# Deklaratív programozás

**Hanák Péter**
hanak@inf.bme.hu

**Irányítástechnika és Informatika Tanszék**

**OM Kutatás-Fejlesztési Helyettes Államtitkárság**

**Szeredi Péter, Benkő Tamás**
{szeredi,benko}@iqsoft.hu

**Számítástudományi és Információelméleti Tanszék**

**IQSOFT Intelligens Software Rt.**

# KÖVETELMÉNYEK — TUDNIVALÓK

# Deklaratív programozás: tudnivalók

## Honlap, levelezési lista

- Honlap: <http://www.inf.bme.hu/~dp>
- Levlista: <http://www.inf.bme.hu/mailman/listinfo/dp-l>. Moderált. Csak a feliratkozottak küldhetnek levelet a <dp-l@inf.bme.hu> címre.

## Jegyzet

- Szeredi Péter, Benkő Tamás: Deklaratív programozás. Bevezetés a logikai programozásba.
- Hanák D. Péter: Deklaratív programozás. Bevezetés a funkcionális programozásba.
- Új, bővített kiadások 2001-ben, kötetenként 650 Ft; pdf változatban a honlapon
- Jegyzetrendelés: a honlapon megadandó módon
- A 2001. tavaszi félév előadásainak fóliái a honlapon (pdf)

# Deklaratív programozás: tudnivalók (folyt.)

## Fordító- és értelmezőprogramok

- SICStus Prolog (3.8.5, licenszköteles, aláírás ellenében jelszót adunk)
- Moscow SML (2.0, szabad szoftver)
- Mindkettő telepítve van a <kempelen.inf.bme.hu>-n
- Mindkettő letölthető a honlapról (linux, Win95/98/NT)
- Webes gyakorló felület (folyamatosan készül, ld. honlap)
- Kézikönyvek HTML-változatban (MOSML pdf is)
- Más programok: swiProlog, gnuProlog, smlnj. (Figyelem: kompatibilitás!)
- emacs-szövegszerkesztő SML-, ill. Prolog-módban (linux, Win95/98/NT)

# Deklaratív programozás: félévközi követelmények

## Nagy házi feladat (NHF)

- Programozás mindkét nyelven (Prolog, SML)
- Mindenkinek önállóan kell kódolnia (programoznia)!
- Hatékony (időlimit!), jól dokumentált („kommentezett”) programok
- A két programhoz közös, 8-10 oldalas fejlesztői dokumentáció (TXT, TeX/LaTeX, HTML, PDF, PS; de nem DOC vagy RTF)
- Kiadás a 4.-5. héten, a honlapon, letölthető keretprogrammal
- Beadás a 13. héten (létraversenyhez), legkésőbb a vizsgaidőszak első hetében; elektronikus levélben (ld. honlap)
- A beadáskor és a pontozáskor külön-külön tesztsorozatot használunk (nehézségben hasonlókat, de nem azonosakat)
- A minden tesztesetet hibátlanul megoldó programok *létraversenyen* vesznek részt (hatékonyság, gyorsaság plusz pontokért)

# Deklaratív programozás: félévközi követelmények (folyt.)

## Nagy házi feladat (folyt.)

- Nem kötelező, de *nagyon* ajánlott!
- 40%-os szabály (nyelvenként a max. részpontszám 40%-a kell az eredményességhez)
- Csak Prolog- vagy csak SML-változat is beadható
- Súlya az osztályzatban: 15%

# Deklaratív programozás: félévközi követelmények (folyt.)

## Kis házi feladatok (KHF)

- 2-3 feladat Prologból is, SML-ből is
- Beadás elektronikus levélben (ld. honlap)
- Nem kötelező, de nagyon ajánlott!
- Minden feladat jó megoldásáért 1-1 jutalompont

## Gyakorló feladatok

- Nem kötelező, de nagyon ajánlott!
- Gyakorlás a honlapon keresztül
- A gyakorlatok megoldását nyilvántartjuk
- Pontot nem adunk

# Deklaratív programozás: félévközi követelmények (folyt.)

## Nagyzárthelyi, pótzárthelyi (NZH, PZH)

- NZH a 13. oktatási héten
- Kötelező!
- Semmilyen jegyzet, segédlet nem használható
- A megtanulandó könyvtári függvények, ill. eljárások listáját előre megadjuk
- 40%-os szabály (nyelvenként a max. részpontszám 40%-a kell az eredményességhez!)
- PZH a vizsgaidőszak első hetében
- Súlya az osztályzatban: 15%

# Deklaratív programozás: vizsga

## Vizsga

- Szóbeli, felkészülés írásban
- Prolog, SML: több kisebb feladat, kétszer 35 pontért (programírás, -elemzés)
- Semmilyen jegyzet, segédlet nem használható
- A megtanulandó könyvtári függvények, ill. eljárások listáját előre megadjuk
- Ellenőrizzük a nagy házi feladat és a zárthelyi „hitelességét”
- 40%-os szabály (nyelvenként a max. részpontszám 40%-a kell az eredményességhez!)
- Korábbi vizsgakérdések a honlapon találhatók

# DEKLARATÍV ÉS IMPERATÍV PROGRAMOZÁS

# Programozási nyelvek osztályozása

**Programozási nyelvek — stílusok**

**Imperatív**

*Fortran*
*Algol*
*C*
*C++*
...

**Deklaratív**

**Funkcionális**

*LISP*
*ML*
...

**Logikai**

*SQL*
*Prolog*
*CLP nyelvek*
...

# Imperatív és deklaratív programozási nyelvek

## Imperatív program

- felszólító módú, utasításokból áll
- változó: változtatható értékű memóriahely
- Példa: `int fakt(int n) {int f=1; while (n>1) f*=n-; return f;}`

## Deklaratív program

- kijelentő módú, egyenletekből, állításokból áll
- változó: egy ismeretlen, de (előbb–utóbb) rögzített értékű mennyiség
- SML példa: `fun fakt 0 = 1 | fakt n = n * fakt (n-1);`
- C példa: `int fakt(int n) {if (n<=1) return 1; else return n*fakt(n-1);}`

## Deklaratív nyelvek jelszavai

- MIT és nem HOGYAN (WHAT rather than HOW): a *megoldás módja* helyett inkább a megoldandó *feladat leírását* kell megadni
- Egyszeres értékadás (single assignment) — párhuzamos végrehajthatóság

# Példa — családi kapcsolatok

## Adatok

Egy gyerek–szülő kapcsolat, pl.

| gyerek | szülő |
|---|---|
| Imre | István |
| Imre | Gizella |
| István | Géza |
| István | Sarolta |
| Gizella | Civakodó Henrik |
| Gizella | Burgundi Gizella |

## A feladat:

Definiálandó az unoka–nagyszülő kapcsolat, pl. keressük egy adott személy nagyszüleit.

# A nagyszülő feladat — C nyelvű megoldás

```
/* Az adatbázis */
struct gysz {
  char *gyerek, *szulo;
} szulok[] = {
  "Imre",    "István",
  "Imre",    "Gizella",
  "István",  "Géza",
  "István",  "Sarolt",
  "Gizella", "Civakodó Henrik",
  "Gizella", "Burgundi Gizella",
  NULL,      NULL
};
```

```
/*  unoka nagyszüleinek kiiratása */
void nagyszuloi(char *unoka)
{
  struct gysz *mgysz = szulok;
  for (; mgysz->gyerek; ++mgysz)
    if(!strcmp(unoka, mgysz->gyerek))
    { struct gysz *mszn = szulok;
      for (; mszn->gyerek; ++mszn)
        if (!strcmp(mgysz->szulo,
                    mszn->gyerek))
          puts(mszn->szulo);
    }
}
```

# A nagyszülő feladat — SML megoldás

```
(* szulei x = az x személy szüleinek listája *)
fun szulei "Imre"    = ["István", "Gizella"]
  | szulei "István"  = ["Géza", "Sarolt"]
  | szulei "Gizella" = ["Civakodó Henrik", "Burgundi Gizella"]
  | szulei _         = []     (* senki másnak nincs szülője *)
 > val szulei = fn : string -> string list

(* nagyszulei g = g nagyszüleinek listája*)
fun nagyszulei g = List.concat (map szulei (szulei g));
 > val nagyszulei = fn : string -> string list
```

## A függvény futtatása

```
 - nagyszulei "Imre";
 > val it = ["Géza", "Sarolt", "Civakodó Henrik", "Burgundi Gizella"]
           : string list
```

# A nagyszülő feladat — SQL megoldás

```
SQL> create table szulok (gyerek char(30), szulo char(30));
(...)

SQL> create view nagyszulok as select fiatal.gyerek, oreg.szulo
  2    from szulok fiatal, szulok oreg
  3    where fiatal.szulo = oreg.gyerek;
View created.

SQL> select * from nagyszulok;
GYEREK                         SZULO
------------------------------ ------------------------------
Imre                           Civakodó Henrik
Imre                           Burgundi Gizella
Imre                           Géza
Imre                           Sarolt

SQL>
```

# A nagyszülő feladat — Prolog megoldás

```
% szuloje(Gy, Sz): Gy szülője Sz.
szuloje('Imre', 'István').
szuloje('Imre', 'Gizella').
szuloje('István', 'Géza').
szuloje('István', 'Sarolt').
szuloje('Gizella',
             'Civakodó Henrik').
szuloje('Gizella',
             'Burgundi Gizella').

%  Gyerek nagyszülője Nagyszulo.
nagyszuloje(Gyerek, Nagyszulo) :-
    szuloje(Gyerek, Szulo),
    szuloje(Szulo, Nagyszulo).
```

```
% Kik Imre nagyszülei?
| ?- nagyszuloje('Imre', NSz).
NSz = 'Géza' ? ;
NSz = 'Sarolt' ? ;
NSz = 'Civakodó Henrik' ? ;
NSz = 'Burgundi Gizella' ? ;
no
% Kik Géza unokái?
| ?- nagyszuloje(U, 'Géza').
U = 'Imre' ? ;
no
```

# A deklaratív és imperatív megoldások összehasonlítása

## A keresési feladat megoldása

- C nyelven: ciklussal
- SQL-ben: beépített adatbázis-kereséssel
- SML-ben: magasabbrendű függvénybe rejtett rekurzióval
- Prologban: beépített mintaillesztéses eljáráshívással

## Az összetett feltételek kezelése

- C nyelven: skatulyázott ciklussal
- SML-ben: leképezések komponálásával
- SQL-ben, Prologban: relációk konjunkciójának képzésével

## A funkcionális és logikai megoldásokról

- az SML megoldás rendkívül tömör (magasabbrendű függvények)
- a Prolog megoldás többirányú (több függvénykapcsolatnak felel meg)

# Egy „számolós” program: faktoriális

```
% Prolog megoldás: fakt(N, F): F = N!.
fakt(0, 1).                  % 0! = 1.
fakt(N, F) :-                % N! = F, ha
        N > 0,               % N > 0 és
        N1 is N-1,           % N1 = N-1 és
        fakt(N1, F1),        % N1! = F1 és
        F is F1*N.           % F = N*F1.

(* SML megoldás: fakt n = n! *)
fun fakt 0 = 1
  | fakt n = n * fakt (n-1)
```

## Tanulságok, érdekességek

- **SML skatulyázott függvények ⇔ Prolog egymás mellé rendelt relációk**
- **Negatív argumentumra a Prolog kód meghiúsul, az SML kód végtelen ciklusba esik**

# Egy összetettebb példa: N-edik generációs ősök

## SML megoldás

```
(* szulei_l lista = a lista-ban szereplő emberek szüleinek listája*)
fun szulei_l ls = List.concat (map szulei ls)
 > val szulei_l = fn : string list -> string list

fun nagyszulei1 gy = szulei_l (szulei gy)
fun nagyszulei2 gy = szulei_l (szulei_l [gy])

fun osei (0, gy) = [gy]
  | osei (n, gy) = szulei_l (osei (n-1, gy))
 > val osei = fn : int * string -> string list

 - osei (2, "Imre");
 > val it = ["Géza", "Sarolt", "Civakodó Henrik", "Burgundi Gizella"]
           : string list
```

# N-edik generációs ősök — Prolog megoldás

```
% ose(N, E0, E): E0-nak N-edik generációs őse az E.
% **** N adott szám. ****
ose(0,  E, E).
ose(N, E0, E) :-
        N > 0, N1 is N-1,
        szuloje(E0, Sz),
        ose(N1, Sz, E).
```

## Futása

```
| ?- ose(2, 'Imre', Os).
Os = 'Géza' ? ;
Os = 'Sarolt' ? ;
Os = 'Civakodó Henrik' ? ;
Os = 'Burgundi Gizella' ? ;
no
```

```
| ?- ose(2, Utod, 'Burgundi Gizella').
Utod = 'Imre' ? ;
no
| ?- ose(N, 'Imre', Os).
N = 0, Os = 'Imre' ? ;
{INSTANTIATION ERROR: _157>0 - arg 1}
```

# N-edik generációs ősök — általánosabb Prolog megoldás

```
% ose1(N, E0, E): E0-nak N-edik generációs őse az E.
ose1(0,  E, E).
ose1(N, E0, E) :-
        szuloje(E0, Sz), ose1(N1, Sz, E), N is N1+1.
```

## Futása

```
| ?- ose1(N, 'Imre', Os), N < 2.
N = 0, Os = 'Imre' ? ;
N = 1, Os = 'István' ? ;
N = 1, Os = 'Gizella' ? ;
no
| ?- ose1(I, Utod, 'Burgundi Gizella').
I = 0, Utod = 'Burgundi Gizella' ? ;
I = 2, Utod = 'Imre' ? ;
I = 1, Utod = 'Gizella' ? ;
no
```

# A funkcionális programozásról dióhéjban

## Alapeszme

- a program elemei értékek, speciálisan függvények
  - egy függvény egy kiszámítási szabályt ad meg
  - a program futása: kiértékelés (egyszerűsítés, redukció)

## A funkcionális programozás első megvalósítása: LISP

- alapötlet: listák könnyű/hatékony feldolgozása

## A funkcionális programozás egy modern megvalósítása: SML

- a függvények „teljes jogú” értékek
- erős típusfogalom, típusok automatikus levezetése

# SML — előnyök és hátrányok

## Miért jó?

- nagyon tömör kód
- függvények is értékek: futási időben létrehozhatók
- mintaillesztés: adatstruktúrák könnyen, áttekinthetően kezelhetők
- erős típusrendszer

## Mik a hátrányai?

- megszokottól eltérő programozói stílus

## Hogyan tovább?

- lusta kiértékelés (Haskell, Clean)
- párhuzamos végrehajtás (Parallel Haskell, CAML — Concurrent ML)
- típusrendszer bővítése öröklődéssel (Haskell, Clean, Objective CAML)

# A logikai programozásról dióhéjban

## Alapeszme

- **A program elemei logikai állításoknak felelnek meg, pl.:**
  `nagyszuloje(U, N) :- szuloje(U, Sz), szuloje(Sz, N).`
  **matematikai formája:**
  $\forall U \forall N \forall Sz(\texttt{nagyszuloje}(U, N) \leftarrow \texttt{szuloje}(U, Sz) \land \texttt{szuloje}(Sz, N))$
- **A program futása: dedukció (tételbizonyítási folyamat)**

## A logikai programozás első megvalósítása: a Prolog nyelv

- **A logikai állítások egyszerűek, tekinthetők eljárásdefiníciónak is**
- **A tételbizonyítási folyamat értelmezhető mint:**
  **mintaillesztéses eljáráshívás + visszalépéses keresés**
- **Prolog = RDBMS + rekurzió + adatstruktúrák**

# Prolog — előnyök és hátrányok

## Miért jó?

- tömör kód, többirányú eljárások
- „automatikus” visszalépéses keresés, ciklusok kiváltása
- „logikai” változó — meghatározatlan adatok kezelése

## Mik a hátrányai?

- nehéz megtanulni (különösen „tapasztalt” programozóknak)
- rögzített, rugalmatlan vezérlési mechanizmus
- gyenge következtetési képesség

## Hogyan tovább?

- CLP — korlát logikai programozás (constraint logic programming)
- annotációk, típusok — Mercury
- rugalmasabb vezérlés, párhuzamos végrehajtás — Aurora, Andorra, Oz

# Deklaratív programozás — miért tanítjuk?

## Új, magasszintű programozási elemek

- rekurzió
- mintaillesztés
- visszalépéses keresés

## Új gondolkodási stílus

- a programrészek (relációk, függvények) önálló jelentéssel bírnak
- a kód és a jelentés összevethető: program-verifikáció

## Új alkalmazási területek

- szimbolikus alkalmazások
- következtetési módszerekre épülő megoldások
- nagyfokú megbízhatóságot igénylő rendszerek

# Egy példa: párbeszéd egy 50 soros Prolog programmal

```
| ?- párbeszéd.
|: Magyar legény vagyok én.
Felfogtam.
|: Ki vagyok én?
Magyar legény
|: Péter kicsoda?
Nem tudom.
|: Péter tanuló.
Felfogtam.
|: Péter jó tanuló.
Felfogtam.
|: Péter kicsoda?
tanuló
jó tanuló
|: Boldog vagyok.
Felfogtam.
|: Te egy Prolog program vagy.
Felfogtam.
|: Ki vagyok én?
Magyar legény
Boldog
|: Okos vagy.
Felfogtam.
|: Te vagy a világ közepe.
Felfogtam.
|: Ki vagy  te?
egy Prolog program
Okos
a világ közepe
|: Valóban?
Nem értem.
|: Unlak.
Én is.
```

# BEVEZETÉS A LOGIKAI PROGRAMOZÁSBA

# Bevezetés a Logikai Programozásba

## Az előadássorozat áttekintése

- Bevezetés
- A Prolog nyelv alapjai
- Prolog programozási módszerek
- A legfontosabb beépített eljárások
- Fejlettebb nyelvi és rendszerelemek
- Prolog programozási példa
- Új irányzatok a logikai programozásban

# A Prolog/LP rövid történeti áttekintése

| | |
|---|---|
| 1960-as évek | Tételbizonyító programok |
| 1970-72 | A logikai programozás elméleti alapjai (R A Kowalski) |
| 1972 | Az első Prolog interpreter (A Colmerauer) |
| 1975 | A második Prolog interpreter (Szeredi P) |
| 1977 | Az első Prolog fordítóprogram (D H D Warren) |
| 1977–79 | Számos kisérleti Prolog alkalmazás Magyarországon |
| 1981 | A japán 5. generációs projekt a logikai programozást választja |
| 1982 | A magyar MProlog az egyik első kereskedelmi forgalomba kerülő Prolog megvalósítás |
| 1983 | Egy új fordítási modell és absztrakt Prolog gép (WAM) megjelenése (D H D Warren) |
| 1986 | Prolog szabványosítás kezdete |
| 1987–89 | Új logikai programozási nyelvek (CLP, Gödel, stb.) |
| 1990–. . . | Prolog megjelenése párhuzamos számítógépeken<br>Nagyhatékonyságú Prolog fordítóprogramok<br>..... |

# Információk a logikai programozásról

## Prolog megvalósítások:

- SWI Prolog: `http://www.swi.psy.uva.nl/projects/SWI-Prolog/`
- SICStus Prolog: `http://www.sics.se/ps/sicstus/sicstus_toc.html`
- GNU Prolog: `http://pauillac.inria.fr/~diaz/gnu-prolog/`

## Hálózati információforrások:

### The WWW Virtual Library: Logic Programming:

`http://www.comlab.ox.ac.uk/archive/logic-prog.html`

### CMU Prolog Repository:

`http://www.cs.cmu.edu/afs/cs.cmu.edu/project/ai-repository/ai/lang/prolog/0.html`

### Prolog FAQ:

`http://www.cs.cmu.edu/afs/cs/project/ai-repository/ai/lang/prolog/faq/prolog.faq`

### Prolog Resource Guide:

`http://www.cs.cmu.edu/afs/cs/project/ai-repositoryai/lang/prolog/faq/prg_[12].faq`

# Magyar nyelvű Prolog irodalom

Farkas Zsuzsa, Futó Iván, Langer Tamás, Szeredi Péter:
Az MProlog programozási nyelv.
Műszaki Könyvkiadó, 1989

Márkusz Zsuzsa: Prologban programozni könnyű.
Novotrade, 1988

Futó Iván (szerk.): Mesterséges intelligencia. (9.2 fejezet, Szeredi Péter)
Aula Kiadó, 1999

# A PROLOG NYELV KÖZELÍTŐ SZINTAXISA

# Predikátumok, klózok

```
% két klózból álló predikátum definíciója, funktora: ose/3
ose(0,  E, E).                     %                     1. klóz, tényállítás
ose(N, E0, E) :-                   %             fej   |
        szuloje(E0, Sz),           % cél       | törzs | 2. klóz, szabály
        ose(N1, Sz, E), N is N1+1. % cél, cél  |       |
```

| | | |
|---|---|---|
| ⟨ Prolog program ⟩ | ::= | ⟨ predikátum ⟩ . . . |
| ⟨ predikátum ⟩ | ::= | ⟨ klóz ⟩ . . . {azonos funktorú} |
| ⟨ klóz ⟩ | ::= | ⟨ tényállítás ⟩.␣ \| ⟨ szabály ⟩.␣ |
| ⟨ tényállítás ⟩ | ::= | ⟨ fej ⟩ |
| ⟨ szabály ⟩ | ::= | ⟨ fej ⟩ :- ⟨ törzs ⟩ |
| ⟨ törzs ⟩ | ::= | ⟨ cél ⟩, . . . |
| ⟨ cél ⟩ | ::= | ⟨ kifejezés ⟩ |
| ⟨ fej ⟩ | ::= | ⟨ kifejezés ⟩ |

- Alternativ szóhasználat:
  - predikátum — eljárás
  - cél — hívás

# Prolog kifejezések

```
%          ose(0, E, E)                 % összetett kifejezés, funktora ose/3
%           |  |  |  |
% struktúranév |  argumentum, változó
%              \- argumentum, számkonstans
```

| | | | |
|---|---|---|---|
| ⟨ kifejezés ⟩ | ::= | ⟨ változó ⟩ \| | {`var`} |
| | | ⟨ konstans ⟩ \| | {`atomic`} |
| | | ⟨ összetett kifejezés ⟩ | {`compound`} |
| ⟨ konstans ⟩ | ::= | ⟨ névkonstans ⟩ \| | {`atom`} |
| | | ⟨ számkonstans ⟩ | {`number`} |
| ⟨ összetett kifejezés ⟩ | ::= | ⟨ struktúranév ⟩ ( ⟨ argumentum ⟩, ... ) | |
| ⟨ struktúranév ⟩ | ::= | ⟨ névkonstans ⟩ | |
| ⟨ argumentum ⟩ | ::= | ⟨ kifejezés ⟩ | |

- összetett kifejezés funktora = struktúranév/argumentumszám, pl. `ose/3`
- konstans funktora = konstans/0, pl. `'István'/0`
- változónak nincs funktora

# Lexikai elemek

```
% változó:        Fakt FAKT _fakt X2 _2 _
% névkonstans:    fakt ≡ 'fakt' 'István' [] ; ',' += ** \= ≡ '\\='
% számkonstans:   0 -123 10.0 -12.1e8
% nem (egyetlen) névkonstans:  !=, Istvan
% nem (egyetlen) számkonstans: 1e8 1.e2
```

| | | |
|---|---|---|
| **⟨ változó ⟩** | | **⟨ nagybetű ⟩⟨ alfanum ⟩. . . \|** |
| | | **_ ⟨ alfanum ⟩. . . \|** |
| **⟨ névkonstans ⟩** | ::= | **'⟨ névkar ⟩. . . ' \|** |
| | | **⟨ kisbetű ⟩⟨ alfanum ⟩. . . \|** |
| | | **⟨ tapadó jel ⟩. . . \|** `!` **\|** `;` **\|** `[]` **\|** `{}` |
| **⟨ névkar ⟩** | ::= | **{tetszőleges nem ' és nem \ karakter} \|** |
| | | **\ ⟨ escape szekvencia ⟩** |
| **⟨ alfanum ⟩** | ::= | **⟨ kisbetű ⟩ \| ⟨ nagybetű ⟩ \| ⟨ számjegy ⟩ \| _** |
| **⟨ tapadó jel ⟩** | ::= | `+` \| `-` \| `*` \| `/` \| `\` \| `$` \| `^` \| `<` \| `>` \| `=` \| `` ` `` \| `~` \| `:` \| `.` \| `?` \| `@` \| `#` \| `&` |
| **⟨ számkonstans ⟩** | ::= | **{előjeles vagy előjeltelen számjegysorozat** |
| | | **esetleges tizedes résszel és exponenssel}** |

# Szintaktikus édesítőszer: operátorok

```
% N is N1+1 ekvivalens az is(N, +(N1,1)) kifejezéssel
```

## Operátor-deklaráció

- `:- op(`⟨ **prioritás** ⟩, ⟨ **fajta** ⟩, ⟨ **operátornév** ⟩).
- ⟨ **operátornév** ⟩ **tetszőleges névkonstans**
- ⟨ **prioritás** ⟩ **0–1200 közötti egész**
- ⟨ **fajta** ⟩
  - **infix:** `yfx`, `xfy`, `xfx`; `A op B` ≡ `op(A, B)`
  - **prefix:** `fx`, `fy`; `op A` ≡ `op(A)`
  - **postfix:** `xf`, `yf`; `A op` ≡ `op(A)`
- **a** ⟨ **fajta** ⟩**-ban** `x` **és** `y` **az asszociativitást határozzák meg:**
  - `x`**: az adott oldalon nem állhat azonos prioritású operátor zárójelezetlenül**
  - `y`**: az adott oldalon állhat azonos prioritású operátor zárójelezetlenül**

# Beépített operátorok

## Szabványos operátorok

| | | |
|---|---|---|
| 1200 | xfx | `:-, ->` |
| 1200 | fx | `:-, ?-` |
| 1100 | xfy | `;` |
| 1050 | xfy | `->` |
| 1000 | xfy | `','` |
| 900 | fy | `\+` |
| 700 | xfx | `< = \= =.. =:= =< == \==` |
| 700 | xfx | `=\= > >= is @< @=< @> @>=` |
| 500 | yfx | `+ - /\ \/` |
| 400 | yfx | `* / // rem mod`[1] `<< >>` |
| 200 | xfx | `**` |
| 200 | xfy | `^` |
| 200 | fy | `-`[2]`, \` |

## Egyéb beépített operátorok

| | | |
|---|---|---|
| 1150 | fx | `dynamic multifile` |
| | | `block meta_predicate` |
| 900 | fy | `spy nospy` |
| 550 | xfy | `:` |
| 500 | yfx | `#` |
| 500 | fx | `+`[3] |

