  toInt              :: a -> Int
```

A Fractional osztály

- törtek és lebegőpontos számok ábrázolására szolgáló ősosztály
- ```
class (Num a) => Fractional a where
 (/) :: a -> a -> a
 recip :: a -> a
 fromRational :: Rational -> a
 fromDouble :: Double -> a
```

## Számok kezelése – 1

### A Haskell által ismert, beépített számtípusok

- véges és korlátlan egészek
- egész típusokból képzett *arányok*, racionális számok
- egyszeres- és dupla pontosságú, valós és komplex lebegőpontos számok

Ezek a típusok az átjárhatóság kedvéért *típusosztályok hierarchiájába* vannak szervezve.

### A Num osztály

- minden számosztály őse
- azokat a műveleteket adja, amelyeknek minden számra értelmesnek kell lennie
- ha egy típus a példánya, akkor alapvető aritmetikai műveletek már végezhetők az értékein
- ```
class (Eq a, Show a) => Num a where
  (+), (-), (*) :: a -> a -> a
  negate       :: a -> a      -- the '-' prefix operator
  abs, signum  :: a -> a
  fromInteger  :: Integer -> a
  fromInt      :: Int -> a
```

Számok kezelése – 3

A Floating osztály

- a Fractional osztály leszármazottja
- lebegőpontos számok ábrázolására
- példányai a Float és Double típusok
- módszerei szögfüggvények és -konstansok

Arányok ábrázolása

- a Fractional osztály példánya a Ratio típus
- az Integral osztály példányaiból képes arányokat létrehozni
- *absztrakt adattípus* az arányok ábrázolásához:


```
data Integral a => Ratio a = !a :% !a deriving (Eq)
```
- típuszinoníma a racionális számokhoz: `type Rational = Ratio Integer`
- absztrakt adattípus, ezért a `:%` adatkonstruktor nem látszik ki


```
(%) :: Integral a => a -> a -> Ratio a
3 % 6 ==> 1 % 2
```

Számok kezelése – 4

Kényszerítők és többszörösen terhelt konstansok

- a számtípusok közötti átjárásra több konverziós, *kényszerítő* (coercion) függvény szolgál
- `fromInteger :: (Num a) => Integer -> a`
`fromRational :: (Fractional a) => Rational -> a`
`fromIntegral :: (Integral a, Num b) => a -> b`
`toInteger :: (Integral a) => a -> Integer`
`toRational :: (RealFrac a) => a -> Rational`
- a Haskell kettőt ezek közül implicit konverzióra használ a számkonstansokhoz
 - `3 :: Integer ==> 3`
 - `3 :: Double ==> 3.0`
 - `3 :: Rational ==> 3 % 1`
- a számkonstansok típusa csak kontextussal adható meg
 - `3 :: Num a => a`
 - `3.0 :: Fractional a => a`
 - `3 % 5 :: Integral a => Ratio a`

Peano-számok megvalósítása – 2

Az Integral osztályba tartozás előkészítése

```
instance Real Peano where
    toRational = toRational . toInteger
```

A `toInteger` függvényt az `Integral` osztály adja. A Haskell lusta kiértékelése miatt használhatjuk fel előre.

```
instance Enum Peano where
    succ n = Succ n

    pred Zero = error "Peano.pred: negative number"
    pred (Succ n) = n

    toEnum = fromInt
    fromEnum = toInt
```

A `fromInt` a `Num` osztály, a `toInt` az `Integral` osztály metódusa. Az `Enum` osztály többi függvényének van alapértelmezett megvalósítása. Ha a hatékonyság cél lenne, külön meg kellene őket valósítani.

Peano-számok megvalósítása – 1

Az adattípus deklarációja

```
data Peano = Zero | Succ Peano
    deriving (Eq, Ord, Show)
```

A Num osztályba tartozás

```
instance Num Peano where
    Zero + m = m
    Succ n + m = n + Succ m

    n - Zero = n
    Succ n - Succ m = n - m
    Zero - m = error "Peano.(-): negative number"

    abs = id
    signum n = 1

    fromInteger 0 = Zero
    fromInteger n | n > 0 = Succ (fromInteger (n-1))
```

Peano-számok megvalósítása – 3

Az Integral osztályba tartozás

```
instance Integral Peano where
    n `quotRem` Zero = error "Peano.quotRem: division by zero"
    n `quotRem` d = qR n d Zero n
        where qR Zero Zero q r = (Succ q, Zero)
              qR Zero d q r = (q, r)
              qR n Zero q r = qR n d (Succ q) n
              qR (Succ n) (Succ d) q r = qR n d q r

    toInteger Zero = 0
    toInteger (Succ n) = 1 + toInteger n
```

A többi metódus vissza van vezetve a `quotRem` függvényre.

Többszörös argumentumú típusosztályok – 1

Haskell 98

- többszörös argumentumú függvények
- többszörös argumentumú adatkonstruktorok
- többszörös argumentumú típuskonstruktorok
- egyszörös argumentumú típusosztályok

A típusosztályoknak is lehessen több *típusargumentuma*!

Ez *nem* része a Haskell 98 szabványnak, de több interpreterben (Hugs, GHC) megtalálható kiegészítésként.

Definiálás, alkalmazás

- Tfh. szeretnénk egy *gyűjtő* osztályt:

```
class Collects e ce where ...
```

- felhasználási lehetőségek:

```
instance Eq e => Collects e [e] where ...
instance Eq e => Collects e (e -> Bool) where ...
instance Collects Char BitSet where ...
```

Többszörös argumentumú típusosztályok – 3

Típusoperátorok osztálya

- ```
class Collects e c where
 empty :: c e
 insert :: e -> c e -> c e
 member :: e -> c e -> bool
```

- megoldott problémák:

- ```
empty :: Collects e c => c e
```

 nem többértelmű
- ```
f :: (Collects e c) => e -> e -> c e -> c e
```

 nem enged meg a `f True 'a'` jellegű felhasználást

- ```
instance Collects e [] where ...
```

- rossz hír: a másik két felhasználási ötlet nem működik: `e -> Bool` és a `BitSet` nem típusoperátorok

Többszörös argumentumú típusosztályok – 2

Többértelműségi probléma

- ```
class Collects e ce where
 empty :: ce
 insert :: e -> ce -> ce
 member :: e -> ce -> bool
```

- problémák:

- a típusellenőrzés túl szigorú:

```
empty :: Collects e ce => ce
```

Az `e` típusváltozó nem határozható meg!

- a típus nem eléggé szigorú:

```
f x y = insert x . insert y
f True 'a' :: (Collects Bool c, Collects Char c) => c -> c
```

Csak futási idejű hibát okoz!

## Többszörös argumentumú típusosztályok – 4

### Explicit típusfüggőség

- az osztály egyes típusparaméterei egyértelműen meghatároznak másokat
- *függőségek* megadásával írható le
- általános alak:  $x_1 x_2 \dots x_n \rightarrow y_1 y_2 \dots y_m, n > 0, m \geq 0$
- egy osztályhoz több függőség is megadható
- ```
class Collects e ce | ce -> e where ...
```
- redundáns, nem megengedett függőségek:
 - `a -> a`
 - `a -> a a`
 - `a ->`
 - `a -> b, b -> c, a -> c`
- korlátozza a példányosítást
- megoldja a felmerült problémákat

Többszörös típusosztályok – 5

Típusnyelvi programozás

- írhatunk programot a típusellenőrzőre
- „adataink” típusok, nem értékek
- Prologszerű számítási modell
- példa: számbábrázolás és műveletek

```
data Zero
data Succ n
type One = Succ Zero; type Two = Succ One
```

```
zero = undefined :: Zero; one = undefined :: One
```

```
class Add a b c | a b -> c where
  add :: a -> b -> c
instance Add Zero b b
instance Add a b c => Add (Succ a) b (Succ c)
```

```
add one one :: Succ (Succ Zero)
```

A Haskell modulnyelve – 1

- egy Haskell program modulokból épül fel
- kettős cél:
 - névtér felosztása
 - absztrakt adattípusok létrehozása
- a modul törzse deklarációkból áll
- a modulnév alfanumerikus, és nagybetűvel kezdődik
- a modulok és az állományok között nincs szigorú kapcsolat (egy modul több file-ban, egy file-ban több modul megengedett)

• általános alak: `module Modulnév (exportlista) where deklarációk`

• az exportlista elhagyható, ilyenkor minden kilátszik