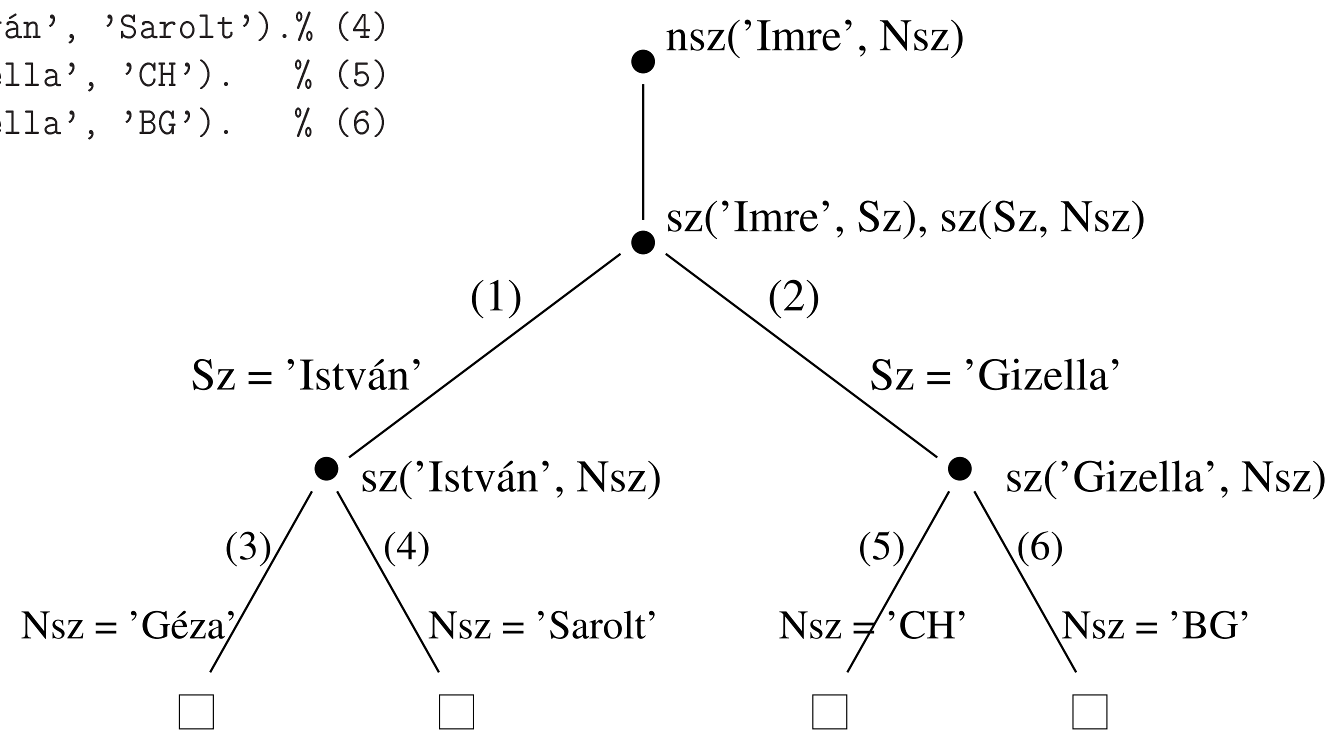
[1] `sicstus` módban 300 `xfx` operátor
[2] `sicstus` módban 500 `fx` operátor
[3] `iso` módban 200 `fy` operátor

# A PROLOG VÉGREHAJTÁSI MECHANIZMUSA

# Prolog végrehajtási példa

```
sz('Imre', 'István').  % (1)
sz('Imre', 'Gizella'). % (2)
sz('István', 'Géza').  % (3)
sz('István', 'Sarolt').% (4)
sz('Gizella', 'CH').   % (5)
sz('Gizella', 'BG').   % (6)
```

```
nsz(Gy, N) :-
    sz(Gy, Sz), sz(Sz, N).
```



# A végrehajtás alapelemei: egyesítés

Az eljáráshívás és egy klózfej azonos alakra hozása, változók behelyettesítésével
Példák

- **Bemenő paraméterátadás:**
  **hívás:** `nsz('Imre', Nsz),`
  **fej:** `nsz(Gy, N),`
  **behelyettesítés:** `Gy = 'Imre', N = Nsz`
- **Kimenő paraméterátadás:**
  **hívás:** `sz('Imre', Sz),`
  **fej:** `sz('Imre', 'István'),`
  **behelyettesítés:** `Sz = 'István'`
- **Bemenő/kimenő paraméterátadás:**
  **hívás:** `ose(N, 'Imre', Os)`
  **fej:** `ose(0, E, E)`
  **behelyettesítés:** `N = 0, E = 'Imre', Os = 'Imre'`

# A végrehajtás alapelemei: redukciós lépés

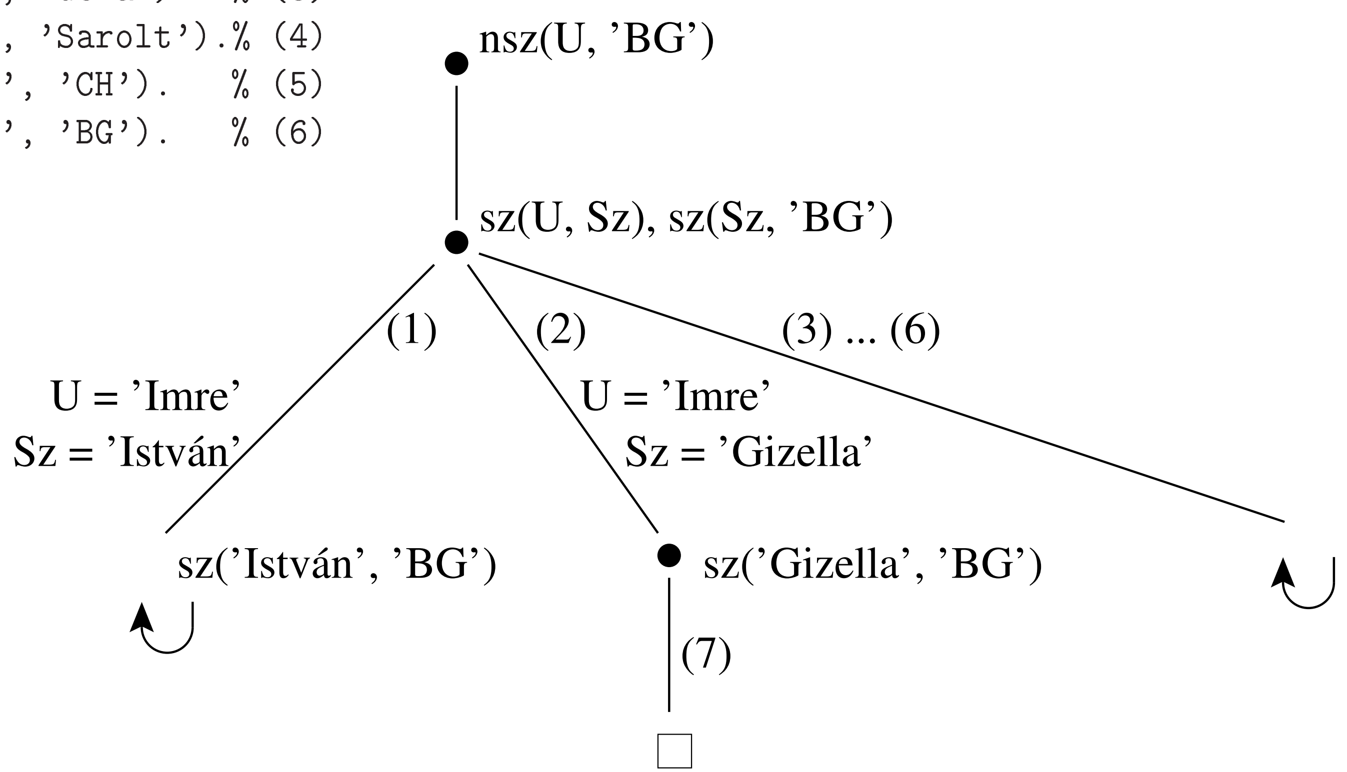
## Redukciós lépés

- Egy célsorozat (hívássorozat) redukálása egy újabb célsorozattá egy klóz segítségével
- A redukciós lépés végrehajtása:
  - A klózt lemásoljuk, minden változót szisztematikusan új változóra cserélve.
  - A célsorozatot szétbontjuk az első hívásra és a maradékra.
  - Az első hívást egyesítjük a klózfejjel
  - Az egyesítéshez szükséges behelyettesítéseket elvégezzük a klóz törzsén és a célsorozatot maradékán
  - Az új célsorozat: a klóztörzs és utána a maradék célsorozat

# Újabb végrehajtási példa

```
sz('Imre', 'István').  % (1)
sz('Imre', 'Gizella'). % (2)
sz('István', 'Géza').  % (3)
sz('István', 'Sarolt').% (4)
sz('Gizella', 'CH').   % (5)
sz('Gizella', 'BG').   % (6)
```

```
nsz(Gy, N) :-
    sz(Gy, Sz), sz(Sz, N).
```



# A Prolog végrehajtási algoritmusa

1. *(Kezdeti beállítások:)* A verem üres, `CS := célsorozat`
2. *(Beépített eljárások:)* Ha `CS` első célja beépített akkor hajtsuk végre,
   a. Ha sikertelen ⇒ 6. lépés.
   b. Ha sikeres, elvégezzük a behelyettesítéseket, `CS`-ből elhagyjuk az első hívást, ⇒ 5. lépés.
3. *(Klózszámláló kezdőértékezése:)* `I = 1`.
4. *(Redukciós lépés:)* `CS` első hívásához tartozó eljárásdefinícióban `N` klóz van.
   a. Ha `I > N` ⇒ 6. lépés.
   b. Redukciós lépés az `I`-edik klóz és a `CS` célsorozat között.
   c. Ha sikertelen, akkor `I := I+1` ⇒ 4. lépés.
   d. Ha `I < N` (nem utolsó), akkor vermeljük `<CS,I>`-t.
   e. `CS :=` a redukciós lépés eredménye
5. *(Siker:)* Ha `CS` üres, akkor sikeres vég, egyébként ⇒ 2. lépés.
6. *(Sikertelenség:)* Ha a verem üres, akkor sikertelen vég.
7. *(Visszalépés:)* Ha a verem nem üres, akkor leemeljük a veremből `<CS, I>`-t, `I := I+1`, és ⇒ 4. lépés.

# Előzetes — aritmetikai beépített eljárások

- `X is Kif`: A `Kif` aritmetikai kifejezés értékét egyesíti `X`-szel
- `Kif1 < Kif2`, `Kif1 =< Kif2`, `Kif1 > Kif2`, `Kif1 >= Kif2`, `Kif1 =:= Kif2`, `Kif1 =\= Kif2`: A `Kif1` és `Kif2` aritmetikai kifejezések értéke a megadott relációban van egymással (`=:=` ⇒egyenlő, `=\=` ⇒nem-egyenlő).
- Ha `Kif`, `Kif1`, `Kif2` valamelyike nem aritmetikai kifejezés ⇒hiba.
- Legfontosabb aritmetikai operátorok: `+`, `-`, `*`, `/`, `mod`, `//` (egész-osztás)

```
| ?- X is 1*2+3.
X = 5 ?
| ?- X is alma.
{DOMAIN ERROR: _78 is alma - arg 2: expected expression, found alma}
| ?- X =:= 1*2+3.
{INSTANTIATION ERROR: _84=:=1*2+3 - arg 1}
| ?- 1+2*3 > 2*3+1.
no
| ?-
```

# Előzetes — programfejlesztési beépített eljárások

- `consult(File)` vagy `[File]`: A `File` állományban levő programot beolvassa és értelmezendő alakban eltárolja. (`File = user` ⇒ terminálról olvas.)
- `listing` vagy `listing(Predikátum)`: Az értelmezendő alakban eltárolt összes ill. adott nevű predikátumokat kilistázza.
- `compile(File)`: A `File` állományban levő programot beolvassa, lefordítja.
- A beolvasott program elemei Prolog kifejezések (`':-'`, `','` operátorok!)
- `halt`: A Prolog rendszer befejezi működését.

```
> sicstus
SICStus 3.8.5 (x86-linux-glibc2.1): Fri Oct 27 10:16:41 CEST 2000
| ?- consult(fakt).
{consulted /home/user/fakt.pl in module user, 10 msec 384 bytes}
| ?- listing(fakt).
fakt(0, 1).
fakt(A, B) :-
        A>0, C is A-1, fakt(C, D), B is D*A.
| ?- halt.
>
```

# Előzetes — kiíró és egyéb eljárások

- `write(X)`: Az `X` Prolog kifejezést kiírja (ha kell, operátorokkal).
- `display(X)`: Az `X` Prolog kifejezést struktúra-alakban kiírja.
- `nl`: Kiír egy újsort.
- `true`, `fail`: Mindig sikerül ill. mindig meghiúsul.
- `trace`, `notrace`: A (teljes) nyomkövetést be- ill. kikapcsolja.
- `spy Predikátum`: Töréspontot helyez a `Predikátum`-ra.

```
| ?- write(+(1,*(2,3))), write('          '), display(1+2*3), nl.
1+2*3          +(1,*(2,3))
yes
| ?- szuloje('István', X), write(X), nl, fail.
Géza
Sarolt
no
```

# Prolog végrehajtási példa — rekurzió verem nélkül

```
/* (1) */ fakt(0, 1).
/* (2) */ fakt(N, F) :-
                 N>0, NN is N-1, fakt(NN, FF), F is FF*N.
```

- **Kezdeti célsorozat:** `fakt(2,X), write(X)`
- **Redukció** (2)**-vel:** `2>0, NN is 2-1, fakt(NN, FF), X is FF*2, write(X)`
- **Beépítettek végrehajtása:** `fakt(1, FF), X is FF*2, write(X)`
- **Redukció** (2)**, beép.:** `fakt(0, FF1), FF is FF1*1, X is FF*2, write(X) (*)`
- **Redukció** (1)**-gyel (választási pont!):** `FF is 1*1, X is FF*2, write(X)`
- **Beép.:** `write(2)`**, mellékhatás:** $\Rightarrow$2 **kiírása, sikeres vég**
- **További megoldás kérése esetén visszalépés (*)-hoz, redukció** (2)**-vel:**
  `0>0, NN2 is 0-1, fakt(NN2, FF2), ...`**, beép. végrehajt., meghiúsulás.**

# Prolog végrehajtási példa — nyomkövetés

```
| ?- trace, fakt(2, X), write(X), nl, fail.
        1      1 Call: fakt(2,X) ?
        2      2 Call: 2>0 ?
        2      2 Exit: 2>0 ?
        3      2 Call: NN is 2-1 ?
        3      2 Exit: 1 is 2-1 ?
        4      2 Call: fakt(1,FF) ?
        5      3 Call: 1>0 ?
        5      3 Exit: 1>0 ?
        6      3 Call: NN1 is 1-1 ?
        6      3 Exit: 0 is 1-1 ?
        7      3 Call: fakt(0,FF1) ?
?       7      3 Exit: fakt(0,1) ?
        8      3 Call: FF is 1*1 ?
        8      3 Exit: 1 is 1*1 ?
?       4      2 Exit: fakt(1,1) ?
        9      2 Call: X is 1*2 ?
        9      2 Exit: 2 is 1*2 ?
?       1      1 Exit: fakt(2,2) ?
2
```

```
        1      1 Redo: fakt(2,2) ?
        4      2 Redo: fakt(1,1) ?
        7      3 Redo: fakt(0,1) ?
       10      4 Call: 0>0 ?
       10      4 Fail: 0>0 ?
        7      3 Fail: fakt(0,FF1) ?
        4      2 Fail: fakt(1,FF) ?
        1      1 Fail: fakt(2,X) ?

no
{trace}
| ?-
```

# Prolog végrehajtás — egy aritmetikai példa

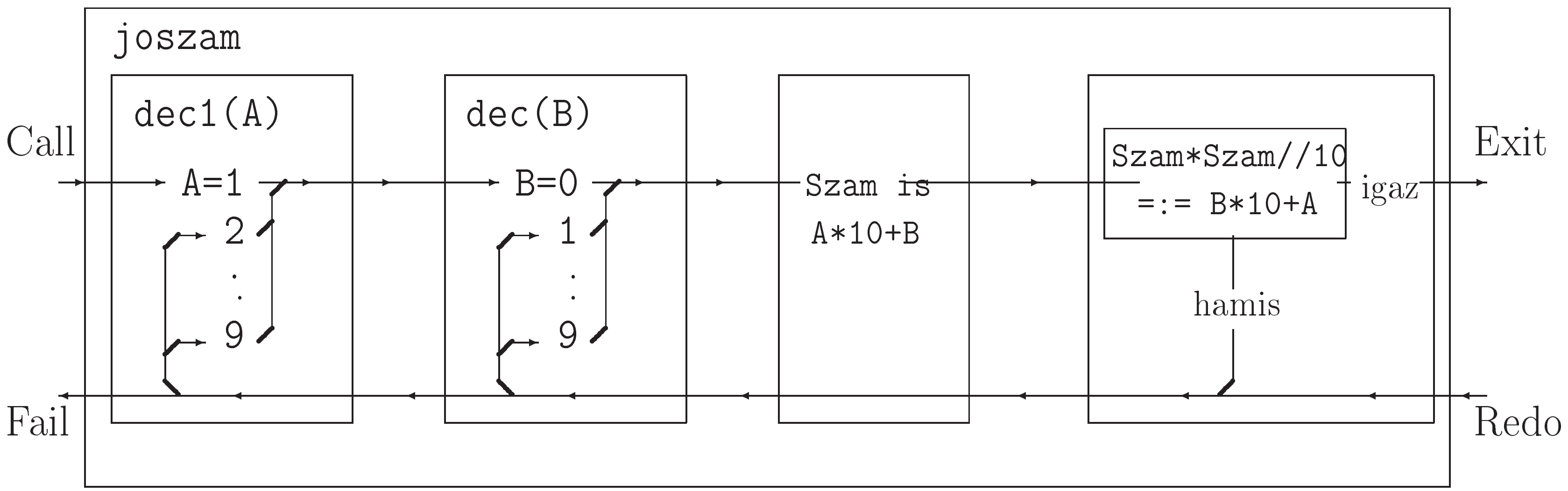
## Példa: „jó” számok

**Keressük azokat a kétjegyű számokat amelyek négyzete háromjegyű és a szám fordítottjával kezdődik:**

```
% dec1(J): J egy pozitív decimális számjegy.
dec1(1). dec1(2). dec1(3). dec1(4).
dec1(5). dec1(6). dec1(7), dec1(8). dec1(9).

% dec(J): J egy decimális számjegy.
dec(0).
dec(J) :- dec1(J).

% Szam négyzete háromjegyű és a Szam fordítottjával kezdődik.
joszam(Szam):-
        dec1(A), dec(B),
        Szam is A * 10 + B, Szam * Szam // 10 =:= B * 10 + A.
```

# Prolog végrehajtás — a 4-kapus doboz modell

```
joszam(Szam):-
        dec1(A), dec(B),
        Szam is A * 10 + B, Szam * Szam // 10 =:= B * 10 + A.
```



# Prolog végrehajtás — számintervallum felsorolása

```
% between(M, N, I): M =< I =< N, I egész.
between(M, N, M) :-
        M =< N.
between(M, N, I) :-
        M < N,
        M1 is M+1,
        between(M1, N, I).

dec(X) :- between(0, 9, X).

| ?- between(1, 2, _X), between(3, 4, _Y), Z is 10*_X+_Y.
Z = 13 ? ;
Z = 14 ? ;
Z = 23 ? ;
Z = 24 ? ;
no
```

# Prolog végrehajtás — diszjunkció mint szemantikus édesítőszer

## Példa:

```
% Sz-nek gyermeke Gy.
gyermeke(Sz, Gy) :- fia(Sz, Gy).
gyermeke(Sz, Gy) :- lanya(Sz, Gy).
```

## Azonos fejű szabályok összevonhatók egy diszjunkció bevezetésével:

```
gyermeke(Sz, Gy) :-
         (   fia(Sz, Gy)
 /*vagy:*/;   lanya(Sz, Gy)
         ).
```

## A fejek azonossá is tehetők segédvált. és az X=Y beép. eljárás használatával:

```
fakt(N, F) :-
       (   N = 0, F = 1
       ;   N > 0, N1 is N-1, fakt(N1, F1), F is N*F1
       ).
```

## Az X = Y beépített eljárás definiciója:

```
% X = Y: X és Y egyesíthető
X = X.
```

# Prolog végrehajtás — diszjunkció kiváltása

```
% Utodnak valódi őse Os.
valodi_ose(Utod, Os) :-
        szuloje(Utod, Szulo),
        (   Os = Szulo
        ;   valodi_ose(Szulo, Os)
        ).
```

- **Meghatározzuk a diszjunkcióban szereplő változókat:** `Os, Szulo`.
- **Meghatározzuk a diszjunkción kívül szereplő változókat:** `Utod, Os, Szulo`.
- **A segédeljárás argumentumai a közös változók:** `seged(Szulo, Os)`.
- **Minden alternatívájából egy külön klóz lesz a segédeljárásban.**
- **A diszjunkciót a segédeljárás hívásával helyettesítjük.**

```
valodi_ose(Utod, Os) :-
        szuloje(Utod, Szulo), seged(Szulo, Os).

seged(Szulo, Os) :- Os = Szulo.            % egyszerűsítető: seged(Szulo, Szulo).
seged(Szulo, Os) :- valodi_ose(Szulo, Os).
```

# A PROLOG ADATFOGALMA

# Összetett adatstruktúrák — példa

- egy ember egy két mezőből álló rekord: vezetéknév, keresztnév
- egy kétargumentumú összetett kifejezéssel ábrázoljuk
- a struktúranév legyen pl. a minusz jel (-): `-(VNév, KNév)` ≡ `VNév-KNév`

```
% szuloje(Gy, Sz): Gy szülője Sz.
szuloje(szabo-laszlo, szabo-gyorgy).
szuloje(szabo-laszlo, laszlo-amalia).
szuloje(szabo-amalia, szabo-gyorgy).
szuloje(szabo-amalia, laszlo-amalia).
```

```
% keresztneve(E, KN): E keresztneve KN.
keresztneve(_Nev-Kereszt, Kereszt).

% vezetekneve(E, VN): E vezetékneve VN.
vezetekneve(Nev-_, Nev).
```

```
| ?- szuloje(E1, E2), keresztneve(E1, K), vezetekneve(E2, K).
        K = laszlo, E1 = szabo-laszlo, E2 = laszlo-amalia ? ;
        no
| ?- szuloje(V1-K1, K1-K2).
        K1 = laszlo, K2 = amalia, V1 = szabo ?
        yes
| ?- szuloje(E1, E2), E1 = _-Nev, E2 = Nev-_.
        E1 = szabo-laszlo, E2 = laszlo-amalia, Nev = laszlo ?
```

# Variációk egy témára — a logikai változó fogalma

```
% E keresztneve megegyezik egyik szülőjének vezetéknevével
erdekes(E) :-
        szuloje(E, Sz),
        keresztneve(E, KN),
        vezetekneve(Sz, KN).

erdekes2(V-K) :-
        szuloje(V-K, K-_).

erdekes3(E) :-
        keresztneve(E, KN),
        vezetekneve(Sz, KN),
        szuloje(E, Sz).

erdekes4(E) :-
        E = _-K,
        szuloje(E, K-_).

| ?- spy szuloje, erdekes3(E).
 +      1      1 Call: szuloje(_965-_951,_951-_978) ?
```

# Többszörösen összetett adatok — többtagú nevek

- többtagú kereszt- és vezetéknevek kezelése, pl. `Kovacs Eva Maria`
- a tagokat egy másik struktúranévvel kapcsoljuk össze, pl. `szabo-eva/maria`
- ugyanazt a - struktúranevet használjuk: `kis-szabo-laszlo`, `szabo-(eva-maria)`

```
% reszneve(Osszetett, Resz): Osszetett név része a Resz név.
reszneve(Nev, Nev).
reszneve(Elso-_, Nev) :-
        reszneve(Elso, Nev).
reszneve(_-Masodik, Nev) :-
        reszneve(Masodik, Nev).
```

```
| ?- reszneve(kis-kovacs-bela, Resz).
        Resz = kis-kovacs-bela ? ;
        Resz = kis-kovacs ? ;
        Resz = kis ? ;
        Resz = kovacs ? ;
        Resz = bela ? ;
        no
```

```
| ?- reszneve(szabo-(eva-maria), Resz).
        Resz = szabo-(eva-maria) ? ;
        Resz = szabo ? ;
        Resz = eva-maria ? ;
        Resz = eva ? ;
        Resz = maria ? ;
        no
```

# Típusok Prologban

## A Prolog nem típusos nyelv, de érdemes meghatározni a kezelt adatok típusát, például az alábbi formális típus-leírással.

```
% :- type név1 == {vnév - knév}.    % egy név1 típusú kifejezés az egy - struktúra
                                    % vnév és knév típusú argumentumokkal.
                                    % név1 = { v-k | v ∈  vnév, k ∈ knév }
% :- type vnév == atom.             % egy vnév típusú kifejezés az egy atom
% :- type knév == atom.             % egy knév is egy atom
% :- pred szuloje(név1, név1).  % szuloje mindkét argumentuma név1 típusú.
szuloje(szabo-laszlo, szabo-gyorgy). %...
```

## Rekurzívan definiált típusok

```
% :- type név2 == atom \/           % név2 az atom vagy egy
%                   {név2 - név2}.  % két név2-ből álló - /2 struktúra
% :- pred reszneve(név2, név2).     % reszneve argumentumai név2 típusúak.
% reszneve(Osszetett, Resz): Osszetett név része a Resz név.
reszneve(Nev, Nev).
reszneve(Elso-_, Nev) :-    reszneve(Elso, Nev).
reszneve(_-Masodik, Nev) :- reszneve(Masodik, Nev).
```

# A Prolog adatfogalma — az egyesítési algoritmus

## A Prolog adatfogalma: a Prolog kifejezés

- konstans (szám- ill. névkonstans)
- struktúra-kifejezés
- változó („teljes jogú”, struktúra-kifejezések mélyén is lehet)

## Adatstruktúrák szétszedése, összerakása: egyesítési algoritmus

- bemenete: két Prolog kifejezés (belső, fastruktúra formában!);
- célja: azon *legáltalánosabb* változó-behelyettesítések meghatározása, amelyekkel a két kifejezés azonos alakra hozható;
- eredménye:
  - siker, változó-behelyettesítések; vagy
  - meghiúsulás (a kifejezések nem hozhatók azonos alakra).

# Egyesítés: a behelyettesítés fogalma

## A behelyettesítés

- Egy függvény, amely változókhoz kifejezéseket rendel.
- Pl. $\sigma = \{$`X`$\leftarrow$`a`, `Y`$\leftarrow$`s(b,B)`, `Z`$\leftarrow$`C`$\}$ `X`-hez `a`-t, `Y`-hoz `s(b,B)`-t stb. rendel.
- $K\sigma$: $\sigma$ alkalmazása $K$ kif.-re, pl. `f(g(Z,h),A,Y)`$\sigma$ = `f(g(C,h),A,s(b,B))`
- Két behelyettesítés kompozíciója (függvénykompozíció):

$$\sigma \otimes \theta = \{\ x \leftarrow x\sigma\theta \mid x \in D(\sigma)\} \cup \{\ x \leftarrow x\theta \mid x \in D(\theta) \setminus D(\sigma)\ \}$$

- $\sigma$ általánosabb mint $\theta$, ha létezik olyan $\rho$, hogy $\theta = \sigma \otimes \rho$

## Legáltalánosabb egyesítő (*mgu* — most general unifier)

- $A$ és $B$ kifejezések egyesíthetőek ha létezik egy olyan $\sigma$ behelyettesítés, hogy $A\sigma = B\sigma$. Ezt a $\sigma$ behelyettesítést $A$ és $B$ egyesítőjének nevezzük.
- $A$ és $B$ legáltalánosabb egyesítője $\sigma$ ($mgu(A, B) = \sigma$), ha $\sigma$ $A$ és $B$ minden egyesítőjénél általánosabb (Tétel: átnevezéstől eltekintve egyértelmű.)