```
module Tree ( Tree(Leaf,Node), isLeaf ) where
data Tree a = Leaf | Node a (Tree a) (Tree a)
           deriving (Eq, Ord, Show)
isLeaf     :: Tree a -> Bool
isLeaf Leaf = True
isLeaf _   = False
```

A HASKELL MODULNYELVE

A Haskell modulnyelve – 2

- `Tree (Leaf, Node)` helyett írható `Tree (..)`
- megengedett az adatkonstruktorok csak egy részét exportálni
- szabad *tovább* exportálni importált neveket
- importálás:
 - `import Modulnév (importlista)`
 - csak a modul legelején állhat
 - az importlista elhagyható, ilyenkor minden exportált nevet importál
- minősített nevek: `Modulnév.név`
- importálás „megnyitás” nélkül: `import qualified Modulnév`
- explicit elrejtés: `import Tree hiding isLeaf`
- átnevezés: `import Tree as T`
- Prelude implicite importált, de explicit importálással felülbírálható: `import qualified Prelude as P hiding length`
- típusosztályok *példányai* automatikusan exportálódnak és importálódnak

„IMPERATÍV” ELEMELK A HASKELLBEN

Hibakezelés – 1

Bizonyos számításoknál nem mindig adható értelmes eredmény (v.ö.: füzér számmá alakítása). Ilyenkor az eredményt becsomagoljuk egy feltételes típusba (*Maybe a*).

Tfh. van egy adatbáziskezelő könyvtárunk egy lekérdezőfüggvénnyel:

```
doQuery :: Query -> DB -> Maybe Record
```

Több lekérdezésből álló szekvencia:

```
r :: Maybe Record
r = case doQuery db q1 of
  Nothing -> Nothing
  Just r1 -> case doQuery db (q2 r1) of
    Nothing -> Nothing
    Just r2 -> case doQuery db (q3 r2) of
      Nothing -> Nothing
      Just r3 -> ...
```

Hátrányok:

- sokszor kell leírni ugyanazt
- nem jól olvasható

Monádok – 0

(Avagy: a monádok nem monádok)

- bölcsőjük a kategóriaelmélet és a 1960-as évek
- monád \leftarrow monoid vagy *félcsoport* (zárt, asszociatív, egységelemes, de nincs inverz)
- a funkcionális programozásban alkalmas eszköz *mellékhatások* kezelésére:
 - állapotok
 - kivételkezelés
 - ki- és bevétel
 - nemdeterminizmus
- a Haskellben egy monád egy típusoperátor
- a minimálisan elvárt műveleteket a *Monad* osztály adja
- ismertetések:
 - What the hell are Monads? (Noel Winstanley)
 - Monads for the Working Haskell Programmer (Theodore Norvell)

Hibakezelés – 2

Ötlet: vezessünk be egy *kombinátort*, ami elrejtí ezt a mintázatot!

```
thenMB      :: Maybe a -> (a -> Maybe b) -> Maybe b
mB `thenMB` f = case mB of
  Nothing -> Nothing
  Just a   -> f a
```

A lekérdezési szekvencia kombinátorral felírva:

```
r :: Maybe Record
r = doQuery q1 db `thenMB` \r1 ->
  doQuery (q2 r1) db `thenMB` \r2 ->
  doQuery (q3 r2) db `thenMB` ...
```

Előnyök:

- átláthatóbb, olvashatóbb kód
- típusa, viselkedése nem változott

Állapotkezelés – 1

Bizonyos számításoknál egy állapotot kell *láncszerűen* végigadogatni a függvények egy sorozatának. Az ilyen függvényeket *állapottranszformátoroknak* nevezzük:

```
type StateT s a = s -> (a, s)
```

Tfh. az adatbázisunkat módosítani is akarjuk:

```
addRec :: Record -> DB -> (Bool, DB)
delRec :: Record -> DB -> (Bool, DB)
```

vagy ugyanez a fenti típuszinonimával leírva:

```
addRec :: Record -> StateT DB Bool
delRec :: Record -> StateT DB Bool
```

A használatuk:

```
newDB :: StateT DB Bool
newDB db = let (ok1, db1) = addRec rec1 db
              (ok2, db2) = addRec rec2 db1
              (ok3, db3) = delRec rec3 db2
              in (ok1 && ok2 && ok3, db3)
```

Számos hibalehetőség!

Állapotkezelés hibakezeléssel kombinálva – 1

Elképzelhető, hogy egyszerre szeretnénk állapotot körbeadogatni és hibát kezelni:

```
type MbStateT s a = s -> Maybe (a, s)
```

Ehhez a típushoz új kombinátorokra van szükség:

```
thenMST :: MbStateT s a -> (a -> MbStateT s b) -> MbStateT s b
st `thenMST` f = \s -> case st s of
    Nothing    -> Nothing
    Just (v, s') -> f v s'
```

```
returnMST :: a -> MbStateT s a
returnMST v = \s -> Just (v, s)
```

Használatuk:

```
addRec :: Record -> MbStateT DB ()
delRec :: Record -> MbStateT DB ()
```

```
newDB :: StateT DB ()
newDB = addRec rec1 `thenMST` \_ ->
        addRec rec2 `thenMST` \_ ->
        delRec rec3
```

Állapotkezelés – 2

Ötlet: használjunk itt is kombinátort!

```
thenST      :: StateT s a -> (a -> StateT s b) -> StateT s b
st `thenST` f = \s -> let (v, s') = st s
                      in f v s'
```

Ez összekombinál egy állapottranszformátort és egy állapottranszformátort előállító függvényt. Az eredmény visszaadásához szükség van még egy kombinátorra:

```
returnST    :: a -> StateT s a
returnST a = \s -> (a, s)
```

Ez egy értéket *beemel* egy identitás-állapottranszformátorba.

Az előző adatbázismódosítás a kombinátorokkal felírva:

```
newDB :: StateT DB Bool
newDB = addRec rec1 `thenST` \ok1 ->
        addRec rec2 `thenST` \ok2 ->
        delRec rec3 `thenST` \ok3 ->
        returnST (ok1 && ok2 && ok3)
```

Elrejtettük az állapotargumentum körbeadogatását! (v.ö.: Prolog DCG)

Állapotkezelés hibakezeléssel kombinálva – 2

A `_ ->` kiírása eléggé feleslegesnek tűnik. Vezessünk be egy újabb kombinátort:

```
then_MST :: MbStateT s a -> MbStateT s b -> MbStateT s b
st1 `then_MST` st2 = st1 `thenMST` \_ -> st2
```

Ennek használatával `newDB` nagyon egyszerűvé és kifejezővé válik:

```
newDB :: StateT DB ()
newDB = addRec rec1 `then_MST`
        addRec rec2 `then_MST`
        delRec rec3
```

Monádok – 1

Jó lenne ezeket a hasonló hatású kombinátorokat ugyanazzal a szintaktikával írni. Ötlet: típusosztály bevezetése. Előnyök:

- azonos szintaktika minden monádhoz
- írhatók generikus monadikus függvények
- bevezethetők szintaktikus édesítőszerek

A Monad típusosztály

```
class Monad m where
  return :: a -> m a
  (>>=)  :: m a -> (a -> m b) -> m b
  (>>)   :: m a -> m b -> m b
  fail   :: String -> m a

  -- Minimal complete definition: (>>=), return
  p >> q = p >>= \_ -> q
  fail s = error s
```

Itt `>>=` (*kötés* vagy *bind*) felel meg a `then...` kombinátornak, `>>` a `then_...` kombinátornak.

A Maybe monád

Része a Prelude-nak.

Deklaráció

```
instance Monad Maybe where
  Just x  >>= k = k x
  Nothing >>= k = Nothing
  return  = Just
  fail s  = Nothing
```

Használat

```
doQuery :: Query -> DB -> Maybe Record
```

```
r :: Maybe Record
r = doQuery q1 db >>= \r1 ->
    doQuery (q2 r1) db >>= \r2 ->
    doQuery (q3 r2) db >>= ...
```

Monádok – 2

Törvények

- nem minden szemantikai megkötés adható meg típusokkal
- ezeket ún. *törvényekkel* (laws) adjuk meg
- a törvények betartása a programozó felelőssége
- az Eq osztályban: $x \neq y \equiv \text{not } (x == y)$
- a Functor osztályban: $\text{fmap id} \equiv \text{id}$
 $\text{fmap } (f \cdot g) \equiv \text{fmap } f \cdot \text{fmap } g$
- a Monad osztályban: $\text{return } a \gg= k \equiv k a$
 $m \gg= \text{return} \equiv m$
 $xs \gg= \text{return} \cdot f \equiv \text{fmap } f \cdot xs$
 $m \gg= (\lambda x \rightarrow k \ x \ \gg= \ h) \equiv (m \gg= k) \ \gg= \ h$

Párhuzam a félcsoportokkal

- `>>=` a félcsoport művelete
- `return` a félcsoport egységeleme

Az ST monád (állapottranszformátorok)

Gond: monadikus típus létrehozásához típuskonstruktorra van szükség, `StateT` nem alkalmas. Ötlet: az állapottranszformátort be kell csomagolni egy adatkonstruktorba.

Deklaráció