# Az egyesítési algoritmus

## Az egyesíthetőség eldöntése, $\sigma = mgu(A, B)$ előállítása

1. **Ha $A$ és $B$ azonos változók vagy konstansok, akkor $\sigma = \emptyset$.**
2. **Egyébként, ha $A$ változó, akkor $\sigma = \{A \leftarrow B\}$.**
3. **Egyébként, ha $B$ változó, akkor $\sigma = \{B \leftarrow A\}$.**
4. **Egyébként, ha $A$ és $B$ azonos nevű és argumentumszámú összetett kifejezések és argumentum-listáik $A_1$,...,$A_N$ ill. $B_1$,...,$B_N$, és**
   - **a. $A_1$ és $B_1$ legáltalánosabb egyesítője $\sigma_1$,**
   - **b. $A_2\sigma_1$ és $B_2\sigma_1$ legáltalánosabb egyesítője $\sigma_2$,**
   - **c. $A_3\sigma_1\sigma_2$ és $B_3\sigma_1\sigma_2$ legáltalánosabb egyesítője $\sigma_3$,**
   - **d. ...**

   **akkor $\sigma = \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3 \otimes \ldots$.**
5. **Minden más esetben a $A$ és $B$ nem egyesíthető.**

# Egyesítési példák

$A$ = `ose(0, E, E)`, $B$ = `ose(N, 'Géza', Os)`

- **(4.)** $A$ **és** $B$ **neve és argumentumszáma megegyezik**
  - **(a.)** `mgu(0, N)` **(3. szerint)** $=$ {`N`←`0`} $= \sigma_1$
  - **(b.)** `mgu(E`$\sigma_1$`, 'Géza')` $=$ `mgu(E, 'Géza')` **(2. szerint)** $=$ {`E`←`'Géza'`} $= \sigma_2$
  - **(c.)** `mgu(E`$\sigma_1\sigma_2$`, Os) = mgu('Géza', Os)` **(3. szerint)** $=$ {`Os`←`'Géza'`} $= \sigma_3$
- **tehát** $mgu(A, B) = \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3 =$ {`N`←`0`, `E`←`'Géza'`, `Os`←`'Géza'`}

$A$ = `keresztneve(V-K, K)`, $B$ = `keresztneve(E, jozsi)`

- **(4.)** $A$ **és** $B$ **neve és argumentumszáma megegyezik**
  - **(a.)** `mgu(V-K, E)` **(3. szerint)** $=$ {`E`←`V-K`} $= \sigma_1$
  - **(b.)** `mgu(K`$\sigma_1$`, jozsi)` $=$ `mgu(K, jozsi)` **(2. szerint)** $=$ {`K`←`jozsi`} $= \sigma_2$
- **tehát** $mgu(A, B) = \sigma_1 \otimes \sigma_2 =$ {`E`←`V-jozsi`, `K`←`jozsi`}

## Egyesítési példák a gyakorlatban

```
| ?- kis-kovacs-bela = X-Y.
        X = kis-kovacs, Y = bela ? ;
        no
| ?- kis-kovacs-bela = kis-X.
        no
| ?- f(X, 3/Y-X, Y) = f(U, B-a, 3).
        B = 3/3, U = a, X = a, Y = 3 ?

| ?- f(f(X), U+2*2) = f(U, f(3)+Z).
        U = f(3), X = 3, Z = 2*2 ?

| ?- ose(0, V-jozsi, szabo-K). % = ose(0, E, E).
        K = jozsi, V = szabo ?

| ?- keresztneve(szabo-(eva-maria), N-maria). % = keresztneve(_-K, K).
        N = eva ?
```

# Az egyesítés kiegészítése: előfordulás-ellenőrzés (*occurs check*)

Kérdés: `X` és `s(X)` egyesíthető-e?

- A matematikai válasz: *nem*, egy változó nem egyesíthető egy olyan struktúrával, amelyben előfordul (ez az előfordulás-ellenőrzés).
- Az ellenőrzés költséges, ezért alaphelyzetben nem alkalmazzák.
- Szabványos eljárásként rendelkezésre áll: `unify_with_occurs_check/2`
- Kiterjesztés (pl. SICStus): az előfordulás-ellenőrzés elhagyása miatt keletkező ciklikus kifejezések tisztességes kezelése.

```
| ?- X = s(1,X).
        X = s(1,s(1,s(1,s(1,s(...))))) ?
| ?- unify_with_occurs_check(X, s(1,X)).
        no
| ?- X = s(X), Y = s(s(Y)), X = Y.
        X = s(s(s(s(s(...))))), Y = s(s(s(s(s(...))))) ?
```

# Változót tartalmazó kifejezések — végtelen választás veszélye

```
| ?- keresztneve(E, K).
        E = _A-K ? ; no
| ?- keresztneve(E, K), szuloje(E, K-K2).
        E = szabo-laszlo, K = laszlo, K2 = amalia ? ; no
| ?- szuloje(E, K-K2), keresztneve(E, K).
        E = szabo-laszlo, K = laszlo, K2 = amalia ? ; no

| ?- szuloje(V-K, E), reszneve(E, K).
        V = szabo, K = laszlo, E = laszlo-amalia ? ;
        V = szabo, K = amalia, E = laszlo-amalia ? ; no
| ?- reszneve(E, K), szuloje(V-K, E).
        V = szabo, K = laszlo, E = laszlo-amalia ? ;
^C
Prolog interruption (h for help)? a
{Execution aborted}
| ?- reszneve(E, K).
        K = E ? ;
        E = K-_A ? ;
        E = K-_A-_B ?
```

# PÉLDA — ÚTVONALKERESÉS

# Az útvonalkeresési feladat

**A feladat: tekintsük (autóbusz)járatok egy halmazát. Mindegyik járathoz a két végpont és az útvonal hossza van megadva. Írjunk Prolog eljárást, amellyel megállapítható, hogy két pont összeköthető-e pontosan N csatlakozó járattal!**

```
% járat(A, B, H): Az A és B városok között van járat, és hossza H km.
járat('Budapest', 'Prága', 515).
járat('Budapest', 'Bécs', 245).
járat('Bécs', 'Berlin', 635).
járat('Bécs', 'Párizs', 1265).

% útszakasz(A, B, H): A-ból B-be eljuthatunk egy H úthosszú járattal.
útszakasz(Kezdet, Cél, H) :-
     (   járat(Kezdet, Cél, H)
     ;   járat(Cél, Kezdet, H)
     ).
```

# Az útvonalkeresési feladat — folytatás

```
% útvonal(N, A, B, H): A és B között van (pontosan)
% N szakaszból álló útvonal, amelynek összhossza H.
útvonal(0, Kezdet, Kezdet, 0).
útvonal(N, Kezdet, Cél, H) :-
    N > 0,
    N1 is N-1,
    útszakasz(Kezdet, Közben, H1),
    útvonal(N1, Közben, Cél, H2),
    H is H1+H2.

| ?- útvonal(2, 'Párizs', Hová, H).
        H = 1900, Hová = 'Berlin' ? ;
        H = 2530, Hová = 'Párizs' ? ;
        H = 1510, Hová = 'Budapest' ? ;
no
| ?-
```

# Körmentes út keresése

**A körök kizárására gyűjtenünk kell a már érintett városokat. A gyűjtő adastruktúra legyen pl.** `Honnan-Közben1-Közben2- ....`

```
% útvonal_2(N, A, B, H): A és B között van (pontosan)
% N szakaszból álló körmentes útvonal, amelynek összhossza H.
útvonal_2(N, Honnan, Hová, H) :-
        útvonal_2(N, Honnan, Hová, Honnan, H).

% útvonal_2(N, A, B,  K, H): A és B között van pontosan
% N szakaszból álló  körmentes, K elemein át nem menő H hosszú út.
útvonal_2(0, Hová, Hová, _, 0).
útvonal_2(N, Honnan, Hová, Kizártak, H) :-
        N > 0, N1 is N-1,
        útszakasz(Honnan, Közben, H1),
        \+ reszneve(Kizártak, Közben),
        útvonal_2(N1, Közben, Hová, Kizártak-Közben, H2),
        H is H1+H2.
```

# A meghiúsulásos negáció (NF — Negation by Failure)

## A `\+ Hívás` beépített meta-eljárás (vö. $\nvdash$ — nem bizonyítható)

- végrehajtja a `Hívás` hívást,
- ha `Hívás` sikeresen fut le, akkor meghiúsul,
- egyébként (behelyettesítés nélkül) sikerül.
- $\backslash + H$ jelentése: $\neg\exists X(H)$, ahol $X$ a $H$-ban a ***hívás pillanatában*** behelyettesítetlen változókat jelöli.
- A „zárt világ feltételezése” (CWA) — ami nem bizonyítható, az nem igaz.

```
| ?- \+ szuloje(szabo-laszlo, X).        ----> no
| ?- \+ szuloje(szabo-gyorgy, X).        ----> true ?
| ?- /* T1 testvére T2:*/ szuloje(T1, _A), szuloje(T2, _A), \+ T1 = T2.
        T1 = szabo-laszlo, T2 = szabo-amalia ?
| ?- \+ X = 1, X = 2.                    ----> no
| ?- X = 2, \+ X = 1.                    ----> X = 2 ?
```

# A példa nyomkövetése

```
| ?- spy reszneve, útvonal_2(2, 'Párizs', Hová, H).
{The debugger will first zip -- showing spypoints (zip)}
{Plain spypoint for user:reszneve/2 added, BID=1}
 +      1      1 Call: reszneve('Párizs','Bécs') ? l
 +      1      1 Fail: reszneve('Párizs','Bécs') ? l
 +      7      2 Call: reszneve('Párizs'-'Bécs','Berlin') ? l
 +      8      3 Call: reszneve('Párizs','Berlin') ? l
 +      8      3 Fail: reszneve('Párizs','Berlin') ? l
 +      9      3 Call: reszneve('Bécs','Berlin') ? l
 +      9      3 Fail: reszneve('Bécs','Berlin') ? l
 +      7      2 Fail: reszneve('Párizs'-'Bécs','Berlin') ? l
    H = 1900, Hová = 'Berlin' ? ;
 +     13      2 Call: reszneve('Párizs'-'Bécs','Párizs') ? l
 +     14      3 Call: reszneve('Párizs','Párizs') ? l
 +     14      3 Exit: reszneve('Párizs','Párizs') ? l
?+     13      2 Exit: reszneve('Párizs'-'Bécs','Párizs') ? l
 +     16      2 Call: reszneve('Párizs'-'Bécs','Budapest') ? n
    H = 1510, Hová = 'Budapest' ?
```

# Körmentes út keresése — probléma a gyűjtő adatstruktúrával

```
% reszneve(Osszetett, Resz): Osszetett név része a Resz név.
reszneve(Nev, Nev).
reszneve(Elso-_, Nev) :-      reszneve(Elso, Nev).
reszneve(_-Masodik, Nev) :-   reszneve(Masodik, Nev).

járat(kál, kál-kápolna, 20).
járat(hatvan, kál, 30).

| ?- útvonal_2(2, hatvan, kál-kápolna, H).
        H = 50 ? ; no
| ?- útvonal_2(2, kál-kápolna, hatvan, H).
        no
| ?- spy reszneve, útvonal_2(2, kál-kápolna, hatvan, H).
 +      1      1 Call: reszneve(kál-kápolna,kál) ?
 +      2      2 Call: reszneve(kál,kál) ?
 +      2      2 Exit: reszneve(kál,kál) ?
?+      1      1 Exit: reszneve(kál-kápolna,kál) ?
no
| ?-
```

# Probléma a gyűjtővel — általános gyűjtő-fogalom

```
% bfa_resze(Bfa, Resz): Bfa része  Resz.
bfa_resze(Bfa, Bfa).
bfa_resze(Balfa-_, Resz) :-      bfa_resze(Balfa, Resz).
bfa_resze(_-Jobbfa, Resz) :-     bfa_resze(Jobbfa, Resz).
```

## Milyen típusú adatokat kezel a fenti `bfa_resze`?

- **$T$ típusú elemekből épített bináris fa (`bfa(`$T$`)`) az**
- **vagy két ugyanilyen bináris fa `-` struktúranévvel összekapcsolva (`bfa(`$T$`)-bfa(`$T$`)`);**
- **vagy pedig egy $T$ típusú elem;**
- **formálisabban:** `% :- type bfa(T) == {bfa(T)-bfa(T)} \/ T.`
- **ez egy *nem megkülönböztetett* únió, mi van ha T funktora `-` `/2`?**

# Probléma a gyűjtő adatstruktúrával — megkülönböztetett úniók

## Bináris fa megkülönböztetett únióval

```
% :- type bfa(T) == {bfa(T) - bfa(T)} \/ {level(T)}.
% egy szintaktikus egyszerűsítést bevezetve:
% :- type bfa(T) ---> bfa(T) - bfa(T) ; level(T).
% Egy T-kből álló bfa az vagy két ilyenből álló - /2, struktúra
% vagy egy level/1 struktúrába csomagolt T típusú adat.
```

## „Unáris” vagyis lineáris fa (nekünk ez is elég)

```
% :- type gyujtemeny(T) ---> gyujtemeny(T)-T ; semmi.
eleme(_Gy-E, E).
eleme(Gy-_, E) :- eleme(Gy, E).

| ?- eleme(semmi-1-2, E).
        E = 2 ? ; E = 1 ? ; no
| ?- eleme(semmi-(kal-kapolna)-hatvan, kal).
        no
| ?- eleme(semmi-(kal-kapolna)-hatvan, X).
        X = hatvan ? ;
        X = kal-kapolna ? ; no
```

# Körmentes út keresése — javított megoldás

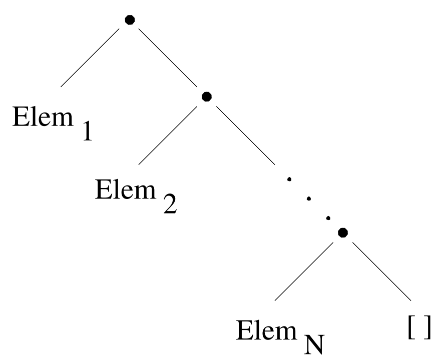
```
% útvonal_3(N, A, B, H): A és B között van (pontosan)
% N szakaszból álló körmentes útvonal, amelynek összhossza H.
útvonal_3(N, Honnan, Hová, H) :-
        útvonal_3(N, Honnan, Hová, semmi-Honnan, H).

% útvonal_3(N, A, B, K, H): A és B között van pontosan
% N szakaszból álló körmentes, K elemein át nem menő H hosszú út.
útvonal_3(0, Hová, Hová, _, 0).
útvonal_3(N, Honnan, Hová, Kizártak, H) :-
        N > 0, N1 is N-1,
        útszakasz(Honnan, Közben, H1),
        \+ eleme(Kizártak, Közben),
        útvonal_3(N1, Közben, Hová, Kizártak-Közben, H2), H is H1+H2.

| ?- útvonal_3(2, kál-kápolna, hatvan, H).
        H = 50 ? ; no
```

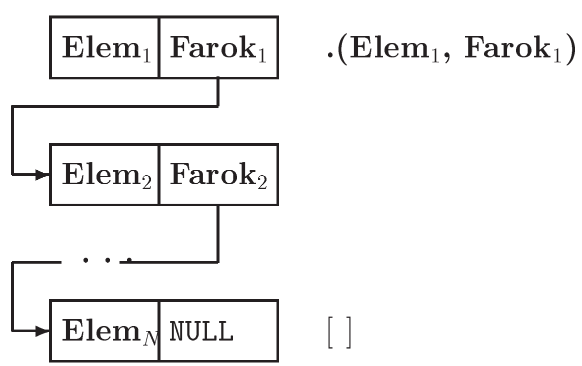
# LISTÁK PROLOGBAN

# A Prolog lista-fogalma

- **közönséges adattípus:** `% :- type list(T) ---> .(T,list(T)) ; [].`
- `T` **típusú elemekből álló lista az vagy egy** `'.'/2` **struktúra, vagy a** `[]` **atom. A struktúra első argumentuma** `T` **típusú, a lista feje (első eleme). A második argumentum** `list(T)` **típusú, a lista farka (a többi elemből álló lista);**
- **egyszerűsített írásmód („szintaktikus édesítés”);**
- **hatékonyabb megvalósítás.**

## A listák fastruktúra alakja és megvalósítása



# Listák jelölése — szintaktikus édesítőszerek

- `[Fej|Farok]` ≡ `.(Fej, Farok)`
- [Elem$_1$,Elem$_2$,...,Elem$_N$|Farok] ≡ [Elem$_1$|[Elem$_2$|[... [Elem$_N$|Farok] ...]]]
- [Elem$_1$,Elem$_2$,...,Elem$_N$] ≡ [Elem$_1$,Elem$_2$,...,Elem$_N$|[]]

```
| ?- [1,2] = [X|Y].                   ⇒ X = 1, Y = [2] ?
| ?- [1,2] = [X,Y].                   ⇒ X = 1, Y = 2 ?
| ?- [1,2,3] = [X|Y].                 ⇒ X = 1, Y = [2,3] ?
| ?- [1,2,3] = [X,Y].                 ⇒ no
| ?- [1,2,3,4] = [X,Y|Z].             ⇒ X = 1, Y = 2, Z = [3,4] ?
| ?- L = [1|_], L = [_,2|_].          ⇒ L = [1,2|_A] ? % nyílt végű
| ?- L = .(1,[2,3|[]]).               ⇒ L = [1,2,3] ?
| ?- L = [1,2|.(3,[])].               ⇒ L = [1,2,3] ?
| ?- [X|[3-Y/X|Y]]= .(A, [A-B,6]).   ⇒ A=3, B=[6]/3, X=3, Y=[6] ?
```

# Listaelemek keresése: member(E, L): E az L lista eleme

```
member(Elem, [Elem|_]).
member(Elem, [_|Farok]) :-
        member(Elem, Farok).
```

```
member(Elem, [Fej|Farok]) :-
        (   Elem = Fej
        ;   member(Elem, Farok)
        ).
```

## Eldöntendő kérdés

```
| ?- member(2, [1,2,3]).      ⇒ yes
```

## Megválaszolandó kérdések

```
| ?- member(X, [1,2,3]).      ⇒ X = 1 ?  ; X = 2 ?  ; X = 3 ?  ; no
| ?- member(X, [1,2,1]).      ⇒ X = 1 ?  ; X = 2 ?  ; X = 1 ?  ; no
```

## Vegyes használat, listák metszete

```
| ?- member(X, [1,2,3]),
     member(X, [5,4,3,2,3]).  ⇒ X = 2 ?  ; X = 3 ?  ; X = 3 ?  ; no
```

## Lista elemévé tesz, végtelen választás!

```
| ?- member(1, L).            ⇒ L = [1|_A] ? ; L = [_A,1|_B] ? ;
                                L = [_A,_B,1|_C] ? ; ...
```

# member/2 általánosítása: select/3

```
% select(Elem, Lista, Marad):  Elemet a Lista-ból elhagyva marad Marad.
select0(Elem, [Elem|Marad], Marad).   % Elhagyjuk a fejet, marad a farok.
select0(Elem, [X|Farok], Marad) :-
        select0(Elem, Farok, Marad0), % A farokból hagyunk el elemet,
        Marad = [X|Marad0].          % a maradék elé tesszük a fejet.

% A második klóz tömörebben (logikai stílusban) --- jobbrekurzív!
select(Elem, [Elem|Marad], Marad).
select(Elem, [X|Farok], [X|Marad0]) :-
        select(Elem, Farok, Marad0).

| ?- select(X, [1,2,3], L).
        L=[2,3], X=1 ? ;  L=[1,3], X=2 ? ;   L=[1,2], X=3 ? ; no
| ?- select(3, L, [1,2]).
        L = [3,1,2] ? ; L = [1,3,2] ? ; L = [1,2,3] ? ; no
| ?- select(3, [2|L], [1,2,7,3,2,1,8,9,4]).
        no   % a logikai stílusban 1 lépés, a funkcionálisban 10!
```

# Tömör és minta-kifejezések, lista-minták, nyílt végű listák

- Tömör (ground) kifejezés: változót nem tartalmazó kifejezés
- Minta: egy általában nem nem tömör kifejezés, mindazon kifejezéseket „képviseli”, amelyek belőle változó-behelyettesítéssel előállnak.
- Lista-minta: listát (is) képviselő minta.
- Nyílt végű lista: olyan lista-minta, amely bármilyen hosszú listát is képvisel.
- Zárt végű lista: olyan lista(-minta), amely egyféle hosszú listát képvisel.

| Zárt v. | Milyen listákat képvisel |
|---|---|
| `[X]` | egyelemű |
| `[X,Y]` | kételemű |
| `[X,X]` | két egyforma elemből álló |
| `[X,1,Y]` | 3 elemből áll, 2. eleme `1` |

| Nyílt v. | Milyen listákat képvisel |
|---|---|
| `X` | tetszőleges |
| `[X\|Y]` | nem üres (legalább 1 elemű) |
| `[X,Y\|Z]` | legalább 2 elemű |
| `[a,b\|Z]` | legalább 2 elemű, elemei: `a`, `b`, ... |

„Biztonságos” a futás, azaz véges a keresési tér, ha:

- `member/2` második argumentuma zárt végű.
- `select/3` 2. és 3. argumentuma közül az egyik zárt végű.

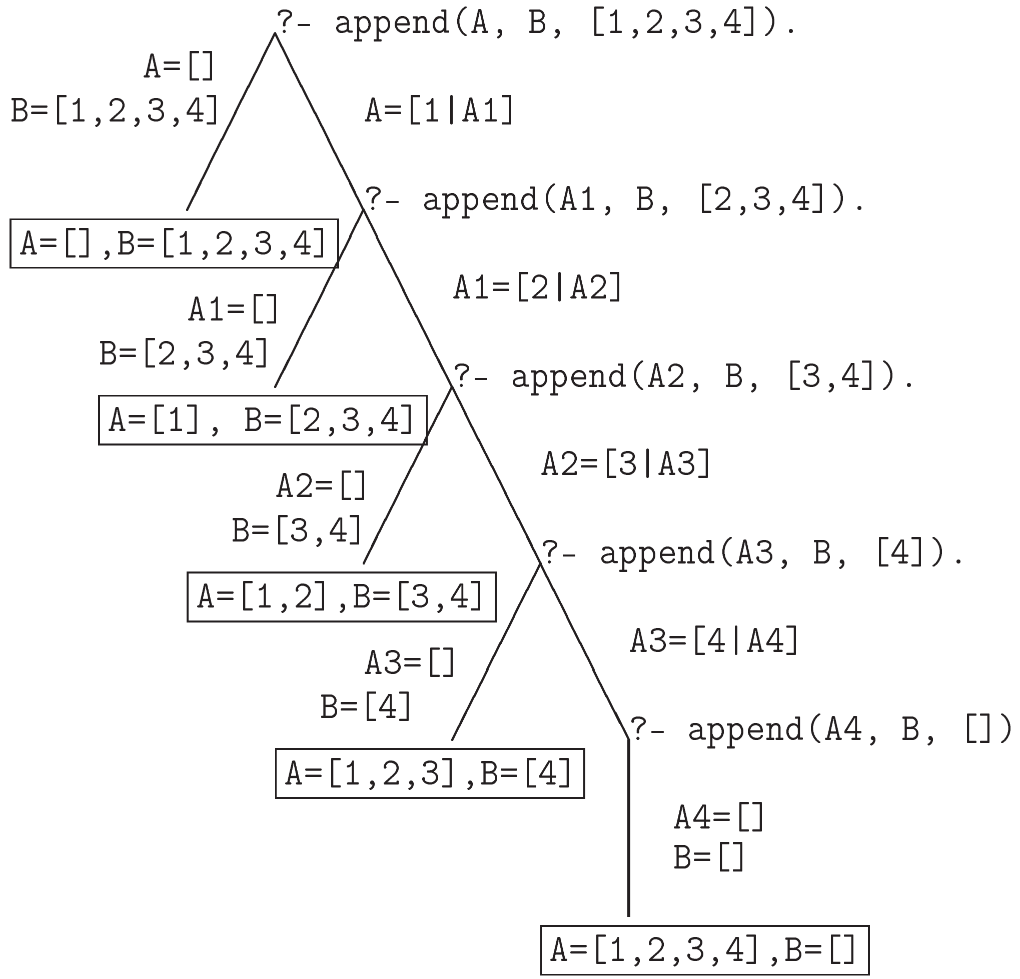
# Listák összefűzése: az append/3 eljárás

```
% append(L1, L2, L3): Az L3 lista az L1 és L2 listák elemeinek
% egymás után fűzésével áll elő (jelöljük: L3 = L1⊕L2).
append([], L, L).
append([X|L1], L2, [X|L3]) :-
        append(L1, L2, L3).
```

```
| ?- trace, append([1,2], [3,4], L).
        1      1 Call: append([1,2],[3,4],L) ?
        2      2 Call: append([2],[3,4],L3) ? g
Ancestors:
        1      1 Call: append([1,2],[3,4],[1|L3])
        2      2 Call: append([2],[3,4],L3) ?
        3      3 Call: append([],[3,4],L31) ? g
Ancestors:
        1      1 Call: append([1,2],[3,4],[1,2|L31])
        2      2 Call: append([2],[3,4],[2|L31])
        3      3 Call: append([],[3,4],L31) ?
        3      3 Exit: append([],[3,4],[3,4]) ?
```

**Az `append(L1, ...)` komplexitása: futási ideje arányos `L1` hosszával (ha `L1` zárt).**

# Listák szétbontása az append/3 segítségével




```
% append(L1, L2, L3):
% Az L3 lista az L1 és L2
% listák elemeinek egymás
% után fűzésével áll elő.
append([], L, L).
append([X|L1], L2, [X|L3]) :-
    append(L1, L2, L3).

| ?- append(A, B, [1,2,3,4]).
A = [], B = [1,2,3,4] ? ;
A = [1], B = [2,3,4] ? ;
A = [1,2], B = [3,4] ? ;
A = [1,2,3], B = [4] ? ;
A = [1,2,3,4], B = [] ? ;
no
```

# Variációk appendre 1. — Három lista összefűzése

```
% L1 ⊕ L2 ⊕ L3 = L123, ahol L1 és L2 adott.
append(L1, L2, L3, L123) :-
        append(L1, L2, L12), append(L12, L3, L123).
```

- **Nem hatékony, pl.:** `append([1,...,100],[1,2,3],[1], L)` **103 helyett 203 lépés!**
- **Szétszedésre nem alkalmas — végtelen választási pontot hoz létre**
  **(véges a keresési tér, ha az 1. és 3. argumentum legalább egyike zárt végű lista.)**

**Szétszedésre is alkalmas, hatékony változat**

```
% L1 ⊕ L2 ⊕ L3 = L123, ahol vagy L1 és L2 vagy L123 adottă(zárt végű).
append(L1, L2, L3, L123) :-
        append(L1, L23, L123), append(L2, L3, L23).
```

**Az első** `append/3` **hívás nyílt végű listát állít elő:**

```
| ?- append([1,2], L23, L).     ⇒      L = [1,2|L23] ?
```

# Egy érdekes feladvány

**Egy szakadékon egy hosszú és keskeny palló ível át, amely egyszerre legfeljebb két embert bír el. A palló egyik oldalán áll négy ember: 10, 20, 50 és 100 évesek. Az $N$ éves ember $N$ perc alatt tud átmenni a hídon. Ha ketten mennek át akkor a lassabb embernek megfelelő idő alatt érnek át.**

**Sötét van, világítás nélkül lehetetlen átérni, de a társaságnak csak egyetlen zseblámpája van. A feladat: megszervezni az átkelést úgy, hogy a teljes társaság a lehető legrövidebb idő alatt átkeljen a túloldalra.**

**Kérdés: mennyi idő alatt tudnak leggyorsabban átkelni?**

Prolog megoldás: a következő előadáson!