```
newtype ST s a = ST (StateT s a)
instance Monad (ST s) where
  ST st >>= f = ST (\s -> let (v,s') = st s
                          ST st' = f v
                          in st' s')
  return a   = ST (\s -> (a,s))
```

Használat

```
addRec :: Record -> ST DB Bool
delRec :: Record -> ST DB Bool
newDB  :: ST DB Bool
newDB = addRec rec1 >>= \ok1 ->
    addRec rec2 >>= \ok2 ->
    delRec rec3 >>= \ok3 ->
    return (ok1 && ok2 && ok3)
```


A do jelölés

A `>>=` és `>>` operátorok még kényelmesebb használatához van egy szintaktikus édesítőszer. Az előbbi `newDB` változata:

```
newDB :: ST DB Bool
newDB = do ok1 <- addRec rec1
          ok2 <- addRec rec2
          ok3 <- delRec rec3
          return (ok1 && ok2 && ok3)
```

Átalakítási szabályok:

- `do minta <- kifejezés parancsok` \implies `kifejezés >>= (minta -> do parancsok)`
- `do kifejezés parancsok` \implies `kifejezés >> do parancsok`
- `do let deklarációk parancsok` \implies `let deklarációk in do parancsok`
- `do kifejezés` \implies `kifejezés`

Imperatív stílusú programozás az ST monáddal – 2

A transzformátorok használata:

```
gcdST :: ST ImpS Integer
gcdST = do x <- getX
          y <- getY
          case compare x y of
            EQ -> return x
            LT -> do putY (y-x)
                    gcdST
            GT -> do putX (x-y)
                    gcdST
```

Egy transzformátor alkalmazása egy állapotra:

```
applyST :: ST s a -> StateT s a
applyST (ST st) = st
```

Felhasználás:

```
gcd x y = fst $ applyST gcdST (x,y)
```

```
gcd 8 4 == 4 ; gcd 8 5 == 1 ; gcd 8 6 == 2
```

Imperatív stílusú programozás az ST monáddal – 1

Feladat: legnagyobb közös osztó kiszámítása. Egy imperatív pszeudonyelven:

```
while x != y do
  if x < y
  then y := y-x
  else x := x-y
return x
```

Haskellben:

- `type ImpS = (Integer, Integer)`

- lekérdező transzformátorok:

```
getX, getY :: ST ImpS Integer
getX      = ST (\(x,y) -> (x, (x,y)))
getY      = ST (\(x,y) -> (y, (x,y)))
```

- módosító transzformátorok:

```
putX, putY :: Integer -> ST ImpS ()
putX x'    = ST (\(x,y) -> ((), (x',y)))
putY y'    = ST (\(x,y) -> ((), (x,y')))
```

Monádok – 3

További tulajdonságok

- Absztrakt adatstruktúra definiálásával elérhetjük, hogy csak a Monad osztály kombinátoraival lehessen kezelni egy monád elemeit.
- A monádból nem lehet kilépni: ha egy függvényben valahol megjelenik – és csak kombinátorokkal kezeljük – akkor a függvény eredménye is monadikus lesz.
- A kombinátorok egyértelműen megadják a kiértékelés *sorrendjét*.

További monadikus műveletek

- `sequence :: Monad m => [m a] -> m [a]`
`sequence [] = return []`
`sequence (c:cs) = do x <- c`
`xs <- sequence cs`
`return (x:xs)`

```
fst ((applyST . sequence) [getY,getX,gcdST] (8,6)) == [6,8,2]
```

- `mapM :: Monad m => (a -> m b) -> [a] -> m [b]`
`mapM f = sequence . map f`

Monádok aritmetikája

A félcsoport kibővítése

- a félcsoport kiegészíthető egy nullelemmel (`mzero`) és egy második művelettel (`mplus`)
- törvények:


```
mzero >>= k           ≡ mzero
p `mplus` mzero       ≡ p
mzero `mplus` p       ≡ p
p `mplus` (q `mplus` r) ≡ (p `mplus` q) `mplus` r
```
- a hibakezelő monádok esetében (pl. `Maybe`) az `mzero` elem hibajelzésre, az `mplus` kombinátor hibakezelésre szolgál (`try `mplus` catch`).

A MonadPlus osztály

```
class Monad m => MonadPlus m where
  mzero :: m a
  mplus :: m a -> m a -> m a
```

```
instance MonadPlus Maybe where
  mzero = Nothing
  Nothing `mplus` ys = ys
  xs `mplus` ys = xs
```

A Monad könyvtár

- a `MonadPlus` osztály és két implementációja (`Maybe`, listák)
- további hasznos függvények:


```
msum :: MonadPlus m => [m a] -> m a
msum = foldr mplus mzero

when :: (Monad m) => Bool -> m () -> m ()
when p s = if p then s else return ()

guard :: MonadPlus m => Bool -> m ()
guard p = if p then return () else mzero

liftM :: (Monad m) => (a -> b) -> (m a -> m b)
liftM f = \a -> do { a' <- a; return (f a') }

liftM2 :: (Monad m) => (a -> b -> c) -> (m a -> m b -> m c)
liftM2 f = \a b -> do { a' <- a; b' <- b; return (f a' b') }

ap :: (Monad m) => m (a -> b) -> m a -> m b
ap = liftM2 ($)
```

A lista mint monád

- ```
instance Monad [] where
 (x:xs) >>= f = f x ++ (xs >>= f)
 [] >>= f = []
 return x = [x]
 fail s = []
```
- ```
instance MonadPlus [ ] where
  mzero = []
  mplus = (++)
```
- a listánézet tkp. egy édesítőszer a monadikus kombinátoroknak!


```
[ (x,y) |
  x <- [1,2,3],          do x <- [1,2,3]
  y <- [1,2,3],          y <- [1,2,3]
  x /= y ]              True <- return (x /= y)
                        return (x,y)
```

Ha a mintaillesztés nem sikerül (pl. `True`), akkor az a sor egy `fail s` hívással ekvivalens, ahol `s` a hiba helyére utaló szöveg.

Ki- és bevétel – 1

Alapok

- tisztán funkcionális világ \Rightarrow ugyanaz az kifejezés mindig ugyanazt az értéket adja
- ha I/O-t szeretnénk, kell egy argumentum, ami a világ állapotát képviseli: `World`
- az I/O függvények a `World` állapot transzformátorai
- monád használatával el lehet rejteni az állapot körbepasszolását


```
data IO a = IO (StateT World a)
```
- az IO a típus *absztrakt*, nem lehet kibontani \Rightarrow csak monadikusan lehet kezelni
- az IO a típusú értékeket *akcióknak* nevezzük

Akciók kezelése

- ha az interpreternek akciót kell kiértékelni, *végrehajítja*, azaz átadja neki a világ állapotát
- önálló program írásához definiálni kell a `Main.main :: IO a` (általában `IO ()` típusú) függvényt
- az IO könyvtár tartalmazza a filekezeléshez szükséges függvényeket

Ki- és bevitel – 2

Egyszerű I/O függvények

- beolvasás:

```

getChar    :: IO Char
getContents :: IO String
getLine    :: IO String
getLine    = do c <- getChar
               if c=='\n' then return ""
               else do cs <- getLine; return (c:cs)

```

- kiírás:

```

putChar    :: Char -> IO ()
putStr     :: String -> IO ()
putStrLn   :: String -> IO ()
putStrLn s = putStr s >> putChar '\n'

```

- kommunikáció:

```

interact :: (String -> String) -> IO ()
interact f = getContents >>= (putStr . f)

```

Ki- és bevitel – 4

Hibakezelés

- az IO monádba hibakezelés is be van építve (ld. `MBStateT`)
- a hibák `IOError` típusúak
- hiba jelzése: `ioError :: IOError -> IO a`
- felhasználói hiba: `userError :: String -> IOError`
- a kettő együtt: `fail = ioError . userError`
- hibakezelés: `catch :: IO a -> (IOError -> IO a) -> IO a`