# Variációk appendre 2. — lista folytonos része

```
% L123 folytonos részlistája L2 (L123 =  _ ⊕ L2 ⊕ _).
% L123 adott, L2 ismeretlen.
csublist(L2, L123) :-
        append(_L1, L23, L123),
        append(L2, _L3, L23).

% Adott L123-nak folytonos része egy adott L2.
check_csublist(L2, L123) :-
        append(L2, _L3, L23),
        append(_L1, L23, L123).
```

## A két változat hatékonyságának összehasonlítása

- L123 = $[\underbrace{0,1,2,3,4}_{\text{x100000}}$,...,10], L2 = [0,1,2,3,4,10]
- `csublist(L2, L123):       570 msec`
- `check_csublist(L2, L123): 430 msec`

# Mintakeresés append/3-mal

## Párban előforduló elemek

```
% párban(Lista, Elem): A Lista számlistának Elem olyan
% eleme, amely egy ugyanilyen értékű elemmel szomszédos.
párban(L, E) :-
    append(_, [E,E|_], L).

| ?- párban([1,8,8,3,4,4], E).
        E = 8 ? ; E = 4 ? ; no
```

## Dadogó részek

```
% dadogó(L, D): D olyan nem üres részlistája L-nek,
% amelyet egy vele megegyező részlista követ.
dadogó(L, D) :-
        append(_, Farok, L),
        D = [_|_],
        append(D, Vég, Farok),
        append(D, _, Vég).

| ?- dadogó([2,2,1,2,2,1], D).
        D = [2] ? ; D = [2,2,1] ? ; D = [2] ? ; no
```

# Listák megfordítása

## Naív (négyzetes lépésszámú) megoldás

```
% nrev(L, R): Az R lista az L megfordítása.
nrev([], []).
nrev([X|L], R) :-
    nrev(L, RL),
    append(RL, [X], R).
```

## Lineáris lépésszámú megoldás

```
% reverse(R, L): Az R lista az L megfordítása.
reverse(R, L) :-  revapp(L, [], R).

% revapp(L1, L2, R): L1 megfordítását L2 elé fűzve kapjuk R-t.
revapp([], R, R).
revapp([X|L1], L2, R) :-
    revapp(L1, [X|L2], R).
```

## A `lists` könyvtár tartalmazza a `member/2`, `select/3`, `append/3` és `reverse/2` eljárások definícióját:

```
:- use_module(library(lists)).
```

## append és revapp — listák gyűjtési iránya

- **Prolog megvalósítás**

```
append([], L, L).                          revapp([], L, L).
append([X|L1], L2, [X|L3]) :-              revapp([X|L1], L2, L3) :-
    append(L1, L2, L3).                        revapp(L1, [X|L2], L3).
```

- **C++ megvalósítás**

```
list append(list list1, list list2)        list revapp(list list1, list list2)
{ list list3, *lp = &list3;                { list l = list2;
  for (list p=list1; p; p=p->next)           for (list p=list1; p; p=p->next)
  { list newl = new link(p->elem);           { list newl = new link(p->elem);
    *lp = newl; lp = &newl->next;              newl->next = l; l = newl;
  }                                          }
  *lp = list2;
  return list3;                              return l;
}                                          }
```

```
struct link   { link *next;
                char elem;
                link(char e): elem(e) {} };
typedef link *list;
```

# A `select/3` továbbfejlesztése

```
% cserél(X, XL, Y, YL): egy X elemet XL-ben Y-ra cserélve kapjuk YL-t.
% Deklaratívabban: X ugyanannyiadik eleme XL-nek, mint Y YL-nek, és a két
% lista csak ebben az elemben különbözik.
% A végességhez XL és YL közül legalább az egyik zárt végű kell legyen.
cserél(X, [X|Xlista], Y, [Y|Xlista]).
cserél(X, [Head|Xlista], Y, [Head|Ylista]) :-
        cserél(X, Xlista, Y, Ylista).

| ?- cserél(2, [1,2,3], 4, L).
        L = [1,4,3] ? ;
        no
| ?- cserél(X, [1,2,3], 4, L).
        L = [4,2,3], X = 1 ? ;
        L = [1,4,3], X = 2 ? ;
        L = [1,2,4], X = 3 ? ;
        no
| ?- cserél(X, [1,2,3], Y, L).
        L = [Y,2,3], X = 1 ? ;
        L = [1,Y,3], X = 2 ? ;
        L = [1,2,Y], X = 3 ? ;
        no
```

# 2000 tavaszi kis házi feladat

**Állítsa elő egy $Sz$ nem negatív egész szám $A$ alapú számrendszerben vett jegyeinek listáját ($A > 1$ egész)! Írjon egy `szám/3` Prolog eljárást, amely a legnagyobb helyiértékű jegyet helyezi a lista elejére, és egy másik `fszám/3` eljárást, amely a legkisebb helyiértékű jeggyel kezdi a listát.**

```
% szám(Szám, Alap, Jk): A Szám szám Alap alapú számrendszerben vett
% jegyeinek (balról jobbra haladó) listája Jk. (A 0 szám egy jegyből áll.)
szám(0, _, [0]).
szám(Sz, Alap, Jk) :-
        Sz > 0, szám(Sz, Alap, [], Jk).

% szám(Szám, Alap, Jk0, Jk): A Szám szám Alap alapú számrendszerben vett
% jegyeinek listáját Jk0 elé fűzve kapjuk Jk-t (A 0 jegylistája üres).
% Jelölés:  LL = L-L0 <----> az LL listát L0 elé fűzve kapjuk L-t.
szám(0, _, Jk, Jk).
szám(Sz, Alap, Jk0, Jk) :-
        Sz > 0, Sz1 is Sz//Alap, UtsoJegy is Sz mod Alap,
        szám(Sz1, Alap, [UtsoJegy|Jk0], Jk).
```

# 2000 tavaszi kis házi feladat — számjegyek fordított sorrendben

```
% fszám(Sz, A, Jk): Az Sz szám A alapú fordított jegylistája Jk.
fszám(0, _, [0]).
fszám(Sz, Alap, Jk) :- Sz > 0, fszám(Sz, Alap, [], Jk).

% fszám(Sz, A, Jk0, Jk): Az Sz szám A alapú fordított jegylistája Jk-Jk0.
fszám(0, _, Jk, Jk).
fszám(Sz, Alap, Jk0, [UtsoJegy|Jk]) :-
        Sz > 0, Sz1 is Sz//Alap, UtsoJegy is Sz mod Alap,
        fszám(Sz1, Alap, Jk0, Jk).
```

## A kétféle irányú gyűjtés összehasonlítása

```
fszám(0, _, Jk, Jk).                    szám(0, _, Jk, Jk).
fszám(Sz, A, Jk0, [U|Jk]) :-            szám(Sz, A, Jk0, Jk) :-
    Sz > 0, Sz1 is ...,                     Sz > 0, Sz1 is ...,
    U is ...,                               U is ...,
    fszám(Sz1, A, Jk0, Jk).                 szám(Sz1, A, [U|Jk0], Jk).
```

# 2000 tavaszi kis házi feladat — egyszerűsítés

## fszám/3 egyszerűsíthető

- `fszám/4` **minden hívása** `fszám(_,_,[],_)` **alakú.**
- `fszám(Sz, A, [], Jk)` ⇒`fszám12(Sz, A, Jk)`

```
% fszám(Szám, Alap, Jegyek): A Szám >= 0 szám  Alap > 1 alapú
% számrendszerben jobbról balra vett jegyeinek listája Jegyek.
fszám1(0, _, [0]).
fszám1(Sz, Alap, Jk) :-
        Sz > 0, fszám12(Sz, Alap, Jk).

% fszám12(Szám, Alap, Jk): A Szám >= 0 szám Alap > 1 alapú
% számrendszerben jobbról balra vett jegyeinek listája Jk.
fszám12(0, _, []).
fszám12(Sz, Alap, [UtsoJegy|Jk]) :-
        Sz > 0, Sz1 is Sz//Alap, UtsoJegy is Sz mod Alap,
        fszám12(Sz1, Alap, Jk).
```

# Körmentes út keresése — megoldás listák használatával

```
:- use_module(library(lists), [member/2, reverse/2]).

% útvonal_4(N, A, B , Út, H): A és B között van (pontosan)
% N szakaszból álló körmentes Út útvonal, amelynek összhossza H.
útvonal_4(N, Honnan, Hová, Út, H) :-
        útvonal_4(N, Honnan, Hová, [Honnan], Út, H).

% útvonal_4(N, A, B, K, Út, H): A és B között van pontosan
% N szakaszból álló körmentes, K elemein át nem menő H hosszú Út út.
útvonal_4(0, Hová, Hová, Kizártak, Út, 0) :-
        reverse(Kizártak, Út).
útvonal_4(N, Honnan, Hová, Kizártak, Út, H) :-
        N > 0, N1 is N-1,
        útszakasz(Honnan, Közben, H1),
        \+ member(Közben, Kizártak),
        útvonal_4(N1, Közben, Hová, [Közben|Kizártak], Út, H2), H is H1+H2.

| ?- útvonal_4(2, 'Párizs', _, Út, H).
        H = 1900, Út = ['Párizs','Bécs','Berlin'] ? ;
        H = 1510, Út = ['Párizs','Bécs','Budapest'] ? ; no
```

# Súlyozott gráf ábrázolása éllistával

## A gráf ábrázolása

- a gráf élek listája,
- az él egy három-argumentumú struktúra,
- argumentumai: a két végpont és a súly.

## Típus-definíció

```
% :- type él ---> él(pont, pont, súly).
% :- type pont == atom.
% :- type súly == int.
% :- type gráf == list(él).
```

## Példa

```
hálózat([él('Budapest','Bécs',245),
         él('Budapest','Prága',515),
         él('Bécs','Berlin',635),
         él('Bécs','Párizs',1265)]).
```

# Ismétlődésmentes útvonal keresése listával ábrázolt gráfban

```
:- use_module(library(lists), [select/3]).

% útvonal_5(N, G, A, B, L, H): A G gráfban van egy  A-ból
% B-be menő N szakaszból álló L út, melynek összhossza H.
útvonal_5(0, _Gráf, Hová, Hová, [Hová], 0).
útvonal_5(N, Gráf, Honnan, Hová, [Honnan|Út], H) :-
        N >0, N1 is N-1,
        select(Él, Gráf, Gráf1),
        él_végpontok_hossz(Él, Honnan, Közben, H1),
        útvonal_5(N1, Gráf1, Közben, Hová, Út, H2),
        H is H1+H2.

% él_végpontok_hossz(Él, A, B, H): Az Él irányítatlan él
% végpontjai A és B, hossza H.
él_végpontok_hossz(él(A,B,H), A, B, H).
él_végpontok_hossz(él(A,B,H), B, A, H).

| ?- hálózat(_Gráf), útvonal_5(2, _Gráf, 'Budapest', _, Út, H).
        H = 880, Út = ['Budapest','Bécs','Berlin'] ? ;
        H = 1510, Út = ['Budapest','Bécs','Párizs'] ? ;
        no
```

# A PROLOG SZINTAXIS

# A Prolog szintaxis összefoglalása

## A Prolog szintaxis alapelvei

- Minden programelem kifejezés!
- A szükséges összekötő jelek (`','`, `;`, `:-` `->`): szabványos operátorok.
- A beolvasott kifejezést funktora alapján osztályozzuk:
  - ***kérdés:*** `?- Cél.`
    *Cél*t lefuttatja, és a változó-behelyettesítéseket kiírja.
  - ***parancs:*** `:- Cél.`
    A *Cél*t csendben lefuttatja. Különféle deklarációkat parancsként helyezhetünk el a programban.
  - ***szabály:*** `Fej :- Törzs.`
    A szabályt felveszi a programba.
  - ***nyelvtani szabály:*** `Fej -> Törzs.`
    Prolog szabállyá alakítja és felveszi (lásd a DCG nyelvtanokat).
  - ***tényállítás:*** `Minden egyéb kifejezés.`
    Üres törzsű szabályként felveszi a programba.

# A Prolog nyelv-változatok

## A SICStus rendszer két üzemmódja

- `iso` Az ISO Prolog szabványnak megfelelő.
- `sicstus` Korábbi változatokkal kompatibilis.
- Állítása: `set_prolog_flag(language, `*Mód*`)`.
- Különbségek:
  - szintaxis-részletek, pl. a `0x1ff` szám-alak csak ISO módban,
  - beépített eljárások viselkedésének kisebb eltérései.
- az eddig ismertetett eljárások hatása lényegében nem változik.

# Kifejezések szintaxisa — kétszintű nyelvtanok

- **Egy részlet egy „hagyományos” nyelv kifejezés-szintaxisából:**

$$
\begin{array}{lcl}
\langle\,\textbf{kifejezés}\,\rangle ::= & & \langle\,\textbf{tag}\,\rangle \\
& \mid & \langle\,\textbf{kifejezés}\,\rangle\ \langle\,\textbf{additív művelet}\,\rangle\ \langle\,\textbf{tag}\,\rangle \\
\langle\,\textbf{tag}\,\rangle ::= & & \langle\,\textbf{tényező}\,\rangle \\
& \mid & \langle\,\textbf{tag}\,\rangle\ \langle\,\textbf{multiplikatív művelet}\,\rangle\ \langle\,\textbf{tényező}\,\rangle \\
\langle\,\textbf{tényező}\,\rangle ::= & & \langle\,\textbf{szám}\,\rangle \mid \langle\,\textbf{azonosító}\,\rangle \mid (\ \langle\,\textbf{kifejezés}\,\rangle\ )
\end{array}
$$

- **Ugyanez kétszintű nyelvtannal:**

$$
\begin{array}{lcl}
\langle\,\textbf{kifejezés}\,\rangle ::= & & \langle\,\textbf{kif}\ \mathit{2}\,\rangle \\
\langle\,\textbf{kif}\ \boldsymbol{N}\,\rangle ::= & & \langle\,\textbf{kif}\ \boldsymbol{N\text{-}1}\,\rangle \\
& \mid & \langle\,\textbf{kif}\ \boldsymbol{N}\,\rangle\ \langle\,\boldsymbol{N}\ \textbf{prioritású művelet}\,\rangle\ \langle\,\textbf{kif}\ \boldsymbol{N\text{-}1}\,\rangle \\
\langle\,\textbf{kif}\ \mathit{0}\,\rangle ::= & & \langle\,\textbf{szám}\,\rangle \mid \langle\,\textbf{azonosító}\,\rangle \mid (\ \langle\,\textbf{kif}\ \mathit{2}\,\rangle\ )
\end{array}
$$

**{az additív ill. multiplikatív műveletek prioritása *2* ill. *1* }**

# Kifejezések szintaxisa

⟨ programelem ⟩ ::= ⟨ kifejezés 1200 ⟩ ⟨ záró-pont ⟩

⟨ kifejezés *N* ⟩ ::= ⟨ op *N* fx ⟩ ⟨ köz ⟩ ⟨ kifejezés *N-1* ⟩
| ⟨ op *N* fy ⟩ ⟨ köz ⟩ ⟨ kifejezés *N* ⟩
| ⟨ kifejezés *N-1* ⟩ ⟨ op *N* xfx ⟩ ⟨ kifejezés *N-1* ⟩
| ⟨ kifejezés *N-1* ⟩ ⟨ op *N* xfy ⟩ ⟨ kifejezés *N* ⟩
| ⟨ kifejezés *N* ⟩ ⟨ op *N* yfx ⟩ ⟨ kifejezés *N-1* ⟩
| ⟨ kifejezés *N-1* ⟩ ⟨ op *N* xf ⟩
| ⟨ kifejezés *N* ⟩ ⟨ op *N* yf ⟩
| ⟨ kifejezés *N-1* ⟩

⟨ kifejezés 1000 ⟩ ::= ⟨ kifejezés 999 ⟩ , ⟨ kifejezés 1000 ⟩

⟨ kifejezés 0 ⟩ ::= ⟨ név ⟩ ( ⟨ argumentumok ⟩ )
{ A ⟨ név ⟩ és a ( közvetlenül egymás után áll!}
| ( ⟨ kifejezés 1200 ⟩ ) | { ⟨ kifejezés 1200 ⟩ }
| ⟨ lista ⟩ | ⟨ füzér ⟩
| ⟨ név ⟩ | ⟨ szám ⟩ | ⟨ változó ⟩

# Kifejezések szintaxisa — folytatás

| | | |
|---|---|---|
| ⟨ op $N$ $T$ ⟩ ::= | | ⟨ név ⟩ {feltéve, hogy ⟨ név ⟩ $N$ prioritású és $T$ típusú operátornak lett deklarálva} |
| ⟨ argumentumok ⟩ ::= | | ⟨ kifejezés 999 ⟩ |
| | \| | ⟨ kifejezés 999 ⟩ , ⟨ argumentumok ⟩ |
| ⟨ lista ⟩ ::= | | `[]` |
| | \| | `[` ⟨ listakif ⟩ `]` |
| ⟨ listakif ⟩ ::= | | ⟨ kifejezés 999 ⟩ |
| | \| | ⟨ kifejezés 999 ⟩ , ⟨ listakif ⟩ |
| | \| | ⟨ kifejezés 999 ⟩ \| ⟨ kifejezés 999 ⟩ |
| ⟨ szám ⟩ ::= | | ⟨ előjeltelen szám ⟩ |
| | \| | `+` ⟨ előjeltelen szám ⟩ |
| | \| | `-` ⟨ előjeltelen szám ⟩ |
| ⟨ előjeltelen szám ⟩ ::= | | ⟨ természetes szám ⟩ |
| | \| | ⟨ lebegőpontos szám ⟩ |

# Kifejezések szintaxisa — megjegyzések

- A ⟨kifejezés N⟩-ben ⟨köz⟩ csak akkor kell ha az őt követő kifejezés nyitó-zárójellel kezdődik.
- A `{` ⟨kifejezés⟩ `}` azonos a `{}(`⟨kifejezés⟩`)` struktúrával, ez pl a DCG nyelvtanoknál hasznos.
- Egy ⟨füzér⟩ `"` jelek közé zárt karaktersorozat, általában a karakterek kódjainak listájával azonos.

```
| ?- op(500, fx, succ).
yes
| ?- display(succ (1,2)), nl, display(succ(1,2)).
succ(,(1,2))
succ(1,2)
yes
| ?- write("baba").
[98,97,98,97]
```

# A Prolog lexikai elemei 1. (ismétlés)

**⟨ név ⟩**

- kisbetűvel kezdődő alfanumerikus jelsorozat (ebben megengedve kis- és nagybetűt, számjegyeket és aláhúzásjelet);
- egy vagy több ún. speciális jelből (`+-*/\$^<>=‘~:.?@#&`) álló jelsorozat;
- az önmagában álló `!` vagy `;` jel;
- a `[]` `{}` jelpárok;
- idézőjelek (') közé zárt tetszőleges jelsorozat, amelyben \ jellel kezdődő escape-szekvenciákat is elhelyezhetünk.

**⟨ változó ⟩**

- nagybetűvel vagy aláhúzással kezdődő alfanumerikus jelsorozat.
- az azonos jelsorozattal jelölt változók egy klózon belül azonosaknak, különböző klózokban különbözőeknek tekintődnek;
- kivétel: a semmis változók (`_`) minden előfordulása különböző.

# A Prolog lexikai elemei 2.

## ⟨ természetes szám ⟩

- (decimális) számjegysorozat;
- 2, 8 ill. 16 alapú számrendszerben felírt szám, ilyenkor a számjegyeket rendre a `0b`, `0o`, `0x` karakterekkel kell prefixálni (csak `iso` módban)
- karakterkód-konstans `0'`*c* alakban, ahol *c* egyetlen karakter

## ⟨ lebegőpontos szám ⟩

- mindenképpen tartalmaz tizedespontot
- mindkét oldalán legalább egy (decimális) számjeggyel
- `e` vagy `E` betűvel jelzett esetleges exponens

# Megjegyzések és formázó-karakterek

## Megjegyzések (comment)

- A % százalékjeltől a sor végéig
- A /* jelpártol a legközelebbi */ jelpárig.

## Formázó elemek

- szóköz, újsor, tabulátor, stb. (nem látható karakterek)
- megjegyzés

## A programszöveg formázása

- formázó elemek (szóköz, újsor, stb.) szabadon elhelyezhetők;
- kivétel: struktúrakifejezés neve után nem szabad;
- prefix operátor és ( közé kötelező;
- ⟨záró-pont⟩: egy . karakter amit egy formázó elem követ.

# TÍPUSOK PROLOGBAN

# Típusok leírása Prologban

- **Típusleírás: (tömör) Prolog kifejezések egy halmazának megadása**
- **Alaptípusok leírása:** `int`, `float`, `number`, `atom`, `any`
- **Új típusok felépítése:**
  `{ str(T`$_1$`, ..., T`$_n$`) }` $\equiv$ `{ str(`$e_1$`, ..., `$e_n$`) | `$e_1 \in$`T`$_1$`, ..., `$e_n \in$`T`$_n$` }`$, n \geq 0$

  `{személy(atom,atom,int)}` **az olyan** `személy/3` **funktorú struktúrák halmaza, amelyben az első két argumentum atom, a harmadik egész.**
- **Típusok, mint halmazok úniója képezhető a** `\/` **operátorral.**

  `{személy(atom,atom,int)} \/ {atom-atom} \/ atom`
- **Egy típusleírás elnevezhető (kommentben):** `% :- type` *tnév* `==` *tleírás*.

  `% :- type t1 == {atom-atom} \/ atom.`, `% :- type ember == {ember-atom} \/ {semmi}.`
- **Megkülönböztetett únió: csupa különböző funktorú összetett típus úniója. Egyszerűsített jelölés:**

  `:- type` $T$ `== {` $S_1$ `} \/ ...\/ {` $S_n$ `}.` $\Rightarrow$ `:- type` $T$ `--->` $S_1$ `; ...;` $S_n$.

```
% :- type ember ---> ember-atom; semmi.
% :- type egészlista ---> []; [int|egészlista].
```

# Típusok leírása Prologban — folytatás

- **Paraméteres típusok — példák**

```
% :- type list(T) ---> [] ; [T|list(T)]. % T típusú elemekből álló lista.
% :- type pair(T1, T2) ---> T1 - T2.     % egy  '-' nevű kétargumentumú struktúra,
                                         % első argumentuma T1, a második T2 típusú.
% :- type assoc_list(KeyT, ValueT)
%           == list(pair(KeyT, ValueT)). % KeyT és ValueT típusú párokból álló lista.

% :- type szótár == assoc_list(szó, szó).
% :- type szó == atom.
```

- **Típusdeklarációk szintaxisa**

| | | |
|---|---|---|
| ⟨ **típusdeklaráció** ⟩ | ::= | ⟨ **típuselnevezés** ⟩ \| ⟨ **típuskonstrukció** ⟩ |
| ⟨ **típuselnevezés** ⟩ | ::= | `:- type` ⟨ **típusazonosító** ⟩ `==` ⟨ **típusleírás** ⟩ `.` |
| ⟨ **típuskonstrukció** ⟩ | ::= | `:- type` ⟨ **típusazonosító** ⟩ `--->` ⟨ **megkülönb. únió** ⟩ `.` |
| ⟨ **megkülönb. únió** ⟩ | ::= | ⟨ **konstruktor** ⟩ `;` ... |
| ⟨ **konstruktor** ⟩ | ::= | ⟨ **névkonstans** ⟩ \| ⟨ **struktúranév** ⟩(⟨ **típusleírás** ⟩, ...) |
| ⟨ **típusleírás** ⟩ | ::= | ⟨ **típusnév** ⟩ \| ⟨ **típusváltozó** ⟩ \| |
| | | ⟨ **típusleírás** ⟩ `\/` ⟨ **típusleírás** ⟩ \| |
| | | `{` ⟨ **típusnév** ⟩(⟨ **típusleírás** ⟩, ...)`}` |
| ⟨ **típusazonosító** ⟩ | ::= | ⟨ **típusnév** ⟩ \| ⟨ **típusnév** ⟩(⟨ **típusváltozó** ⟩, ...) |

# Predikátum-deklarációk

- **Predikátumtípus-deklaráció**
  `:- pred` ⟨ eljárásnév ⟩(⟨ típusazonosító ⟩, ...)
- **Példák:**

```
:- pred member(T, list(T)).
:- pred append(list(T), list(T), list(T)).
```

- **Predikátummód-deklaráció (Nem kötelező, több is megadható.)**
  `:- mode` ⟨ eljárásnév ⟩(⟨ módazonosító ⟩, ...) ahol ⟨ módazonosító ⟩ ::= `in` | `out`.
- **Példák:**

```
:- mode append(in, in, in).   % ellenőrzésre
:- mode append(in, in, out).  % két lista összefűzésére
:- mode append(out, out, in). % egy lista szétszedésére
```

- **Vegyes típus- és móddeklaráció**
  `:- pred` ⟨ eljárásnév ⟩(⟨ típusazonosító ⟩`::`⟨ módazonosító ⟩, ...)
- **Példa:**

```
:- pred between(int::in, int::in, int::out).
```

# A HÍD FELADVÁNY

## A feladat

**Egy szakadékon egy hosszú és keskeny palló ível át, amely egyszerre legfeljebb két embert bír el. A palló egyik oldalán áll négy ember: 10, 20, 50 és 100 évesek. Az $N$ éves ember $N$ perc alatt tud átmenni a hídon. Ha ketten mennek át akkor a lassabb embernek megfelelő idő alatt érnek át.**

**Sötét van, világítás nélkül lehetetlen átérni, de a társaságnak csak egyetlen zseblámpája van. A feladat: megszervezni az átkelést úgy, hogy a teljes társaság a lehető legrövidebb idő alatt átkeljen a túloldalra.**

**Kérdés: mennyi idő alatt tudnak leggyorsabban átkelni?**

## Az adatstruktúrák

```
% :- type állapot ---> lámpa-list(ember).  % Hol a lámpa és hol vannak az emberek?
% :- type lámpa == oldal.                  % A lámpa az egyik oldalon lehet.
% :- type ember == list(pair(int,oldal)).  % Minden adott korú ember mellett
                                           % ott a tartózkodási helye.
% :- type oldal ---> bal ; jobb.
```

# Az állapotátmenet

```
% útszakasz(Áll0, Áll1, Idő): Áll0-ból egy lépésben Áll1-be lehet jutni Idő alatt.
% :- pred útszakasz(áll::in, áll::out, int::out).
útszakasz(Innen-Helyzet0, Ide-Helyzet, Idő) :-
        másik(Innen, Ide),     % A lámpa az Innen oldalon van, Ide a túloldal.
        cserél(E1-Innen, Helyzet0, E1-Ide, Helyzet),      % E1 megy át
        Idő = E1.
útszakasz(Innen-Helyzet0, Ide-Helyzet, Idő) :-
        másik(Innen, Ide),
        cserél(E1-Innen, Helyzet0, E1-Ide, Helyzet1),     % E1 átmegy
        cserél(E2-Innen, Helyzet1, E2-Ide, Helyzet),      % E2 átmegy
        E1 > E2, Idő = E1.

% másik(Egyik, Másik): Egyik és Másik két különböző oldal.
% :- pred másik(oldal, oldal).
másik(bal, jobb).
másik(jobb, bal).

% véghelyzet(Hol, Áll): Az Áll állapotban a zseblámpa és az emberek a Hol
% oldalon vannak.
% :- pred véghelyzet(oldal, áll).
véghelyzet(Hol, Hol-[10-Hol,20-Hol,50-Hol,100-Hol]).
```

# Futtatás

```
% Át lehet menni a bal véghelyzetből a jobb véghelyzetbe
% Hossz Idő alatt az Út állapotlistán keresztül.
% :- pred átmegy(list(áll)::out, int::out).
átmegy(Út, Hossz) :-
        véghelyzet(bal, Kezd),
        véghelyzet(jobb, Vég),
        between(1, 10, N),
        útvonal_4(N, Kezd, Vég, Út, Hossz).


| ?- átmegy(Út, H).
        H = 190, Út = [bal-[10-bal,20-bal,50-bal,100-bal],... - ...]] ?
yes
| ?- átmegy(Út, H), H < 190.
        H = 170, Út = [bal-[10-bal,20-bal,50-bal,100-bal],... - ...]] ?
yes
| ?- átmegy(Út, H), H < 170.
        no
        % mintegy 20 másodperc után!
```

## 2. megoldás — a keresési tér korlátozása, lépések gyűjtése

```
% :- type lépés ---> átmenők>oldal.     % az adott oldalra átmennek az átmenők.
% :- type átmenők == int \/ {int+int}.  % egy vagy két adott korú ember.

% útszakasz(Áll0, Áll1, Idő, Lépés): Egy Lépés lépéssel Idő alatt az Áll0
% állapotból az Áll1 állapotba lehet jutni.
% :- pred útszakasz(áll::in, áll::out, int::out, lépés::out).
útszakasz(Innen-Helyzet0, Ide-Helyzet, Idő, E1>Ide) :-     % E1 megy át.
        másik(Innen, Ide),
        cserél(E1-Innen, Helyzet0, E1-Ide, Helyzet),       % E1 átmegy
        Idő = E1.
útszakasz(Innen-Helyzet0, Ide-Helyzet, Idő, E1+E2>Ide) :-  % E1+E2 megy át.
        másik(Innen, Ide),
        cserél(E1-Innen, Helyzet0, E1-Ide, Helyzet1),      % E1 átmegy
        cserél(E2-Innen, Helyzet1, E2-Ide, Helyzet),       % E2 átmegy
        E1 > E2, Idő = E1.
```

```
% Lépések-kel át lehet menni a bal véghelyzetből a jobb véghelyzetbe
% Hossz idő alatt, ahol Hossz < Max.
% :- pred átmegy(int::in, list(lépés)::out, int::out).
átmegy(Max, Lépések, Hossz) :-
        véghelyzet(bal, Kezd), véghelyzet(jobb, Vég),
        útvonal_6(Kezd, Vég, Max, Lépések, Nyereség),
        Hossz is Max - Nyereség.

% útvonal_6(A, B, Max, Lk, Nyer): A és B között van egy Max-nál
% Nyer-rel rövidebb út (Nyer > 0), amelynek lépéssorozata Lk.
% :- pred útvonal_6(áll::in, áll::in, int::in, list(lépés)::out, int::out).
útvonal_6(Hová, Hová, Max, [], Max)  :- Max > 0.
útvonal_6(Honnan, Hová, Max0, [Lép|LépL], Nyer) :-
        Max0 > 0,
        útszakasz(Honnan, Közben, H1, Lép),
        Max1 is Max0-H1,
        útvonal_6(Közben, Hová, Max1, LépL, Nyer).

| ?- átmegy(190, Lk, H).
        H = 170, Lk = [20+10>jobb,10>bal,100+50>jobb,20>bal,20+10>jobb] ? ;
        H = 170, Lk = [20+10>jobb,20>bal,100+50>jobb,10>bal,20+10>jobb] ? ;
        no
```

# 1. kis házi feladat

Adott egy lista, amelynek elemei `piros/1`, `feher/1` vagy `zold/1` funktorú struktúrák, tetszőleges sorrendben. A struktúrák argumentuma tetszőleges Prolog kifejezés lehet, ezek az argumentumok a feladat szempontjából érdektelenek.

A feladat a lista rendezése úgy, hogy az elején álljanak a `piros/1` funktorúak, utánuk `feher/1` funktorúak, végül pedig a `zold/1` funktorúak. Az egyes csoportokon belül az elemek sorrendje ne változzék.

Írjon egy olyan `zaszlo/2` Prolog eljárást, amely megvalósítja a leírt rendezést. Ha a fenti háromtól különböző funktorú elem van a listában, akkor az eljárás hiusúljon meg.
Törekedjék arra, hogy a megoldás hatékony legyen! Vigyázzon arra is, hogy az eljárás ne sikerüljön többször!

Pontérték: 1 plusz pont
Beadási határidő: 2001 március 19, 24:00
Beadás módja: a honlapon meghirdetendő módon.

# 1. kis házi feladat — folytatás

```
% :- lista == list(szin).
% :- szin ---> piros(any) ; feher(any) ; zold(any).
% zaszlo(Bemenet, Kimenet): a Kimenet lista a Bemenet lista elemeinek
% fent leírt módon rendezett listája.
% :- pred zaszlo(lista::in, lista::out).
```

## Példák

```
| ?- zaszlo([piros(a),kek(b)], Z).
        no
| ?- zaszlo([zold(c),piros(d),feher(e)], Z).
        Z = [piros(d),feher(e),zold(c)] ? ;
        no
| ?- zaszlo([piros(f),zold(g),piros(h),feher(i)], Z).
        Z = [piros(f),piros(h),feher(i),zold(g)] ? ;
        no
```

# BEVEZETÉS A FUNKCIONÁLIS PROGRAMOZÁSBA

# Az előadássorozat áttekintése

- Bevezetés. Az SML nyelv alapjai.
- Egyszerű és összetett adattípusok. Programfejlesztés.
- Polimorfizmus. Listaműveletek. A legfontosabb programkönyvtárak.
- Programhelyesség, programbizonyítás.
- Magasabbrendű függvények.
- Modulok. Absztrakt adattípusok. Paraméterezhető modulok.
- Nemlineáris rekurzív adattípusok.
- Nagyobb SML-példák.
- Új irányzatok a funkcionális programozásban.

# A funkcionális programozás motivációi

- Rekurzió, teljes indukció (vö. gépi kód, Fortran, Basic) – 1950-es évek
- Lineáris rekurzív adatszerkezet (lista, vö. ciklus)
- Függvények – vissza a matematikához! (vö. mellékhatás) – 1960-as évek
- Erős típusok, ellenőrzés fordításkor (vö. típusnélküli nyelvek) – 1970-es évek
- Rekurzív adattípusok (fa, vö. láncolt adatszerkezetek)
- Absztrakt adattípusok (vö. objektumok)
- Végrehajtható specifikációk (vö. tesztelés) – 1990-es évek

Mi az alapvető különbség a deklaratív és az imperatív programozás között?

- A deklaratív programozás *időtlen*, nem törődik az idővel.
- Idő $\longrightarrow$ állapot $\longrightarrow$ emlékezet.

# A funkcionális programozás rövid története

- A függvényfogalom fejlődése – l. külön fóliákon: `fffp.pdf`.
- Euler (1748): $\sin.x$ később $\sin x$ vagy $\sin(x)$
- Alfred N. Whitehead, Bertrand Russel (1910) ... Alonzo Church: $\lambda$-***kalkulus***, $\lambda$-jelölés: $\lambda x.x + x$
- Church, 1936: $\lambda$-kalkulus (funkcionális) $\equiv$ Turing-gép (imperatív) $\longrightarrow$ funkcionális programozás $\equiv$ imperatív programozás
- Church-tétel: kiszámítható függvények halmaza $\equiv$ rekurzív függvények halmaza – ez a funkcionális programozás alapja
- 1960: ALGOL (ALGOrithmic Language) – rekurzív eljárás és függvényeljárás (!)
- 1960: LISP (LISt Processing language) – alapja a $\lambda$-kalkulus, eredeti célja: ***szimbolikus differenciálás***
- 1962-től: APL, ML, HOPE, ERLANG, Miranda, SML, Haskell, gofer, clean stb.

# Az ML (Meta Language) rövid története és jelene

## Az ML rövid története

- ML, Edinborough 1977, tételbizonyításra (kijelentések igazolására)
- Definition of Standard ML, 1990
  - Alapnyelv (Core Language)
  - Modulnyelv (Module Language)
- Revised Definition of Standard ML, 1997
- SML Basis Library (Alapkönyvtár), 1997

## SML-megvalósítások

- Moscow ML (mosml): `http://www.dina.kvl.dk/ sestoft/mosml.html`
- Standard ML of New Jersey (sml):
  `http://cm.bell-labs.com/cm/cs/what/smlnj`

# Információk a funkcionális programozásról

## Hálózati információforrások:

### Comp.Lang.ML FAQ

http://www.cis.ohio-state.edu/hypertext/faq/usenet/meta-lang-faq/faq.html

### Andrew Cumming: A Gentle Introduction to ML

http://www.dcs.napier.ac.uk/course-notes/sml/manual.html

### Stephen Gilmore: Programming in Standard ML '97

http://www.dcs.ed.ac.uk/home/stg

### Robert Harper: Programming in Standard ML

http://www.cs.cmu.edu/People/rwh/

### Fox project at CMU

http://foxnet.cs.cmu.edu/sml.html

# SML-irodalom (csak angolul)

**Forrásművek az előadásokhoz**

Jeffrey D. Ullman: *Elements of ML Programming* (2nd Edition, ML97)
MIT Press 1997
`http://www-db.stanford.edu/ ullman/emlp.html`

Lawrence C. Paulson: *ML for the Working Programmer* (2nd Edition, ML97)
Cambridge University Press 1996
`http://www.cl.cam.ac.uk/users/lcp/MLbook/`

Richard Bosworth: *A Practical Course in Functional Programming Using Standard ML*
McGraw-Hill 1995

# A FÜGGVÉNY FOGALMA ÉS TULAJDONSÁGAI

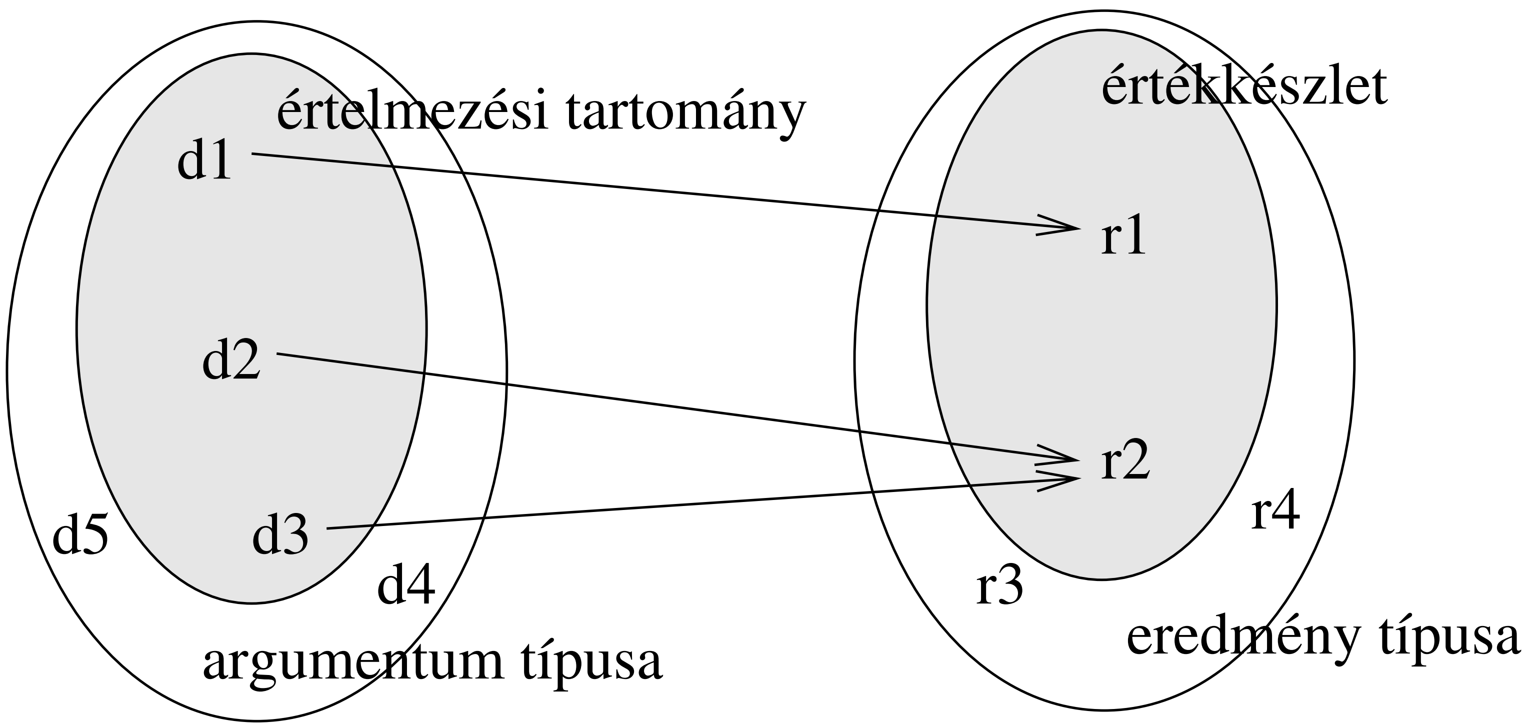
# A típus és a függvény fogalma

- A típus fogalma
  - A típus értékek egy halmaza (pl. egész típus = az egész számok halmaza)
  - Jelölése: $\alpha$, $\beta$, ... (az ún. ***típuselméletben*** így használják)
- A függvény fogalma
  - A függvény valamely $D$ halmaznak valamely $R$ halmazba való olyan ***egyértelmű*** leképzése, amelyet meghatároz a $(d; r)$ rendezett párok halmaza, ahol $d \in D$ és $r \in R$.
  - A $d$ a függvény argumentuma (paramétere), az $r$ az eredménye
  - A $D$ a függvény értelmezési tartománya, az $R$ az értékkészlete
  - A típusos nyelvekben $d$ is, $r$ is ***meghatározott*** típusú
  - Függvény értelmezési tartománya $\subseteq$ argumentum típusa
  - Függvény értékkészlete $\subseteq$ eredmény típusa

# A függvény mint érték

- A függvény „teljes jogú" *(first-class)* érték a funkcionális programozási nyelvekben
  - A függvény típusa általában: $\alpha \to \beta$, ahol az $\alpha$ az argumentum, a $\beta$ az eredmény típusát jelöli
  - A függvény – érték: *függvényérték*
  - Fontos: a függvényérték *nem* a függvény *alkalmazásának* az eredménye!
  - Példák függvényértékre
    - sin (a típusa: *valós* $\to$ *valós*)
    - round (a típusa: *valós* $\to$ *egész*)
    - $f \circ g$ (a típusa: $\alpha \to \beta$)
  - Példa függvényalkalmazásra
    - round $5.4 = 5$, azaz ennek a függvényalkalmazásnak egy *egész* típusú érték az eredménye

# A függvény mint leképzés



# Függvények tulajdonságai és osztályozása

- Parciális függvény: értelmezési tartomány $\subset$ argumentum típusa

  Figyelem: ez hibák forrása lehet!

- Teljes függvény: értelmezési tartomány $=$ argumentum típusa
- Szürjektív függvény: értékkészlet $=$ eredmény típusa
- Nem-szürjektív függvény: értékkészlet $\subset$ eredmény típusa
- Injektív függvény: a leképzés kölcsönösen egyértelmű
- Az $f : \alpha \rightarrow \beta$ injektív függvény inverze: $f^{-1} : \beta \rightarrow \alpha$
- Bijektív $=$ injektív $+$ szürjektív, azaz $f$ bijektív, ha $f^{-1}$ teljes függvény

# Függvények alkalmazása

- ***Függvényalkalmazást*** **jelöl az $f$ és $e$ jelek egymás mellé írása („*juxtapozicionálása*”): $f\,e$ azt jelenti, hogy $f$-et alkalmazzuk $e$-re.**
- **Általánosabban: az $fe$ kifejezésben az $e$ tetszőleges olyan kifejezés, amelynek az értéke az $f$ értelmezési tartományába esik.**
- **Még általánosabban: az $fe$ kifejezésben az $f$ függvényértéket eredményező tetszőleges kifejezés, $e$ pedig tetszőleges olyan kifejezés, amelynek az értéke az $f$ értelmezési tartományába esik.**

# Két- vagy többargumentumú függvények

- Függvény alkalmazása két- vagy több argumentumra
  1. Az argumentumokat ***összetett adatnak*** – párnak, rekordnak, listának stb. – tekintjük, pl. $f(1,2)$
     - az $f$ függvény alkalmazását jelenti az $(1,2)$ párra.
  2. A függvényt több egymás utáni lépésben alkalmazzuk az argumentumokra, pl. $f 1 2 \equiv (f 1) 2$ azt jelenti, hogy
     - az első lépésben az $f$ függvény alkalmazzuk az $1$ értékre, ami egy függvényt ad eredményül,
     - a második lépésben az első lépésben kapott függvényt alkalmazzuk a $2$ értékre, így kapjuk meg az $f 1 2$ függvényalkalmazás (vég)eredményét.
- Infix jelölés: $x \oplus y \equiv$ az $\oplus$ függvény alkalmazása az $(x, y)$ párra mint argumentumra

# FÜGGVÉNYEK AZ SML-BEN

# Függvények alkalmazása az SML-ben

- Az SML-ben az `f` és az `e` tetszőleges ***név*** lehet, amelyeket megfelelően ***szeparálni*** kell egymástól: `f e`, vagy `f(e)`, vagy `(f)e`
- Szeparátor: nulla, egy vagy több ***formázó*** karakter (␣, \t, \n stb.). Nulla db formázó karakter elegendő pl. a ( előtt és a ) után.
- A szeparátor a legerősebb balra kötő infix operátor az SML-ben.
- Példák:
  `Math.sin 1.00, (Math.cos)Math.pi, round(3.17), 2 + 3, (real) (3 + 2 * 5)`
- Függvények egy csoportosítása az SML-ben
  - Beépített függvények, pl. `+`, `*` (infix), `real`, `round` (prefix)
  - Könyvtári függvények, pl. `Math.sin`, `Math.cos`, `Math.pi`
  - Felhasználó által definiálható függvények, pl. `terulet`, `/\`, `head`

# SML-példa: Egyszeres Hamming-távolságú ciklikus kód

- A függvényt *táblázattal* adjuk meg:

| | |
|---|---|
| **00** | **01** |
| **01** | **11** |
| **11** | **10** |
| **10** | **00** |

```
fn 00 => 01
 | 01 => 11
 | 11 => 10
 | 10 => 00
```

- Változatok („klózok”): minden lehetséges esetre egy változat.
- Az `fn` (olvasd: *lambda*), névtelen függvényt, *függvénykifejezést* vezet be.
- A függvény néhány alkalmazása:
  - `(fn 00 => 01 | 01 => 11 | 11 => 10 | 10 => 00) 10`
  - `(fn 00 => 01 | 01 => 11 | 11 => 10 | 10 => 00) 11`
  - `(fn 00 => 01 | 01 => 11 | 11 => 10 | 10 => 00) 111`
- Mintaillesztés, egyesítés
- Érthető, de nem robusztus (vö. parciális a függvény!).

# SML-példa: modulo $n$ alapú inkrementálás

- A függvényt most *algoritmussal* adjuk meg, nem táblázattal
  - `n` nem lehetne változó, túl sok változatot kellene felírni stb.
- `fn i => (i + 1) mod n`
  - az `i` ún. kötött változó, a névtelen függvény argumentuma
  - az `n` ebben a kifejezésben szabad változó, és nincs értéke (!)
  - az `n`-et is le kell kötni mint a függvény argumentumát
- `fn i => fn n => (i + 1) mod n`
- A függvény néhány alkalmazása:
  - `(fn i => (fn n => (i + 1) mod n) 4) 1)`
  - `(fn i => (fn n => (i + 1) mod n) 128) 111`
  - `(fn i => (fn n => (i + 1) mod n) 4) ~7`
  - `(fn i => (fn n => (i + 1) mod n) 128) 6.0` – **hibás!**

# Értékdeklaráció SML-ben: függvényérték deklarálása

- Név kötése függvényértékhez
  - `val incMod = fn i => fn n => (i + 1) mod n`
  - `val kovKod = fn 00 => 01 | 01 => 11 | 11 => 10 | 10 => 00`
- Szintaktikai édesítőszerrel
  - `fun incMod n i = (i + 1) mod n`
    - Figyelem: `i` és `n` sorrendje megfordult!
  - ```
    fun kovKod 00 = 01
      | kovKod 01 = 11
      | kovKod 11 = 10
      | kovKod 10 = 00
    ```
- Alkalmazásuk argumentumra
  - `incMod 128 111`
  - `kovKod 01`
    ```

# Fejkomment

Legyen *fejkomment* minden (függvény)érték-deklarációhoz!

- ```
  (* incMod n i = (i+1) modulo n szerint
     PRE: n > i >= 0
  *)
  fun incMod n i = (i+1) mod n
  ```
- ```
  (* kovKod cc = a kétbites, egyszeres Hamming-távolságú, ciklikus
                 kódkészlet cc-t követő eleme
     PRE: cc in {00, 01, 11, 10}
  *)
  fun kovKod 00 = 01
    | kovKod 01 = 11
    | kovKod 11 = 10
    | kovKod 10 = 00
  ```

# TÍPUSOK ÉS ÉRTÉKEK AZ SML-BEN

# Típusok

- Típusok és programozási nyelvek
  - Típus nélküli nyelvek, pl. assembly, LISP, Prolog
  - Gyengén típusos nyelvek, pl. Fortran, Algol, BASIC, C, C++, Pascal
  - Erősen típusos nyelvek, pl. Ada, SML, clean
  - Erős típus: a típusok ($\sim$ halmazok) diszjunktak (nincs közös elemük)
- Egyszerű SML-típusok
  - `int` – előjeles egész szám, a $Z$ egy részhalmaza
  - `word`, `word8` – előjel nélküli pozitív egész, az $N_0$ egy részhalmaza
  - `real` – előjeles racionális (valós?!) szám, a $Q$ egy részhalmaza
  - `bool`, `char`, `order`, `unit`
  - `string`
- Összetett SML-típusok (példák)
  - `rekord`
  - `lista`

# Értékdeklaráció az SML-ben: név kötése tetszőleges értékhez

- **Függvényértéket így kötöttünk tetszőleges névhez:**

```
val incMod = fn i => fn n => (i + 1) mod n
```

- **Tetszőleges típusú érték köthető tetszőleges névhez:**

| | | |
|---|---|---|
| `val harom = 2 + 1` | `: int` | |
| `val MHz = 94.5` | `: real` | |
| `val veege = true` | `: bool` | `true`, `false` |
| `val kisA = #"a"` | `: char` | |
| `val palindrom = "ABBA"` | `: string` | |
| `val kisebb = LESS` | `: order` | `LESS`, `EQUAL`, `GREATER` |
| `val ezNemSemmi = ()` | `: unit` | **Egyetlen értéke a `()`!** |
| `val rat = {num = 3, den = 4}` | `: {den : int, num : int}` | **Mezőnevek ábécében.** |
| `val bLista = [2,3,4] @ [3,2]` | `: int list` | |
| `val telenek = [0w123, 0wxcd]` | `: word list` | |

- **Típusmegkötés:**

| | |
|---|---|
| `val id = fn (n : int) => n` | **Példák:** `id 3;`, `id 4.5;` |
| `val telenek = [0w65, 0wx41 : word8]` | **Típusa:** `word8 list` |

# EGYSZERŰSÍTETT SML-SZINTAXIS

# SML-szintaxis: különleges állandó

- Előjeles egész állandó

  | | | | | | | | |
  |---|---|---|---|---|---|---|---|
  | **Példák:** | `0` | `~0` | `4` | `~04` | `999999` | `0xFFFF` | `~0x1ff` |
  | **Ellenpéldák:** | `0.0` | `~0.0` | `4.0` | `1E0` | `-317` | `0XFFFF` | `-0x1ff` |

- Valós állandó

  | | | | | | | | |
  |---|---|---|---|---|---|---|---|
  | **Példák:** | `0.7` | `~0.7` | `3.32E5` | `3E~7` | `~3E~7` | `3e~7` | `~3e~7` |
  | **Ellenpéldák:** | `23` | `.3` | `4.E5` | `1E2.0` | `1E+7` | `1E-7` | |

- Előjel nélküli egész állandó

  | | | | | | | |
  |---|---|---|---|---|---|---|
  | **Példák:** | `0w0` | `0w4` | `0w999999` | `0wxFFFF` | `0wx1ff` | |
  | **Ellenpéldák:** | `0w0.0` | `~0w4` | `-0w4` | `0w1E0` | `0wXFFFF` | `0WxFFFF` |

- Füzérállandó: `"`-ek között álló nulla vagy több nyomtatható karakter, szóköz vagy `\` jellel kezdődő *escape-szekvencia* (l. a táblázatot a következő lapon).

- Karakterállandó: `#` jelet közvetlenül követő, egykarakteres füzérállandó.

  | | | | | | |
  |---|---|---|---|---|---|
  | **Példák:** | `#"a"` | `#"\n"` | `#"\^Z"` | `#"\255"` | `#"\""` |
  | **Ellenpéldák:** | `# "a"` | `#c` | `#"""` | | |

# SML-szintaxis: escape-szekvenciák

- Escape-szekvenciák

| | |
|---|---|
| `\a` | Csengőjel (BEL, ASCII 7). |
| `\b` | Visszalépés (BS, ASCII 8). |
| `\t` | Vízszintes tabulátor (HT, ASCII 9). |
| `\n` | Újsor, soremelés (LF, ASCII 10). |
| `\v` | Függőleges tabulátor (VT, ASCII 11). |
| `\f` | Lapdobás (FF, ASCII 12). |
| `\r` | Kocsi-vissza (CR, ASCII 13). |
| `\^`*c* | Vezérlő karakter, ahol $64 \leq c \leq 95$ (@ ... _), és `\^`*c* ASCII-kódja 64-gyel kevesebb *c* ASCII-kódjánál. |
| `\`*ddd* | A *ddd* kódú karakter (*d* decimális számjegy). |
| `\u`*xxxx* | A *xxxx* kódú karakter (*x* hexadecimális számjegy). |
| `\"` | Idézőjel ("). |
| `\\` | Hátratört-vonal (\). |
| `\`$f \cdots f$`\` | Figyelmen kívül hagyott sorozat. $f \cdots f$ nulla vagy több formázókaraktert (szóköz, HT, LF, VT, FF, CR) jelent. |

# SML-szintaxis: név

- Alfanumerikus: kis- és nagybetűk, számjegyek, percjelek (') és aláhúzás-jelek (_) olyan sorozata, amely betűvel vagy percjellel kezdődik
  - Példák: `tothGyorgy` `Toth_3_Gyorgy` `toth'gyorgy`
- Szimbolikus: az alábbi jelek tetszőleges, nem üres sorozata