```

getChar' :: IO Char
getChar' = getChar `catch` (\e -> return '\n')

```

szebben ugyanez:

```

getChar' :: IO Char
getChar' = getChar `catch` eofHandler
  where eofHandler e = if isEOFError e
                       then return '\n'
                       else ioError e

```

Ki- és bevitel – 3

Egy teljes példa: a `wc` Unix program

```

import System (getArgs)
main :: IO ()
main = do
  args <- getArgs
  case args of
    [fname] -> do fstr <- readFile fname
                  let nWords = length . words $ fstr
                      nLines = length . lines $ fstr
                      nChars = length fstr
                  putStrLn . unwords $ [ show nLines
                                         , show nWords
                                         , show nChars
                                         , fname]
    _ -> putStrLn "usage: wc fname"

```

„A HASKELL PROGRAMOZÓ EVOLÚCIÓJA”

Egyszerű megoldások

Az elsőéves:

```
fac n = if n == 0 then 1
      else n * fac (n-1)
```

A kezdő:

```
fac 0 = 1
fac n = n * fac (n-1)
```

A haladó (jobb, ill. baloldali érzületű, és aki mást mutat, mint ami):

```
fac n = foldr (*) 1 [1..n]
fac n = foldl (*) 1 [1..n]
fac n = foldr (\x g n -> g (x*n)) id [1..n] 1
```

A „memoizer”:

```
facs = scanl (*) 1 [1..]
```

```
fac n = facs !! n
```

A „statikus”

```
data Zero
data Succ n

class Add a b c | a b -> c where
  add :: a -> b -> c
instance Add Zero b b
instance Add a b c => Add (Succ a) b (Succ c)

class Mul a b c | a b -> c where
  mul :: a -> b -> c
instance Mul Zero b Zero
instance (Mul a b c, Add b c d) => Mul (Succ a) b d

class Fac a b | a -> b where
  fac :: a -> b
instance Fac Zero One
instance (Fac n k, Mul (Succ n) k m) => Fac (Succ n) m
```

Valamivel komplikáltabb megoldások

Az akkumuláló:

```
facAcc a 0 = a
facAcc a n = facAcc (n*a) (n-1)
```

```
fac = facAcc 1
```

A fixpontos:

```
y f = f (y f)
```

```
fac = y (\f n -> if (n==0) then 1 else n * f (n-1))
```

A kombinátoros:

```
s f g x      = f x (g x)
k x y        = x
b f g x      = f (g x)
c f g x      = f x g
y f          = f (y f)
cond p f g x = if p x then f x else g x
```

```
fac = y (b (cond ((==) 0) (k 1)) (b (s (*)) (c b pred)))
```

A Ph.D. fokozatot szerzett – 1

```
-- explicit type recursion based on functors
newtype Mu f = Mu (f (Mu f)) deriving Show
in   x = Mu x
out (Mu x) = x

-- cata- and ana-morphisms for *arbitrary* (regular) base functors
cata phi = phi . fmap (cata phi) . out
ana psi = in . fmap (ana psi) . psi

-- base functor and data type for natural numbers,
-- using a curried elimination operator
data N b = Zero | Succ b deriving Show
instance Functor N where
  fmap f = nelim Zero (Succ . f)
nelim z s Zero = z
nelim z s (Succ n) = s n

type Nat = Mu N
```

A Ph.D. fokozatot szerzett – 2

```

-- conversion to internal numbers, conveniences and applications
int = cata (nelim 0 (1+))
instance Show Nat where
  show = show . int

zero  = in  Zero
suck  = in  . Succ -- pardon my "French" (Prelude conflict)
plus n = cata (nelim n  suck  )
mult n = cata (nelim zero (plus n))

-- base functor and data type for lists
data L a b = Nil | Cons a b deriving Show
instance Functor (L a) where
  fmap f = lelim Nil (\a b -> Cons a (f b))
lelim n c Nil      = n
lelim n c (Cons a b) = c a b

type List a = Mu (L a)

```

A professzor

```

fac n = product [1..n]

```

A Ph.D. fokozatot szerzett – 3

```

-- conversion to internal lists, conveniences and applications
list = cata (lelim [] (:))

instance Show a => Show (List a) where
  show = show . list

prod = cata (lelim (suck zero) mult)

upto = ana (nelim Nil (diag (Cons . suck))) . out

diag f x = f x x

fac = prod . upto

```