```
! % & $ # + - / : < = > ? @ \ ~ ' ^ | *
```

  - Példák: `++` `<->` `|||` `##` `|=|`
- Speciális a szerepe az alábbi fenntartott jeleknek

```
( ) [ ] { } , ; . ...
```

- Más jelentés nem rendelhető az ún. fenntartott nevekhez

```
abstype and andalso as case do datatype else end eqtype exception
fn fun functor handle if in include infix infixr let local nonfix
of op open orelse raise rec sharing sig signature struct structure
then type val where with withtype while : :: :> _ | = => -> #
```

# SML-szintaxis: szintaktikai kategóriák (egyszerűsítve)

- A nevek és más azonosítók ***szintaktikai kategóriákba*** sorolhatók

| | | | |
|---|---|---|---|
| ***vid*** | értéknév | value identifier | long |
| ***tyvar*** | típusváltozó | type variable | |
| ***tycon*** | típuskonstruktor | type constructor | long |
| ***lab*** | mezőnév | record label | |
| ***strid*** | struktúranév | structure identifier | long |
| ***sigid*** | szignatúranév | signature identifier | |
| ***unitid*** | állománynév | unit identifier | |

- Az ***értéknév*** tetszőleges név; jelölhet állandó értéket, függvényértéket, adatkonstruktort, kivételkonstruktort. Példák: `pi + sin nil true Match`
- A ***típusváltozó*** percjellel kezdődő alfanumerikus név. Példa: `'a`.
- A ***típuskonstruktor*** tetszőleges név; jelölhet típusállandót vagy típusfüggvényértéket. Példák: `int order $ * -> list`
- A ***mezőnév*** tetszőleges név vagy (nem 0-val kezdődő) pozitív egész szám. Példák: `num  2`

# SML-szintaxis: szintaktikai kategóriák (folyt.)

- Minden, az előző felsorolásban „long”-gal megjelölt ***X*** szintaktikai kategóriának van egy ***longX*** párja. A ***longX*** szintaktikai kategóriába tartozó nevek rövid és hosszú (ún. minősített) alakban is felírhatók. A ***rövid alak*** csak egy névből, a ***hosszú alak*** egy hosszú struktúranévből, egy pontból és egy névből áll:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ***longx*** | ::= | ***x*** | név | identifier |
| | | ***longstrid.x*** | minősített név | qualified identifier |

  Példák:

  - `explode`
  - `Real.toString`
  - `Int.+`
  - `List.filter`

# SML-szintaxis: szintaktikai kategóriák (folyt.)

- A *struktúranév* és a *szignatúranév* a *modulnyelv* fogalomkörébe tartozó tetszőleges nevek.

  Példák: `Char` `Int` `List` `TextIO`

- Az *állománynév* a *modulnyelv* fogalomkörébe tartozó tetszőleges olyan név, amelyet az adott operációs rendszer is megenged; forráskodú vagy tárgykódú struktúra- vagy szignatúra-állományt azonosít.

- A *strid* struktúranév a `unitid.uo` tárgykódú struktúra-állományra hivatkozik, ahol `unitid` = *strid*. A `unitid.sml` struktúra-állomány fordításakor már léteznie kell a `unitid.ui` tárgykódú szignatúra-állománynak, összeszerkesztésekor pedig már léteznie kell a `unitid.uo` tárgykódú struktúra-állománynak.

- A *sigid* szignatúranév a `unitid.ui` tárgykódú szignatúra-állományra hivatkozik, ahol `unitid` = *sigid*. A `unitid.ui` tárgykódú szignatúra-állományt a `unitid.sig` forráskodú szignatúra-állomány lefordításával kell előállítani.

# Struktúra, szignatúra, tárgykódú és forráskódú állományok

## Példák

- Struktúra a megfelelő szignatúrával
  - `structure Rat :> Rat = struct` ***implementáció*** `end`
  - `signature Rat = sig` ***specifikáció*** `end`
- A `Rat` struktúrát és szignatúrát tartalmazó állományok
  - `Rat.sml`: a forráskódú struktúra-állomány (a `.sml` kiterjesztés használata ajánlott, de nem kötelező)
  - `Rat.sig`: a forráskódú szignatúra-állomány (a `.sig` kiterjesztés használata kötelező)
  - `Rat.uo`: a tárgykódú struktúra-állomány (a `.uo` kiterjesztés használata kötelező)
  - `Rat.ui`: a tárgykódú szignatúra-állomány (a `.ui` kiterjesztés használata kötelező)

# Függvényjel helyzete és kötése

- Függvényjel helyzete és kötése (általában)
  - Egy függvényjel *prefix*, *infix* vagy *postfix* helyzetű lehet.
  - Az infix helyzetű függvényjelet gyakran *operátornak* nevezik.
  - Egy (infix helyzetű) operátor lehet *asszociatív* vagy *nem-asszociatív*; köthet balra vagy jobbra, vagy semerre. Asszociatív operátor esetén a kötési iránynak nincs jelentősége.
- Infix Prolog-operátor kötése
  - `xfx` = `f` mindkét oldalán `f` csak zárójelben ismétlődhet (`f` „nem köt”),
  - `yfx` = `f` bal oldalán `f` zárójelezés nélkül ismétlődhet (`f` „balra köt”),
  - `xfy` = `f` jobb oldalán `f` zárójelezés nélkül ismétlődhet (`f` „ jobbra köt”).

# Függvényjel helyzete és kötése az SML-ben

- Kifejezések és típuskifejezések az SML-ben
  - Az SML-ben a szokásos kifejezések mellett vannak ***típuskifejezések*** is.
  - A függvények ***értékekre***, a típusfüggvények ***típusokra*** alkalmazhatók.
- Függvényjel és típusfüggvényjel helyzete és kötése az SML-ben
  - Függvényjel: *prefix* vagy *infix*.
  - Típusfüggvényjel: *infix* vagy *postfix*.
  - Az *infix* helyzetű függvényjel és típusfüggvényjel (szokásos nevén operátor, ill. típusoperátor) balra vagy jobbra köt, vagy semerre nem köt.
- Típusoperátorok
  - A két infix helyzetű beépített típusoperátor közül a -> jobbra, a $*$ semerre nem köt.
  - A $*$ operátornak magasabb a precedenciája, mint a -> operátornak.
  - A típusoperátoroknak magasabb a precedenciája a többi operátorénál.

# Függvényjel helyzete és kötése az SML-ben

- Tetszőleges kétargumentumú függvényjelet lehet meghatározott preferenciájú (infix helyzetű) operátorként deklarálni az `infix` vagy az `infixr` direktívával.
- Az `infix` balra, az `infixr` jobbra kötő operátort deklarál.
- Egy minősített nevet, vagy egy olyan nevet, amelyet az `op` direktíva előz meg, csak ***prefix*** helyzetben lehet alkalmazni.
- A `nonfix` direktíva az (infix helyzetű) operátort tartósan prefix helyzetűvé alakítja. (Az `op` direktíva csak átmenetileg teszi prefix helyzetűvé.)
- Az $\mathtt{id}_i$ tetszőleges név ($n \geq 1$). A $\boldsymbol{d}$ 0 és 9 közötti számjegy, az operátor precedenciája (opcionális, alapértelmezés szerinti értéke 0). Nagyobb szám nagyobb precedenciát jelent (éppen fordítva, mint a Prologban!).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| `infix` | $<\boldsymbol{d}>$ | $\boldsymbol{id}_1 \ldots \boldsymbol{id}_n$ | balra köt | binds to the left |
| `infixr` | $<\boldsymbol{d}>$ | $\boldsymbol{id}_1 \ldots \boldsymbol{id}_n$ | jobbra köt | binds to the right |
| `nonfix` | | $\boldsymbol{id}_1 \ldots \boldsymbol{id}_n$ | prefix | prefix |

# A beépített operátorok és precedenciájuk az SML-ben

**Az alábbi táblázatban** `wordint`, `num` **és** `numtxt` **az alábbi típusnevek helyett állnak.**

`wordint` = `int`, `word`, `word8`. `num` = `int`, `real`, `word`, `word8`.

`numtxt` = `int`, `real`, `word`, `word8`, `char`, `string`.

| *Prec.* | *Operátor* | *Típus* | *Eredmény* | *Kivétel* |
|---|---|---|---|---|
| 7 | `*` | `num * num -> num` | szorzat | `Overflow` |
| | `/` | `real * real -> real` | hányados | `Div`, `Overflow` |
| | `div`, `mod` | `wordint * wordint -> wordint` | hányados, maradék | `Div`, `Overflow` |
| | `quot`, `rem` | `int * int -> int` | hányados, maradék | `Div`, `Overflow` |
| 6 | `+`, `-` | `num * num -> num` | összeg, különbség | `Overflow` |
| | `^` | `string * string -> string` | egybeírt szöveg | `Size` |
| 5 | `::` | `'a * 'a list -> 'a list` | elemmel bővített lista (jobbra köt) | |
| | `@` | `'a list * 'a list -> 'a list` | összefűzött lista (jobbra köt) | |
| 4 | `=`, `<>` | `''a * ''a -> bool` | egyenlő, nem egyenlő | |
| | `<`, `<=` | `numtxt * numtxt -> bool` | kisebb, kisebb-egyenlő | |
| | `>`, `>=` | `numtxt * numtxt -> bool` | nagyobb, nagyobb-egyenlő | |
| 3 | `:=` | `'a ref * 'a -> unit` | értékadás | |
| | `o` | `('b -> 'c) * ('a -> 'b)`<br>`-> ('a -> 'c)` | a két függvény kompozíciója | |
| 0 | `before` | `'a * 'b -> 'a` | a bal oldali argumentum | |

# SML-szintaxis: nemterminális szimbólumok, nyelvtani jelölések

- Minden nemterminális szimbólumot ***változatok*** sorozataként definiálunk, soronként egy változattal. Üres sor üres változatot jelent.
- A $<$ és a $>$ csúcsos zárójelpárok opcionális kifejezést fognak közre.
- Bármely ***X*** nemterminális szimbólumra az alábbiak szerint definiáljuk az ***Xseq*** nemterminális szimbólumot:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{Xseq}$ | ::= | $\boldsymbol{X}$ | egyelemű sorozat | singleton sequence |
| | | | üres sorozat | empty sequence |
| | | $\boldsymbol{X}_1$ , . . . , $\boldsymbol{X}_n$ | sorozat, $n \geq 1$ | sequence, $n \geq 1$ |

- A változatokat csökkenő prioritási sorrendben soroljuk föl.
- A változatokat számozzuk, a példákban utalunk az alkalmazott változatra.
- A függvényjelek és operátorok általában balra kötnek, az eltérést jelezzük.
- Minden ismétlődő konstrukció (pl. a ***klózsorozat)*** a lehető legmesszebb terjeszkedik jobbra. Ezért pl. egy `case`-kifejezést egy másik `case`- vagy `fn`-kifejezésen, valamint egy `fun`-definíción belül zárójelbe kell tenni.

# SML-szintaxis: kifejezések és klózsorozatok (egyszerűsítve)

- Kifejezés (*exp:* expression)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (1) | *exp* ::= | *infexp* | | |
| (2) | | *exp : ty* | típusmegkötés | type constraint |
| (3) | | `raise` *exp* | kivételjelzés | raise exception |
| (4) | | `case` *exp* `of` *match* | esetszétválasztás | case analysis |
| (5) | | `fn` *match* | függvénykifejezés | function expression |

- Példák:

```
fn (n : int) => n;                                        vö. (2), (5)
case c of 00 => 01 | 01 => 11 | 11 => 10 | 10 => 00;      vö. (4), (19)
fn 00 => 01 | 01 => 11 | 11 => 10 | 10 => 00;             vö. (5), (19)
fn 00 => 01 | 01 => 11 | 11 => 10 | 10 => 00
                                | _ => raise Domain;      vö. (3), (5), (19)
```

# SML-szintaxis: kifejezések és klózsorozatok (folyt.)

- Infix kifejezés (*infexp:* infix expression)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (6) | *infexp* ::= | *appexp* | | |
| (7) | | $infexp_1$ *id* $infexp_2$ | infix alkalmazás | infixed application |

- Applikatív kifejezés (*appexp:* applicative expression)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (8) | *appexp* ::= | *atexp* | | |
| (9) | | *appexp atexp* | (prefix) alkalmazás | (prefixed) application |

- Példák:

`3 + 4;` vö. (7)

`Real.toString 3.56;` vö. (9)

`Int.toString(round 3.56);` vö. (9), (17)

# SML-szintaxis: kifejezések és klózsorozatok (folyt.)

- Atomi kifejezés (*atexp:* atomic expression)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (10) | *atexp* ::= | *scon* | különleges állandó | special constant |
| (11) | | <`op`> *longvid* | értéknév | value identifier |
| (12) | | {<*exprow*>} | rekord | record |
| (13) | | # *lab* | rekordszelektor | record selector |
| (14) | | ( $exp_1$ , $exp_2$ ) | pár | pair |
| (15) | | () | nullas | 0-tuple |
| (16) | | [ $exp_1$ , . . . , $exp_n$ ] | lista, $n \geq 0$ | list, $n \geq 0$ |
| (17) | | ( *exp* ) | kifejezés zárójelben | parenthesized expr. |

- Példák:

| | |
|---|---|
| `1.12`, `#"Z"`, `0w123` | vö. (10) |
| `Math.pi`, `false`, `Math.sin`, `sin` | vö. (11) |
| `#den {num=1, den=2}` | vö. (12), (13), (18) |
| `(2, 3.5)`, `()`, `[1, 2, 3]` | vö. (14), (15), (16) |

# SML-szintaxis: kifejezések és klózsorozatok (folyt.)

- Kifejezéssor (*exprow:* expression row)

(18) *exprow* ::= *lab* = *exp* <, *exprow*>

- Klózsorozat (*match*)

(19) *match* ::= *mrule* <| *match*>

- Klóz (*mrule:* match rule)

(20) *mrule* ::= *pat* => *exp*

- Példák:

`num=1, den=2` vö. (18)

`00 => 01 | 01 => 11 | 11 => 10 | 10 => 00` vö. (19), (20)

# SML-szintaxis: deklarációk és kötések

- Deklaráció (*dec:* declaration)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (20) | *dec* ::= | `val` *tyvarseq valbind* | értékdeklaráció | value declaration |
| (21) | | `fun` *tyvarseq fvalbind* | függvénydeklaráció | function declaration |
| (22) | | `type` *typbind* | típusdeklaráció | type declaration |
| (23) | | | üres deklaráció | empty declaration |
| (24) | | $dec_1$ <;> $dec_2$ | deklaráció-sorozat | sequential declaration |
| (25) | | `infix` <*d*> $id_1 \ldots id_n$ | infix-direktíva, $n \geq 1$ | infix (left) directive |
| (26) | | `infixr` <*d*> $id_1 \ldots id_n$ | infixr-direktíva, $n \geq 1$ | infix (right) directive |
| (27) | | `nonfix` $id_1 \ldots id_n$ | nonfix-direktíva, $n \geq 1$ | nonfix directive |

- Példák:

```
val xy = "XY"; fun ++ x y = x ^ y
```
vö. (20), (21), (24)

```
type Rat = {num : int, den : int}
```
vö. (22)

```
infixr 4 ++; fun x ++ y = x ^ y
```
vö. (21), (26)

# SML-szintaxis: deklarációk és kötések (folyt.)

- Értékkötés (*valbind:* value binding)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (28) | ***valbind*** ::= | ***pat*** = ***exp*** <`and` ***valbind***> | értékkötés | value binding |
| (29) | | `rec` ***valbind*** | rekurzív kötés | recursive binding |

- Függvényérték-kötés (*fvalbind:* function value binding)

(30) ***fvalbind*** ::= <`op`> ***var*** $\boldsymbol{atpat}_{11}$ ... $\boldsymbol{atpat}_{1n}$ <:***ty***> = $\boldsymbol{exp}_1$ | $m, n \geq 1$
| <`op`> ***var*** $\boldsymbol{atpat}_{21}$ ... $\boldsymbol{atpat}_{2n}$ <:***ty***> = $\boldsymbol{exp}_2$
| ...
| <`op`> ***var*** $\boldsymbol{atpat}_{m1}$ ... $\boldsymbol{atpat}_{mn}$ <:***ty***> = $\boldsymbol{exp}_m$
<`and` ***fvalbind***>

***Megjegyzés:*** **Ha *var* infix, akkor egy *fvalbind* definícióban vagy infix helyzetben kell használni, vagy elé kell írni az `op` direktívát; azaz a definícióban a bal oldalon (*atpat var atpat'*) vagy `op` *var* (*atpat*, *atpat'*) írható. A zárójelek elhagyhatók, ha *atpat'* után közvetlenül :*ty* vagy = áll.**

- Példák:

```
val even = fn 0 => true | x => not(odd(x-1))
and odd = fn 0 => false | y => not(even(y-1));   vö. (28)
fun (f o g) x = g(f x);                          vö. (30)
```

# SML-szintaxis: típuskifejezések

- Típus (*ty:* type)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (31) | *ty* ::= | *tyvar* | típusváltozó | type variable |
| (32) | | *tycon* | típuskonstruktor | type constructor |
| (33) | | { <*tyrow*> } | rekordtípus-kifejezés | record type expression |
| (34) | | $ty_1$ * $ty_2$ | pár-típus | pair type |
| (35) | | $ty_1$ -> $ty_2$ | függvénytípus-kifejezés | function type expression |
| (36) | | ( *ty* ) | típus zárójelben | parenthesized type |

- Típuskifejezés-sor (*tyrow:* type-expression row)

(37) *tyrow* ::= *lab* : *ty* <, *tyrow*>

- Példák:

| | |
|---|---|
| `'a, 'c, 'gamma` | vö. (31) |
| `int, real, word, word8, char, bool, string, order` | vö. (32) |
| `int * int -> int, unit -> unit` | vö. (34), (35) |
| `('a -> 'b) -> ('a list -> 'b list)` | vö. (35), (36) |
| `{num : int, den : int}, num : int, den : int` | vö. (33), (37) |

# SML-szintaxis: minták

- Atomi minta (*atpat:* atomic pattern)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (38) | *atpat* ::= | _ | mindenesjel | wildcard |
| (39) | | *scon* | különleges állandó | special constant |
| (40) | | <`op`> *longvid* | értéknév | value identifier |
| (41) | | { <*patrow*> } | rekord | record |
| (42) | | ($pat_1$ * $pat_2$) | pár | pair |
| (43) | | (), {} | nullas | 0-tuple |
| (44) | | [$pat_1$, ..., $pat_n$] | lista, $n \geq 0$ | list, $n \geq 0$ |
| (45) | | ( *pat* ) | minta zárójelben | parenthesized pattern |

- Példák:

```
fun le GREATER = false | le EQUAL = true | le LESS = true;      vö. (40)
fun le GREATER = false | le _ = true;                           vö. (38), (40)
fun neg Bool.false = true | neg (true) = Bool.false;            vö. (40), (45)
fun prod [a, b] = a*b | prod [a, b, c] = a*b*c
  | prod [a] = a | prod () = 1;                                 vö. (43), (44)
```

# SML-szintaxis: minták (folyt.)

- Mintasor (*patrow:* pattern row)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (46) | *patrow* ::= | . . . | mindenesjel | wildcard |
| (47) | | *lab* = *pat* <, *patrow*> | mintasor | pattern row |
| (48) | | *lab* <: *ty*> <, *patrow*> | mezőnév mint változó | label as variable |

- Példák:

```
fun // {den = 0, ...} = raise Domain
  | // {num = n, den = d} = (real n) / (real d);
```
vö. (46), (47)

```
fun // {den = 0, ...} = raise Domain
  | // {num, den} = (real num) / (real den);
```
vö. (46), (48)

# SML-szintaxis: minták (folyt.)

- Minta (*pat:* pattern)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (49) | *pat* ::= | *atpat* | atomi minta | atomic pattern |
| (50) | | <`op`> *longvid* *atpat* | értékkonstrukció | value construction |
| (51) | | $pat_1$ *vid* $pat_2$ | infix értékkonstrukció | infixed value constr. |
| (52) | | *pat* : *ty* | minta típusmegkötéssel | typed pattern |
| (53) | | <`op`> *var* <: *ty*> `as` *pat* | réteges minta | layered pattern |

- Példa:

```
fun sum [] = 0                                          vö. (50)
| sum [a :  real] = a                                   vö. (52)
| sum (x ::  z ::  (yxs as y::xs)) = x + z + sum yxs  vö. (51), (53)
| sum (x ::  y ::  xs) = x + y + sum xs                 vö. (51)
| sum (op::(x, xs)) = x + sum xs                        vö. (50)
```

# SML-szintaxis: szintaktikai korlátozások

- Nem illeszthető minta kétszer ugyanarra a névre *(vid)*. Nem illeszthető kifejezéssor, mintasor vagy típuskifejezés-sor kétszer ugyanarra a mezőnévre *(lab)*.
- Ugyanaz a név nem köthető le kétféleképpen egy *valbind, typbind, datbind* vagy *exbind* deklarációban. A *datbind* deklarációban ugyanez érvényes az adatkonstruktorokra is.
- Ugyanaz a típusváltozó *(tyvar)* nem szerepelhet kétszer egy *tyvarseq* sorozatban valamely *typbind* vagy *datbind* deklaráció bal oldali *tyvarseq tycon* részében. Minden olyan típusváltozónak *(tyvar)*, amelyik előfordul a jobb oldalon, szerepelnie kell *tyvarseq*-ben.
- A `rec`-et követő minden *pat* = *exp* értékkötésben az *exp*-nek, szükség esetén zárójelben, `fn` *match* alakúnak kell lennie, ahol egy vagy több névhez típusmegkötés is társítható.
- `true`, `false`, `nil`, `::` és `ref` nem kaphat értéket *valbind, datbind* vagy *exbind*, `it` pedig *datbind* vagy *exbind* deklarációban.

# RACIONÁLIS SZÁMOK

# Példa: racionális számok

- **A racionális számokat *rekordként* ábrázoljuk; az új (gyenge) típus neve `rat`.**

```
type rat = {num : int, den : int};
```

- **Nevet adunk néhány állandónak.**

```
val ratZero = {num = 0, den = 1}; val ratOne   = {num = 1, den = 1};
val ratHalf = {num = 1, den = 2}; val ratThird = {num = 1, den = 3};
```

- **A `rat` típusú számokat *normalizált* alakban tároljuk, különben pl. $\frac{1}{2}$ és $\frac{2}{4}$ nem lenne egyenlő. A normalizáláshoz szükségünk van a számláló és a nevező legnagyobb közös osztójára (`gcd`). A közös osztó egyik fontos tulajdonsága, hogy $d|n$ és $d|m \Rightarrow d|n \bmod m$.**

```
(* gcd : int -> int -> int
   gcd n m = n és m legnagyobb közös osztója
*)
fun gcd n 0 = abs n
  | gcd n m = gcd (abs m) (abs(n mod m));
```

# Példa: racionális számok (folyt.)

- `gcd` ún. ***részlegesen alkalmazható*** **függvény. Ha összes argumentumánál kevesebbre alkalmazzuk,** ***függvényértéket*** **ad eredményül.**
- **Sajnos, a** `normalize` **függvényben** `n` **és** `m` **legnagyobb közös osztóját kétszer is kiszámoljuk: később látni fogjuk, hogyan javíthatunk a hatékonyságán.**

```
(* normalize : rat -> rat
   normalize r = r normalizált alakban *)
fun normalize {num = n, den = 0} = raise Domain
  | normalize {num = n, den = d} =
                            {num = n div (gcd n d), den = d div (gcd n d)}
```

- **Két egészből** ***konstruktorfüggvénnyel*** **(**`toRat`**) érdemes létrehozni a racionális számot, különben a normalizált tárolás követelménye sérülhet.**

```
(* toRat : int -> int -> rat
   toRat n d = n nevezőjű és d számlálójú racionális szám, normalizált alakban
*)
fun toRat n d = normalize {num = n, den = d};
```

# PÁR ÉS TÍPUSA

# Kitérő: pár és típusa

## Mi a +-szal jelölt összeadás-művelet típusa SML-ben?

- A + kétoperandusú művelet, argumentuma egy ***pár***, pl. `3 + 4`.
- `+ : int * int -> int` vagy `+ : real * real -> real`, ahol `*` egy újabb típusművelet, a ***keresztszorzat*** (***Descartes-szorzat***) jele.
- A + műveleti jel (függvényjel) ***többszörös terhelésű.***
- + prefix helyzetben is használható, ha eléírjuk az `op` kulcsszót, pl. `op+(3, 4)`. Ilyenkor az operandusait ***párként, zárójelbe zárva*** kell megadni.

## A beépített infix típusoperátorok precedenciája és kötése

- Két beépített infix típusoperátor van az SML-ben: `->` (leképzés) és `*` (keresztszorzat). A `*` precedenciája a nagyobb. A `->` jobbra köt, a `*` nem köt sem balra, sem jobbra.
- Példák:
  ```
  'a * 'b * 'c = ('a * 'b) * 'c
  'a -> 'b -> 'c = 'a -> ('b - 'c)
  'a * 'b -> 'c = ('a * 'b) -> 'c
  ```

# RACIONÁLIS SZÁMOK

# Példa: racionális számok – a négy alapművelet

```
(* **, //, ++, -- : rat * rat -> rat
   r1 ** r2 = az r1 és r2 racionális számok szorzata
   r1 // r2 = az r1 és r2 racionális számok hányadosa
   r1 ++ r2 = az r1 és r2 racionális számok összege
   r1 -- r2 = az r1 és r2 racionális számok különbsége
*)
infix 7 ** //; infix 6 ++ --;

fun (r1 : rat) ** (r2 : rat) = toRat (#num r1 * #num r2) (#den r1 * #den r2);

fun (r1 : rat) // (r2 : rat) = toRat (#num r1 * #den r2) (#num r2 * #den r1);

fun {num= n1, den= d1} ++ {num= n2, den= d2} = toRat (n1*d2 + n2*d1) (d1*d2);

fun {num= n1, den= d1} -- {num= n2, den= d2} = toRat (n1*d2 - n2*d1) (d1*d2);
```

# Példa: racionális számok – relációs műveletek

- Az = és a <> relációt ***készen kapjuk:*** két összetett érték strukturálisan összehasonlítható, ha az elemeiken az egyenlőségvizsgálat elvégezhető.

```
(* <<, >>, <<=, >>= : rat * rat -> bool
   r1 << r2 = igaz, ha r1 kisebb r2-nél
   r1 >> r2 = igaz, ha r1 nagyobb r2-nél
   r1 <<= r2 = igaz, ha r1 nem nagyobb r2-nél
   r1 >>= r2 = igaz, ha r2 nem nagyobb r1-nél
*)
infix 4 << >> <<= >>=;

fun (r1 : rat) << (r2 : rat) = #num r1 * #den r2 < #num r2 * #den r1;

fun (r1 : rat) >> (r2 : rat) = #num r1 * #den r2 > #num r2 * #den r1;

fun r1 <<= r2 = not(r1 >> r2);    fun r1 >>= r2 = not(r1 << r2);
```

# POLIMORFIZMUS

# Polimorfizmus

- Nézzük az identitásfüggvényt: `fun id x = x`.
- Mi az `x` típusa? Bármilyen típusú lehet: típusát *típusváltozó* jelöli.

  `> val 'a id = fn : 'a -> 'a`
- `id` *polimorf* függvényt jelöl, `x` és `id` *politípusú* nevek.
- A *percjellel* kezdődő típusnév (pl. `'a`, olvasd *alfa*): *típusváltozó*.

Polimorfizmus többféle változatban fordul elő a programozásban.

- Egy *polimorf név* egyetlen olyan algoritmust azonosít, amely tetszőleges típusú argumentumra alkalmazható; ez a *paraméteres polimorfizmus*.
- Egy *többszörösen terhelt név* több különböző algoritmust azonosít: ahány típusú argumentumra alkalmazható, annyifélét; ez az *ad-hoc* vagy *többszörös terheléses* polimorfizmus.
- A polimorfizmus harmadik változata az *öröklődéses polimorfizmus* (vö. objektum-orientált programozás).

# KÉT FÜGGVÉNY KOMPOZÍCIÓJA

# Kitérő: két függvény kompozíciója

- Az $f \circ g$ függvénykompozíció az SML-ben

```
(* f o g = az f és g függvények kompozíciója
*)
```

`infix 2 o; fun (f o g) = fn x => f(g x);` vagy `fun (f o g) x = f(g x);`

- Az `o` típusa `? * ? -> ?` szerkezetű. Mit írjunk a `?`-ek helyébe? Vezessük le!
  - A függvénydefiníció jobb oldalán álló kifejezés elemzésével kezdjük.

    ```
    x : 'a      g : 'a -> 'b      f : 'b -> 'c
    ```

  - A `fun (f o g) x = f(g x)` függvénydefinícióban az egyenlőségjel (=) bal és jobb oldalán álló kifejezéseknek azonos értéket kell eredményül adniuk, ezért `f o g` és `f` eredményének azonos a típusa (azaz `'c`).

    ```
    (f o g) : 'a -> 'c      o : ('b -> 'c) * ('a -> 'b) -> ('a -> 'c)
    ```

- **Példa:** `round : real -> int,  chr : int -> char`
  `chr o round : real -> char`

# RACIONÁLIS SZÁMOK

# Példa: racionális számok (folyt.)

- **A racionális számokon értelmezett <<= és >>= másképpen:**

```
val op<<= = not o op>>;    val op>>= = not o op<<;
```

- **Egy racionális számot füzérré alakítás után írunk ki a képernyőre.**

```
(* toString : rat -> string
   toString r = az r racionális szám füzérként (számláló/nevező alakban,
                ha a nevező = 1, egyébként egészként)
*)
fun toString {num, den = 1} = Int.toString num
  | toString {num, den}     = Int.toString num ^ "/" ^ Int.toString den
```

- **Példák `rat` típusú értékek használatára**

```
normalize (toRat 15 3);       toString(toRat 2 3 ** toRat 5 4);
normalize (toRat 15 ~3);      toString(toRat 2 3 // toRat 5 3);
normalize (toRat ~15 3);      toString(toRat 1 4 ++ toRat 3 10);
normalize (toRat ~15 ~3);     toString(toRat 3 10 -- toRat 1 4);
```

# Példa: racionális számok (folyt.)

- **Példák `rat` típusú értékek használatára (folyt.)**

```
toRat 2 3 << toRat 5 4;          toRat 2 3  >> toRat 5 3;
toRat 1 4 << toRat 3 10;         toRat 3 10 >> toRat 1 4;
```

```
infix 8 /-/;
fun n /-/ d = toRat n d;

toString(2/-/3 **  5/-/4);          2/-/3  <<   5/-/4;    1/-/4  <<   3/-/10;
toString(2/-/3 //  5/-/3);          2/-/3  <<   2/-/3;    3/-/10 >>   1/-/4;
toString(1/-/4 ++  3/-/10);         2/-/3  <<=  2/-/3;
toString(3/-/10 -- 1/-/4);          2/-/3  >>   5/-/3;    3/-/10 >>=  3/-/10;
```

- **Példák `gcd` részleges alkalmazására**

```
(* gcd120 : int -> int                                     gcd120 45;
  gcd m = m legnagyobb közös osztója 120-szal              gcd120 48;
*)                                                         gcd120 ~96;
val gcd120 = gcd 120;                                      gcd120 630;
```

# POLIMORFIZMUS

# Paraméteres polimorfizmus

- Az identitásfüggvény és típusa: `fun id x = x`,   `id : 'a -> 'a`.

  Az `mosml` válasza: `val 'a id = fn : 'a -> 'a`. Az `id` ***politípusú*** név.

- Az `=` és a `<>` műveletet ***készen kapjuk*** a legtöbb típusra (vö. `rat`).

  A típusuk: `=`, `<> : ''a * ''a -> bool`. A `''` ***egyenlőségi típust*** jelöl, az ilyen típusú értékeken az egyenlőségvizsgálat elvégezhető.

- Az egyenlőségvizsgálat ***korlátozottan*** polimorf: nem minden értékre végezhető el. Pl. egy $f$ és egy $g$ függvény akkor és csak akkor egyenlő, ha $\forall x \cdot fx = gx$. Ezt ***általánosságban*** lehetetlen eldönteni.

- Mi a `<`, `>`, `<=`, `>=` típusa?

  Pl. az `op<=`-re az `mosml` válasza: `val it = fn : int * int -> bool`.

  E négy művelet ***ad-hoc*** módon polimorf, a nevek ***többszörösen terhelhetők***, alapértelmezés szerint `int` típusú értékekre alkalmazhatók.

- Az `=` részlegesen alkalmazható változata legyen: `fun eq x y = x = y`.

  Típusa: `eq : ''a -> ''a -> bool`.

# Példák `eq` használatára (`''a eq : ''a -> ''a -> bool`)

| A kifejezés | Az `mosml` válasza |
|---|---|
| `eq 3 3;` | `> val it = true : bool` |
| `eq "id" "idn";` | `> val it = false : bool` |
| `eq id id;` | `! Toplevel input:` |
| | `! eq id id;` |
| | `!    ^^` |
| | `! Type clash: expression of type` |
| | `!   'e -> 'e` |
| | `! cannot have equality type ''f` |
| `eq 3;` | `> val it = fn : int -> bool` |
| `eq "id";` | `> val it = fn : string -> bool` |
| `val eqStr_id = eq "id";` | `> val eqStr_id = fn : string -> bool` |

- **Az `id` függvény, típusa (`'e -> 'e`) nem egyenlőségi típus!**
- **Az `eq "id"` függvényértéket ad eredményül, ezért az `eqStr_id` függvényt jelöl. Olyan függvényt, amely az `"id"` füzérre alkalmazva `true`, minden más esetben `false` értéket ad eredményül.**

# Példák `id` használatára (`'a id : 'a -> 'a`)

| A kifejezés | Az `mosml` válasza |
|---|---|
| `id 3;` | `> val it = 3 : int` |
| `id "id";` | `> val it = "id" : string` |
| `id round;` | `> val it = fn : real -> int` |
| `id id;` | `! Warning: Value polymorphism:` |
| | `! Free type variable(s) at top level in value identifier it` |
| | `> val it = fn : 'b -> 'b` |
| `id id 6.9;` | `> val it = 6.9 : real` |
| `fn x => id id x;` | `> val 'b it = fn : 'b -> 'b` |

- Az SML ún. ***érték-polimorfizmust*** használ.
  - Az SML a típusváltozókat, ahol csak tudja, általánosítja (pl. `fn x => id id x`).
  - Az `mosml` a nem általánosítható típusváltozókat meghagyja ***szabad típusváltozónak*** (pl. `id id`).

# Érték-polimorfizmus

- Tekintsük a `val x = e` deklarációt.
  - Az SML az `x` típusában előforduló szabad típusváltozókat akkor általánosítja, ha `e` ún. *nem-expanzív* kifejezés.
  - Ez csupán *szintaktikai* követelmény: egy kifejezés *nem-expanzív*, ha megfelel a *nexp* szintaktikai kategóriát leíró nyelvtani szabályoknak.

# Nem-expanzív kifejezés (egyszerűsítve)

- Nem-expanzív kifejezés (*nexp:* non-expansive expression)

| | | | |
|---|---|---|---|
| *nexp* ::= | *scon* | különleges állandó | special constant |
| | *longvid* | (esetleg minősített) értéknév | (possibly qualified) value identifier |
| | { <*nexprow*> } | nem-expanzív elemekből álló rekord | record of non-expansive expressions |
| | ( *nexp* ) | nem-expanzív kifejezés zárójelben | parenthesized non-expansive expression |
| | *nexp* : *ty* | nem-expanzív kifejezés típusmegkötéssel | typed non-expansive expression |
| | `fn` *match* | függvénykifejezés | function expression |

- Nem-expanzív kifejezéssor (*nexprow:* non-expansive expression row)

*nexprow* ::= *lab* = *nexp* <, *nexprow*>

# Példák nem-expanzív és expanzív kifejezésekre

- Egy nem-expanzív kifejezés egyszerűen: érték (azaz tovább nem egyszerűsíthető, ún. *kanonikus* kifejezés).

```
  val x = length;
> val 'a x = fn : 'a list -> int
```

  `length` egy név, ezért nem-expanzív. Az `x` típusát leíró `'a list -> int` típuskifejezésben az `'a` szabad típusváltozó általánosítható, ezt tükrözi a definíció bal oldalán az `'a x`.

- Az `(fn f => f) length` kifejezés értéke is `length`, de expanzív, mert nem vezethető le a fenti nyelvtani szabályok alapján.

```
  val x = (fn f => f) length;
! Warning: Value polymorphism:
! Free type variable(s) at top level in value identifier x
> val x = fn : 'a list -> int
```

# Példák nem-expanzív és expanzív kifejezésekre (folyt.)

Az `'a` típusváltozót az SML nem általánosítja. Az `mosml` meghagyja szabad típusváltozónak, és majd csak az `x` ***első alkalmazásakor*** köti le.

```
  x ["abc", "def"];
! Warning: the free type variable 'a has been instantiated to string
> val it = 2 : int
  x;
> val it = fn : string list -> int
```

- Ha már az `'a`-t lekötöttük, más típushoz nem köthető; `x` nem politípusú név.

```
  x [123, 456, 789];
! Toplevel input:
!   x [123, 456, 789];
!      ^^^
! Type clash: expression of type
!   int
! cannot have type
!   string
```

# $\eta$-expanzió

- A típusváltozó általánosítása mindig kikényszeríthető a deklaráció jobb oldalának ***$\eta$-expanziójával.***

  Az $\eta$-expanzió az `e` kifejezést a nem-expanzív `fn y => e y` kifejezéssel helyettesíti.

```
  val x1 = fn y => ((fn f => f) length) y;
> val 'b x1 = fn : 'b list -> int
```

  A fenti deklarációban a külső zárójelpár el is hagyható:

```
  val x1 = fn y => (fn f => f) length y;
```

- Az `x1` politípusú név.

```
  x1 ["abc", "def"];
> val it = 2 : int
  x1 [123, 456, 789];
> val it = 3 : int
```

# LISTÁK

# Lista: definíciók, konstruktorok

- Definíciók

  1. A *lista* azonos típusú elemek véges (de nem korlátos!) sorozata.
  2. A lista olyan *rekurzív* lineáris adatszerkezet, amely azonos típusú elemekből áll, és
     - vagy üres,
     - vagy egy elemből és az elemet követő listából áll.

- Konstruktorok

  - Az üres lista jele a `nil` *konstruktorállandó*. `nil` típusa `'a list`.
  - A `::` *konstruktoroperátor* új listát hoz létre egy elemből és egy (esetleg üres) listából (infix, 5-ös precedenciájú, jobbra köt, típusa `'a * 'a list -> 'a list`).
  - A `nil` helyett általában a `[]` jelet használjuk (szintaktikai édesítőszer).
  - A `::`-ot négyespontnak vagy *cons*-nak olvassuk (vö. *constructor*, ami a függvény hagyományos neve a $\lambda$-kalkulusban és egyes funkcionális nyelvekben).

# Lista: jelölések, minták

- Példák
  - Lista létrehozása konstruktorokkal

```
[]            nil            #"" :: nil
3 :: 5 :: 9 :: nil     = 3 :: (5 :: (9 :: nil))
```

  - Szintaktikus édesítőszer lista jelölésére

```
[3, 5, 9]              =  3 :: 5 :: 9 :: nil
```

  - Vigyázat! A Prolog listajelölése hasonló, de vannak lényeges különbségek:

| SML | Prolog | | SML | Prolog | |
|---|---|---|---|---|---|
| `[]` | `[]` | azonos | `(x::xs)` | `[X\|Xs]` | különböző |
| `[1,2,3]` | `[1,2,3]` | azonos | `(x::y::z::zs)` | `[X,Y,Z\|Zs]` | különböző |

- Minták

  A `[]` és a `nil` állandók, a `::` operátor, valamint a `[x1, x2, ..., xn]` listajelölés mintában is alkalmazhatók.

# Lista: fej (`hd`), farok (`tl`)

- A nem-üres lista első eleme a lista *feje*.

```
(* hd : 'a list -> 'a *)
fun hd (x :: _) = x;
```

- A nem-üres lista első utáni elemeiből áll a lista *farka*.

```
(* tl : 'a list -> 'a list *)
fun tl (_ :: xs) = xs;
```

- `hd` és `tl` *parciális* függvények. Ha könyvtárbeli megfelelőiket (`List.hd`, `List.tl`) üres listára alkalmazzuk, `Empty` néven *kivételt* jeleznek.

  Fontos: a parciális függvények nem tévesztendők össze a parciálisan (azaz részlegesen) alkalmazható függvényekkel!

# Lista: hossz (`length`), elemek összege (`isum`), szorzata (`rprod`)

- **Egy lista hosszát adja eredményül a már látott `length` függvény (l. `List.length`).**

```
(* length : 'a list -> int *)
fun length (_ :: xs) = 1 + length xs
  | length []        = 0;
```

- **Egy egész számokból álló lista elemeinek összegét adja eredményül `isum`.**

```
(* isum : int list -> int *)
fun isum (x :: xs) = x + isum xs
  | isum []        = 0;
```

- **Egy valós számokból álló lista elemeinek szorzatát adja eredményül `rprod`.**

```
(* rprod : real list -> real *)
fun rprod (x :: xs) = x * rprod xs
  | rprod []        = 1.0;
```

# Példák: `hd`, `tl`, `length`, `isum`, `rprod`

- `hd`, `tl`

| A kifejezés | Az `mosml` válasza |
|---|---|
| `List.hd [1, 2, 3];` | `> val it = 1 : int` |
| `List.hd [];` | `! Uncaught exception:` |
| | `! Empty` |
| `List.tl [1, 2, 3];` | `> val it = [2, 3] : int list` |
| `List.tl [];` | `! Uncaught exception:` |
| | `! Empty` |

- `length`, `isum`, `rprod`

| A kifejezés | Az `mosml` válasza |
|---|---|
| `length [1, 2, 3, 4];` | `> val it = 4 : int` |
| `length [];` | `> val it = 0 : int` |
| `isum [1, 2, 3, 4];` | `> val it = 10 : int` |
| `isum [];` | `> val it = 0 : int` |
| `rprod [1.0, 2.0, 3.0, 4.0];` | `> val it = 24.0 : real` |
| `rprod [];` | `> val it = 1.0 : real` |

# Lista: adott transzformáció alkalmazása minden elemre (`map`)

- **Példa: vonjunk négyzetgyököt egy valós számokból álló lista minden eleméből!**

  `map Math.sqrt [1.0, 4.0, 9.0, 16.0] = [1.0, 2.0, 3.0, 4.0]`
- **Általában:** `map f [`$x_1$`, `$x_2$`, ..., `$x_n$`] = [f `$x_1$`, f `$x_2$`, ..., f `$x_n$`]`
- **A függvény típusa:** `map : ('a -> 'b) -> 'a list -> 'b list`
- **Egy-egy klózt írunk a triviális és a nem-triviális eset lefedésére**
  - `map f [] = []`
  - `map f (x :: xs) = f x :: map f xs`

  ```
  fun map f (x :: xs) = f x :: map f xs | map f [] = [];
  ```
- `map` **típusa, ha egyargumentumú függvénynek tekintjük (ui.** `->` **jobbra köt):**

  `map : ('a -> 'b) -> ('a list -> 'b list).`

  **Azaz ha** `map`**-et egy** `'a -> 'b` **típusú függvényre alkalmazzuk, akkor olyan függvényt ad eredményül, amelyet egy** `'a list` **típusú listára alkalmazva egy** `'b list` **típusú listát kapunk.**

# PROGRAMHELYESSÉG

# A program helyességének igazolása a `map` példáján

- A rekurzív programról be kell látnunk, hogy
  - funkcionálisan helyes (azt kapjuk eredményül, amit várunk),
  - a kiértékelése biztosan befejeződik (nem esik „végtelen ciklusba").
- Bizonyítása hossz szerinti ***strukturális indukcióval*** (amely visszavezethető a teljes indukcióra) lehetséges.

```
fun map f (x :: xs) = f x :: map f xs | map f [] = [];
```

  - Feltesszük, hogy a `map` jó eredményt ad az eggyel rövidebb listára (azaz a lista farkára). Alkalmazzuk az `f`-et a lista első elemére (a fejére). A fej transzformálásával kapott eredményt a farok transzformálásával kapott lista elé fűzve valóban a várt eredményt kapjuk.
  - A kiértekelés véges számú lépésben befejeződik, mert a lista véges, a `map` függvényt a ***rekurzív ágban*** minden lépésben egyre rövidülő listára alkalmazzuk, és gondoskodtunk a rekurzió leállításáról (a ***triviális eset*** kezeléséről, ui. van nem rekurzív ág).

# LISTÁK

# Lista: adott predikátumot kielégítő elemek kiválogatása (`filter`)

- **Kitérő:** `explode`, `implode`
  - `explode : string -> char list`, **pl.** `explode "abc" = [#"a", #"b", #"c"]`
  - `implode : char list -> string`, **pl.** `implode [#"a", #"b", #"c"] = "abc"`
- **Példa: gyűjtsük ki a kisbetűket egy karakterlistából!**

```
List.filter Char.isLower (explode "VaLtOgAtVa") =
                                   [#"a", #"t", #"g", #"t", #"a"]
```

- **Általában: ha** `p` $x_1$ `= true`, `p` $x_2$ `= false`, `p` $x_3$ `= true`, $\ldots$, `p` $x_n$ `= true`, **akkor** `filter p [`$x_1$`,` $x_2$`,` $x_3$`, ...,` $x_n$`] = [`$x_1$`,` $x_3$`, ...,` $x_n$`]`.
- **A függvény típusa:** `filter : ('a -> bool) -> 'a list -> 'a list`
- **Egy-egy klózt írunk a triviális és a nem-triviális eset lefedésére**
  - `filter p [] = []`
  - `filter p (x :: xs) = if p x then x :: filter p xs else filter p xs`

# Lista: `filter` (folyt.)

- Ezzel `filter` definíciója

```
fun filter p (x :: xs) =
      if p x then x :: filter p xs else filter p xs
  | filter _ [] = [];
```

- `filter` típusa, ha egyargumentumú függvénynek tekintjük (`->` jobbra köt!):

  `filter : ('a -> bool) -> ('a list -> 'a list).`

  Azaz ha `filter`-t egy `'a -> bool` típusú függvényre (predikátumra) alkalmazzuk, akkor olyan függvényt ad eredményül, amelyet egy `'a list` típusú listára alkalmazva egy `'a list` típusú listát kapunk.

# Lista redukciója kétoperandusú művelettel (`foldr`, `foldl`)

- **Vissza-visszatérő feladat egy lista redukciója kétoperandusú művelettel. Közös, hogy $n$ db értékből egyetlen értéket kell előállítani (vö. *redukció*).**
- `foldr` **jobbról balra,** `foldl` **balról jobbra haladva egy kétoperandusú műveletet (pontosabban egy *párra alkalmazható, prefix pozíciójú függvényt*) alkalmaz egy listára. Példák szorzat és összeg kiszámítására:**

```
foldr op* 1.0 [] = 1.0;                         foldl op+ 0 [] = 0;
foldr op* 1.0 [4.0] = 4.0;                      foldl op+ 0 [4] = 4;
foldr op* 1.0 [1.0, 2.0, 3.0, 4.0] = 24.0; foldl op+ 0 [1, 2, 3, 4] = 10;
```

- **Jelöljön $\oplus$ tetszőleges kétoperandusú infix operátort. Akkor**

  foldr op$\oplus$ e [$x_1$, $x_2$, ..., $x_n$] = ($x_1$ $\oplus$ ($x_2$ $\oplus$ ... $\oplus$ ($x_n$ $\oplus$ e) ...))

  foldr op$\oplus$ e [] = e

  foldl op$\oplus$ e [$x_1$, $x_2$, ..., $x_n$] = ($x_n$ $\oplus$ ... $\oplus$ ($x_2$ $\oplus$ ($x_1$ $\oplus$ e)) ...)

  foldl op$\oplus$ e [] = e

- **Asszociatív műveleteknél** `foldr` **és** `foldl` **eredménye azonos.**

# Példák `foldr` és `foldl` alkalmazására

- A $\oplus$ művelet `e` operandusa néhány gyakori műveletben – összeadás, szorzás, konjunkció (logikai „és”), alternáció (logikai „vagy”) – a (jobb oldali) ***egységelem*** szerepét tölti be.
- `isum` egy egészlista elemeinek összegét, `rprod` egy valóslista elemeinek szorzatát adja eredményül.

```
val isum = foldr op+ 0;              val rprod = foldr op+ 1.0;
val isum = foldl op+ 0;              val rprod = foldl op+ 1.0;
```

- A `length` függvény is definiálható `foldl` vagy `foldr` felhasználásával. Kétoperandusú műveletként olyan segédfüggvényt (`inc`) alkalmazunk, amelyik ***nem használja*** az első paraméterét.

```
(* inc : 'a * int -> int             (* lengthl, lengthr : 'a list -> int *)
   inc (_, n) = n + 1 *)             val lengthl = fn ls => foldl inc 0 ls;
fun inc (_, n) = n + 1;              fun lengthr ls = foldr inc 0 ls;

lengthl (explode "tengertanc");      lengthr (explode "hajdu sogor");
```

# Példák `foldr` és `foldl` alkalmazására (folyt.)

- **Egy lista elemeit egy másik lista elé fűzi `foldr` és `foldl`, ha kétoperandusú műveletként a *cons* konstruktorfüggvényt – azaz az `op::`-ot – alkalmazzuk.**

  `foldr op:: ys` $[x_1, x_2, x_3]$ `=` $(x_1$ `::` $(x_2$ `::` $(x_3$ `:: ys)))`

  `foldl op:: ys` $[x_1, x_2, x_3]$ `=` $(x_3$ `::` $(x_2$ `::` $(x_1$ `:: ys)))`

- **A `::` nem asszociatív, ezért `foldl` és `foldr` eredménye különböző!**

```
(* append : 'a list -> 'a list -> 'a list
   append xs ys = az xs ys elé fűzésével előálló lista *)
fun append xs ys = foldr op:: ys xs;

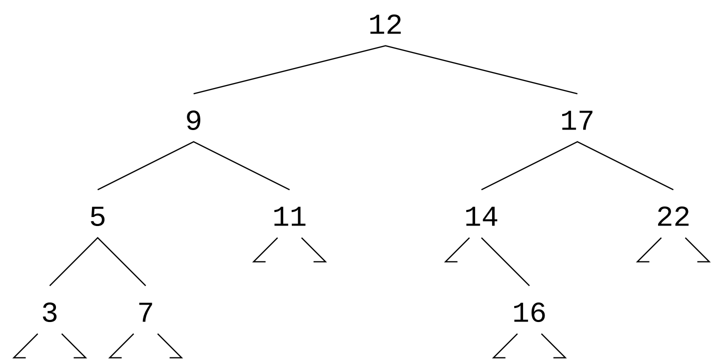
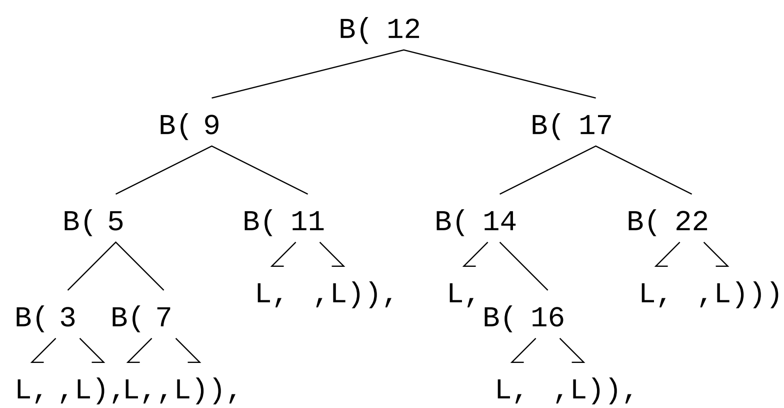
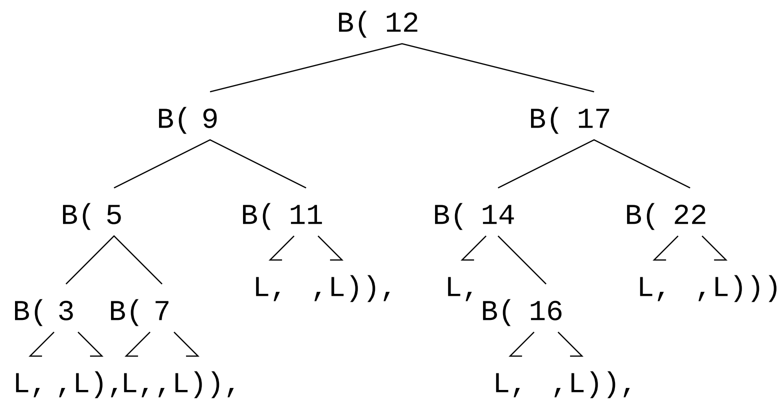
(* revApp : 'a list -> 'a list -> 'a list
   revApp xs ys = a megfordított xs ys elé fűzésével előálló lista *)
fun revApp xs ys = foldl op:: ys xs;
```

`append [1, 2, 3] [4, 5, 6] = [1, 2, 3, 4, 5, 6];` **(vö. Prolog:** `append`**)**

`revApp [1, 2, 3] [4, 5, 6] = [3, 2, 1, 4, 5, 6];` **(vö. Prolog:** `revapp`**)**

# Lista: `foldr` és `foldl` definíciója

- foldr op$\oplus$ e [$x_1$, $x_2$, ..., $x_n$] = ($x_1$ $\oplus$ ($x_2$ $\oplus$ ... $\oplus$ ($x_n$ $\oplus$ e) ...))

  foldr op$\oplus$ e [] = e

```
(* foldr f e xs = az xs elemeire jobbról balra haladva alkalmazott,
                  kétoperandusú, e egységelemű f művelet eredménye
   foldr : ('a * 'b -> 'b) -> 'b -> 'a list -> 'b *)
fun foldr f e (x::xs) = f(x, foldr f e xs)
  | foldr f e [] = e;
```

- foldl op$\oplus$ e [$x_1$, $x_2$, ..., $x_n$] = ($x_n$ $\oplus$ ... $\oplus$ ($x_2$ $\oplus$ ($x_1$ $\oplus$ e)) ...)

  foldl op$\oplus$ e [] = e

```
(* foldl f e xs = az xs elemeire balról jobbra haladva alkalmazott,
                  kétoperandusú, e egységelemű f művelet eredménye
   foldl : ('a * 'b -> 'b) -> 'b -> 'a list -> 'b *)
fun foldl f e (x::xs) = foldl f (f(x, e)) xs
  | foldl f e [] = e;
```

# Lista redukciója bal oldali egységelemű függvénnyel (foldL)

- **A kivonás művelete balra köt:** $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = ((x_1 - x_2) - x_3) - x_4$.
- **Nem feleltethető meg sem** `foldr`**-nek, sem** `foldl`**-nek.**

  foldr op$\oplus$ e [$x_1$, $x_2$, ..., $x_n$] = ($x_1$ $\oplus$ ($x_2$ $\oplus$ ... $\oplus$ ($x_n$ $\oplus$ e) ...))

  foldl op$\oplus$ e [$x_1$, $x_2$, ..., $x_n$] = ($x_n$ $\oplus$ ... $\oplus$ ($x_2$ $\oplus$ ($x_1$ $\oplus$ e)) ...)
- **Nevezzük** `foldL`**-nek a listában** ***balról jobbra*** **haladó, alábbi specifikációjú függvényt. Vegyük észre, hogy $\oplus$ bal oldali egységelemet vár.**

  foldL op$\oplus$ e [$x_1$, $x_2$, ..., $x_n$] = ( ... ((e $\oplus$ $x_1$) $\oplus$ $x_2$) $\oplus$ ... $\oplus$ $x_n$)
- `foldL` **olyan kétargumentumú függvényt vár, amelynek az „egységelem" (valójában: a részeredmény) az** ***első*** **argumentuma:** `f : 'a * 'b -> 'a`.

```
(* foldL : ('a * 'b -> 'a) -> 'a -> 'b list -> 'a
   foldL f e xs = az xs elemeire balról jobbra haladva alkalmazott,
                  kétoperandusú, e egységelemű f művelet eredménye *)
fun foldL f e (x::xs) = foldL f (f(e, x)) xs
  | foldL f e [] = e;
```

# Példák listaelemek különbségének és hányadosának képzésére

- Az `e` argumentum aktuális értéke a sorozat *első* eleme – a ***kisebbítendő***, ill. az ***osztandó***.

```
foldL op- 20 [] = 20;                 foldL (op div) 180  [] = 180;
foldL op- 20 [5, 6, 7] =              foldL (op div) 180  [2, 3, 5] =
         (((20 - 5) - 6) - 7);                 (((180 div 2) div 3) div 5);
```

- Ha többször használjuk e műveleteket, érdemes nekik nevet adni. A kisebbítendő, ill. az osztandó speciális kezelését elrejtjük.

```
fun subtract ns = foldL op- (hd ns) (tl ns);
subtract [20, 5, 6, 7] = (((20 - 5) - 6) - 7);

fun divide ns = foldL op div (hd ns) (tl ns);
divide [180, 2, 3, 5] = (((180 div 2) div 3) div 5);
```

# Listaelemek különbsége és hányadosa `foldl`-lel és `foldr`-rel

- Igazság szerint `foldL` felesleges: a feladat jól megoldható `foldl`-lel vagy `foldr`-rel is.

```
fun subtract1 ns = hd ns - foldl op+ 0 (tl ns);
subtract1 [20, 5, 6, 7] = (((20 - 5) - 6) - 7);

fun divide1 ns = hd ns div foldl op* 1 (tl ns);
divide1 [180, 2, 3, 5] = (((180 div 2) div 3) div 5);
```

- `foldr` és `foldl` típusa, ha egyparaméteres függvénynek tekintjük őket (a `->` jobbra köt!):

```
foldr, foldl : ('a * 'b -> 'b) -> ( 'b -> 'a list -> 'b)
```

Azaz ha `foldr`-t vagy `foldl`-t egy `'a -> * 'b -> 'b` típusú függvényre alkalmazzuk, akkor olyan függvényt ad eredményül, amelyet egy `'b` típusú egységelemre és egy `'a list` típusú listára alkalmazva `'b` típusú (redukált) értéket kapunk.

# KIFEJEZÉSEK KIÉRTÉKELÉSE

# Mohó kiértékelés: faktoriális kiszámítása naív rekurzióval

- A faktoriális matematikai definíciója és megvalósítása SML-ben

  **fac** $0 = 1$ **fac** $n = n * $ **fac** $(n-1)$

```
(* fac : int -> int       (-- fontos a klózok sorrendje! --)
   fac n = n!
   PRE n >= 0 *)
fun fac 0 = 1 | fac n = n * fac(n-1);
```

- `fac` mohó kiértékelése $n = 4$ esetén (egyes triviális lépéseket elhagyunk).

  `fac 4` → `4 * fac (4-1)` → `4 * fac 3` → `4 * (3 * fac (3-1))` →
  → `4 * (3 * fac (2))` → ··· → `4 * (3 * (2 * (1 * 1)))` → ··· → `24`

- A rekurzív kiértékelés követi a matematikai definíciót.
- Rontja a hatékonyságot, hogy a rekurzív végrehajtás során minden részeredményt a veremben tárolni kell.
- Ha a szorzás asszociativitását kihasználjuk, nem kell tárolni az összes tényezőt, csak az aktuális részeredményt.

# Faktoriális kiszámítása jobbrekurzióval

- Először egy *akkumulátort* (gyűjtőargumentumot) használó *segédfüggvényt* definiálunk. Vegyük észre, hogy a rekurzív hívás *jobbrekurzív:* eredménye közvetlenül, további műveletek elvégzése nélkül adja a végeredményt.

```
(* faci : int -> int -> int    (-- fontos a klózok sorrendje! --)
   faci n p = p * n!           (-- p az akkumulátor --)
*)
fun faci 0 p = p
  | faci n p = faci (n-1) (n*p);
```

- `faci`-t felhasználjuk az egyparaméteres `fac` függvény definiálására. Az akkumulátornak alkalmas *kezdőértéket* adunk.

```
(* fac : int -> int
   fac n = n!
   PRE n >= 0
*)
fun fac n = faci n 1;
```

# Faktoriális kiszámítása jobbrekurzióval (folyt.)

- `fac` nem rekurzív, ezért csak `faci` kiértékelését vizsgáljuk (egyes triviális lépéseket összevonunk).

  A függvény: `fun faci 0 p = p | faci n p = faci (n-1) (n*p)`

  `faci 4 1` → `faci (4-1) (4*1)` → `faci 3 4` → `faci (3-1) (3*4)` →
  → `faci 2 12` → ··· → `faci 0 24` → `24`

- Kiértékelés közben a `p` ***akkumulátor*** gyűjti a részeredményt, ezért `faci` tárigénye állandó.
- A kiértékelés *iteratív*.
- A jó fordítóprogram felismeri a jobbrekurziót, és hatékony tárgykódot állít elő: az argumentumokat frissíthető lokális változókban tárolja, a rekurziót iterációval helyettesíti.
- A jobbrekurziót ***terminális rekurziónak*** is nevezik (angolul: ***tail*** vagy ***terminal*** recursion).
- `foldl` jobbrekurzív, `e` argumentuma akkumulátorként viselkedik.

# Lokális kifejezés

- *Lokális kifejezést* használunk, ha ismétlődő részkifejezéseket *csak egyszer* akarunk kiszámítani, vagy akkor, ha bizonyos értékeket a program többi része elől *el akarunk rejteni*.
- Szintaxisa: `let` *d* `in` *e* `end`, ahol
  - *d* nemüres deklarációsorozat,
  - *e* nemüres kifejezés.
- Példa:

```
fun fac n =
  let
      fun faci 0 p = p
        | faci n p = faci (n-1) (n*p)
  in
      faci n 1
  end
```

# Lokális deklaráció

- ***Lokális deklarációt*** használunk olyan értékek bevezetésére, amelyeket a program többi része elől ***el akarunk rejteni.***
- Szintaxisa: `local` *d1* `in` *d2* `end`, ahol
  - *d1* és *d2* nemüres deklarációsorozatok.
- Példa:

```
local
    fun faci 0 p = p
      | faci n p = faci (n-1) (n*p)
in
    fun fac n = faci n 1
end
```

# LOGIKAI MŰVELETEK

# Logikai műveletek

- Típusnév: `bool`, adatkonstruktorok: `false`, `true`, beépített függvény: `not`.
- ***Lusta kiértékelésű*** beépített operátorok
  - Három argumentumú: `if b then e1 else e2`.
    Nem értékeli ki az `e2`-t, ha a `b` igaz, ill. az `e1`-et, ha a `b` hamis.
  - Két argumentumúak:
    `e1 andalso e2` : nem értékeli ki az `e2`-t, ha az `e1` hamis.
    `e1 orelse e2` : nem értékeli ki az `e2`-t, ha az `e1` igaz.
- Mind a három csupán szintaktikai édesítőszer!
  - `if b then e1 else e2` ≡ `(fn true => e1 | false => e2) b`
  - `e1 andalso e2` ≡ `(fn true => e2 | false => false) e1`
  - `e1 orelse e2` ≡ `(fn true => true | false => e2) e1`
  - `fun ifThenElse b = (fn true => e1 | false => e2) b; ifThenElse true;`
- Tipikus hiba: `if` *exp* `then true else false` !!!

# Logikai műveletek (folyt.)

- Nyilvánvaló: `andalso` és `orelse` kifejezhető `if-then-else`-szel is.
  - `if e1 then e2 else false` ≡ `e1 andalso e2`
  - `if e1 then true else e2` ≡ `e1 orelse e2`
- Használjuk az `andalso`-t és az `orelse`-t az `if-then-else` helyett, ahol csak lehet: olvashatóbb lesz a program.
- Lusta kiértékelésű függvényt a programozó nem definiálhat az SML-ben. Az SML, mielőtt egy függvényt alkalmazna az (egyszerű vagy összetett) argumentumára, kiértékeli.
- Az `andalso` és az `orelse` ***mohó kiértékelésű*** megfelelői:

```
(* && (a, b) = a /\ b
   && : bool * bool -> bool
*)
fun op&& (a, b) = a andalso b;
infix 2 &&;
```

```
(* || (a, b) = a \/ b
   || : bool * bool -> bool
*)
fun op|| (a, b) = a orelse b;
infix 1 ||;
```

# LISTÁK

# Listák összefűzése és megfordítása

- **Listák összefűzése és megfordítása beépített függvényekkel:** `@`, `rev` **és** `revAppend` (`List` **könyvtár).**
  - `@` **a** `fun append (xs, ys) = foldr op:: ys xs` **beépített megfelelője: infix, 5-ös precedenciájú, jobbra köt, típusa** `'a list * 'a list -> 'a list`.
  - `revAppend` **a** `fun revApp (xs, ys) = foldl op:: ys xs` **beépített megfelelője: prefix, típusa** `'a list * 'a list -> 'a list`.
  - `rev` **a** `fun rev xs = foldl op:: [] xs` **beépített megfelelője: prefix, típusa** `'a list -> 'a list` **(vö.** `revApp`**).**
- **Az** $[m, n)$ **tartományba eső egészek listája: a kézenfekvő megoldás**

```
(* upto m n = az [m, n) tartományba eső egészek listája
   upto : int -> int -> int list *)
fun upto m n =  if m < n then m :: upto (m+1) n else [];
```

# Listák összefűzése és megfordítása

- Az $[m, n)$ tartományba eső egészek listája: jobbrekurzív megoldás

```
fun upto m n =
      let (* az up számára az n állandó érték,
             ezért nem kell argumentumként átadni *)
          fun up zs m = if m < n then up (m::zs) (m+1) else rev zs
      in  up [] m
      end;
```

- Az $[m, n)$ tartományba eső egészek listája: hatékony jobbrekurzív megoldás

```
fun upto m n =
      let (* hátulról visszafelé haladva építjük föl a listát,
             ezért a végén nem kell megfordítani *)
          fun up zs n = if m < n  then up (n-1::zs) (n-1) else zs
      in up [] n
      end;
```

# Lista legnagyobb elemének megkeresése

- Egy egészlista legnagyobb elemének kiválasztásához szükségünk van az `Int.max` függvényre.
  - Üres listának nincs legnagyobb eleme,
  - egyelemű listában az egyetlen elem a legnagyobb,
  - legalább kételemű lista legnagyobb elemét úgy kapjuk, hogy az első elem és a maradéklista elemeinek legnagyobbika közül kiválasztjuk a legnagyobbat.

```
(* maxl ns = az ns egészlista legnagyobb eleme
   maxl : int list -> int *)
fun maxl [n] = n
  | maxl (n::ns) = Int.max(n, maxl ns)
  | maxl [] = raise Empty;
```

- `max` egy változata egészekre

```
fun max (n, m) = if n > m then n else m
```

# Lista legnagyobb elemének megkeresése (folyt.)

- Hogyan tehető polimorffá a `maxl` függvényt? Magasabbrendű, ún. `generikus` függvényként definiáljuk: ***argumentumként*** kapja azt a többszörösen terhelhető függvényt, amely két érték közül a nagyobbikat kiválasztja.

```
(* maxl max ns = az ns lista legnagyobb eleme
   maxl : ('a * 'a -> 'a) -> 'a list -> 'a *)
fun maxl max [n] = n
  | maxl max (n::ns) = max(n, maxl max ns)
  | maxl max [] = raise Empty;
```

- `max` mindig ugyanaz, mégis újra és újra átadjuk argumentumként a rekurzív ágban. Javítja a hatékonyságot, ha ***lokális kifejezést*** használunk. (Lokális deklaráció használata most nem segítene. Miért nem?)

```
fun maxl max ns = let fun mxl [n] = n
                            | mxl (n::ns) = max(n, mxl ns)
                            | mxl [] = raise Empty
                  in mxl ns end;
```

# Lista (folyt.)

- Változatok `max`-ra

```
(* charMax : char * char -> char *)
fun charMax (n, m) = if ord n > ord m then n else m;

(* pairMax : ((int * real) * (int * real)) -> (int * real)
fun pairMax (n as (n1 : int, n2 : real), m as (m1, m2)) =
      if n1 > m1 orelse n1 = m1 andalso n2 >= m2 then n else m;
```

- `concat xss` = az `xss`-beli listákat egy listába fűzi. Könyvtári változata: `List.concat`.

```
(*  concat : 'a list list -> 'a list *)
fun concat xss = foldr op@ [] xss;
```

- `ListPair.zip` két lista páronkénti elemeiből álló párok listáját, `ListPair.unzip` párok listájából két listát ad eredményül.

# Adott számú elem egy lista elejéről és végéről (take, drop)

- **Legyen** $xs = [x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}]$**, akkor** `take(xs, i)` $= [x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}]$ **és** `drop(xs, i)` $= [x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}]$.

```
(* take (xs, i) = xs, ha i < 0;
      az xs első i db eleméből álló lista, ha i >= 0
   take : 'a list * int -> 'a list *)
fun take (_, 0)     = []
  | take ([], _)    = []
  | take (x::xs, i) = x :: take(xs, i-1);

(* drop(xs, i) = xs, ha i < 0;
      az xs első i db elemének elhagyásával előálló lista, ha i >= 0
   drop : 'a list * int -> 'a list *)
fun drop ([], _)    = []
  | drop (x::xs, i) = if i > 0 then drop (xs, i-1) else x::xs;
```

- **Könyvtári változatuk,** `List.take` **és** `List.drop` $i < 0$ **vagy** $i >$ `length xs` **esetén** `Subscript` **kivételt jelez.**

# Halmazműveletek

- `isMem` igaz értéket ad eredményül, ha a keresett elem benne van a listában.

```
(* isMem(x, ys) = x eleme-e ys-nek
   isMem : ''a * ''a list -> bool *)
fun isMem (x, y::ys) = x = y orelse isMem (x, ys)
  | isMem (_, []) = false;
infix isMem;
```

- `newMem` egy új elemet rak be egy listába, ha még nincs benne.

```
(* newMem(x, xs) = [x] és xs listaként ábrázolt uniója
   newMem : ''a * ''a list -> ''a list *)
fun newMem (x, xs) = if x isMem xs then xs else x::xs;
```

`newMem`, ha a sorrendtől eltekintünk, halmazt hoz létre.

# Halmazműveletek (folyt.)

- `setof` halmazt készít egy listából úgy, hogy kiszedi belőle az ismétlődő elemeket. Rossz hatékonyságú.

```
(* setof xs = xs elemeinek listaként ábrázolt halmaza
   setof : ''a list -> ''a list *)
fun setof (x::xs) = newMem (x, setof xs)
  | setof []      = [];
```

- Szerencsésebb a halmazokat a megszokott halmazműveletekkel kezelni. Öt halmazműveletet definiálunk:
  - **unió** (`union`, $S \cup T$),
  - **metszet** (`inter`, $S \cap T$),
  - **részhalmaza-e** (`isSubset`, $T \subseteq S$),
  - **egyenlők-e** (`isSetEq`, $S = T$),
  - **hatványhalmaz** (`powerset`, $pS$).

# Halmazműveletek (folyt.)

- Listaként kezeljük a halmazokat, később hatékonyabb ábrázolást választhatunk, pl. rendezett listát vagy bináris fát.
- Két halmaz uniója

```
(* union(xs, ys) = az xs és ys elemeiből álló halmazok uniója
   union : ''a list * ''a list -> ''a list *)
fun union (x::xs, ys) = newMem(x, union(xs, ys))
  | union ([], ys)    = ys;
```

- Két halmaz metszete

```
(* inter(xs, ys) = az xs és ys elemeiből álló halmazok metszete
   inter : ''a list * ''a list -> ''a list *)
fun inter (x::xs, ys) = let val zs = inter(xs, ys)
                        in if x isMem ys then x::zs else zs
                        end
  | inter ([], _)     = [];
```

# Halmazműveletek (folyt.)

- Részhalmaza-e egy halmaz egy másiknak?

```
(* isSubset (xs, ys) = az xs elemeiből álló halmaz részhalmaza-e
                       az ys elemeiből álló halmaznak
   isSubset : ''a list * ''a list -> bool *)
fun isSubset (x::xs, ys) = (x isMem ys) andalso isSubset(xs, ys)
  | isSubset ([], _)     = true;
infix isSubset;
```

- Két halmaz egyenlősége

  A listák egyenlőségvizsgálata beépített művelet az SML-ben. Halmazokra mégsem használható, mert pl. `[3, 4]` és `[4, 3, 4]` listaként ugyan különböznek, de halmazként egyenlők.

```
(* isSetEq(xs, ys) = az xs és ys elemeiből álló halmazok egyenlők-e
   isSetEq : ''a list * ''a list -> bool *)
fun isSetEq (xs, ys) = (xs isSubset ys) andalso (ys isSubset xs);
```

# Halmazműveletek (folyt.)

- Halmaz hatványhalmaza

  A hatványhalmaz egy halmaz ***összes*** részhalmazának a halmaza, az eredeti halmazt és az üres halmazt is beleértve.

  Jelöljük $S$-sel az eredeti halmazt. $S$ hatványhalmazát úgy állíthatjuk elő, hogy $S$-ből kiveszünk egy $x$ elemet, és azután ***rekurzív módon*** előállítjuk az $S-\{x\}$ hatványhalmazát.

  Ha tetszőleges $T$ halmazra $T \subseteq S-\{x\}$, akkor $T \subseteq S$ és $T \cup \{x\} \subseteq S$, így mind $T$, mind $T \cup \{x\}$ eleme $S$ hatványhalmazának.

  A `pws` függvényben a `base` argumentum gyűjti a hatványhalmaz elemeit; kezdetben üresnek kell lennie.

```
(* pws(xs, base) = az xs halmaz hatványhalmazának és
                   a base halmaznak az uniója
   pws : 'a list * 'a list -> 'a list list *)
fun pws (x::xs, base) = pws(xs, base) @ pws(xs, x::base)
  | pws ([], base) = [base];
```

# Halmazműveletek (folyt.)

- **Halmaz hatványhalmaza (folyt.)**

  **A `pws(xs, base) @ pws(xs, x::base)` kifejezésben `pws(xs, base)` valósítja meg az $S - \{x\}$ rekurzív hívást (hiszen `x::xs` felel meg $S$-nek), azaz állítja elő az összes olyan halmazt, amelyekben `x` nincs benne.**

  **`pws(xs, x::base)` ugyancsak rekurzív módon `base`-ben gyűjti az `x` elemeket, vagyis előállítja az összes olyan halmazt, amelyben `x` benne van.**

```
(* powerset xs = az xs halmaz hatványhalmaza
   powerset : 'a list -> 'a list list *)
fun powerset xs = pws(xs, []);
```

# KIFEJEZÉSEK KIÉRTÉKELÉSE

# Sztatikus és dinamikus kötés, mohó és lusta kiértékelés

- ***Sztatikus kötés:*** a formális paraméter összes előfordulását ***fordítási időben*** helyettesítjük az argumentummal (aktuális paraméterrel) a függvény (eljárás) törzsében.
- ***Dinamikus kötés:*** a formális paraméter összes előfordulását ***futási időben*** helyettesítjük az argumentummal (aktuális paraméterrel) a függvény (eljárás) törzsében.

  Kérdés, hogy az aktuális paraméterként átadott kifejezést az értelmező mikor értékeli ki: a behelyettesítés ***előtt*** vagy ***után***.
- ***Mohó kiértékelés:*** a behelyettesítés ***előtt*** kiértékeljük az ***összes*** argumentumot (más megnevezések: ***érték szerinti*** paraméterátadás, ***eager evaluation, call-by-value).***
- ***Lusta kiértékelés:*** a behelyettesítés ***után*** csak azt az argumentumot értékeljük ki, amelyikre szükség van, és csak akkor, amikor ***szükség van*** rá (más megnevezések: ***szükség szerinti*** paraméterátadás, ***lazy evaluation, call-by-need.)***

# A mohó és a lusta kiértékelés összevetése

- Más paraméterátadási eljárások
  - *név szerinti* paraméterátadás *(call-by-name*, Algol).
  - *hivatkozás szerinti* paraméterátadás *(call-by-reference*, Pascal, C stb.)
- Nézzünk két egyszerű függvényt!

```
(* sq : int -> int             (* zero : int -> int
   sq x = x négyzete *)           zero x = az x-től függetlenül mindig 0 *)
fun sq x = x * x;              fun zero x = 0;
```

Az `sq` függvény argumentumát *lusta kiértékelés* esetén *kétszer* számítjuk ki.

A `zero` függvény argumentumát *mohó kiértékelés* esetén *feleslegesen* számítjuk ki, mert nem használjuk semmire.

# Mohó kiértékelés

- **Emlékeztető: az $f\,e$ értékét úgy számítjuk ki, hogy először az $f$ függvényértéket adó kifejezés, majd az $e$ kifejezés értékét határozzuk meg, és ezután helyettesítjük az $f$ törzsében a formális paraméter minden előfordulását az $e$ értékével.**

```
fun sq x = x * x;            fun zero x = 0;
```

- **Nézzük `sq(sq(sq 2))` egyszerűsítését! (Az egyszerűsítés eredménye tovább már nem egyszerűsíthető, ún. *kanonikus* kifejezés.)**

  **`sq` három alkalmazásából csak a harmadiknak kanonikus kifejezés az argumentuma.**

  `sq(sq(sq 2))` → `sq(sq(2*2))` → `sq(sq 4)` → `sq(4*4)` → `sq 16` → `16*16` → `256`

  **Az utolsó lépés kivételével `zero(sq(sq(sq 2)))` egyszerűsítési lépései ugyanezek, pedig az eredmény nyilvánvalóan 0!**

  **Mohó kiértékelés mellett a számítógépet feleslegesen dolgoztatjuk!**

# Név szerinti paraméterátadás

- Egy függvény alkalmazása előtt sokszor nemcsak fölösleges, hanem káros is előre kiszámítani az argumentumokat, mert végtelen rekurzió vagy illegális művelet (indexhatár-túllépés, 0-val való osztás stb.) lehet az „eredménye”.
- Az Algol *név szerinti* paraméterátadása a formális paraméter összes előfordulását az argumentumként átadott *teljes* (nem kanonikus) *kifejezéssel* helyettesíti a függvény törzsében.

  Ezért `zero(sq(sq(sq 2)))` *név szerinti* paraméterátadás esetén *azonnal*, az argumentum kiértékelése nélkül 0-t ad eredményül!

  ```
  fun sq x = x * x;            fun zero x = 0;
  ```

  A *név szerinti* paraméterátadás sem mindig kedvező: pl. `sq(sq(sq 2))` esetén `sq` mindegyik alkalmazása *megkétszerezi* az argumentumok számát. Aligha ezt akarjuk!

  ```
  sq(sq(sq 2)) → sq(sq 2) * sq(sq 2) → (sq 2 * sq 2) * sq(sq 2) →
  ((2*2) * sq 2) * sq(sq 2) → ··· → (4*(2*2) * sq(sq 2)) → ···
  ```

# Lusta kiértékelés

- ***Lusta kiértékelés*** esetén minden argumentumot csak egyszer kell kiértékelni: akkor, amikor ***először*** van rá szükség. Az argumentum összes elôfordulását egy ***rejtett hivatkozással*** helyettesítjük (mivel ***el van rejtve*** a programozó elöl, biztonságos): amikor a számítógép az argumentumot először kiértékeli, a kapott értéket elrakja, és később az összes olyan helyen, ahol szükség lesz rá, felhasználja.
- A függvényeket és argumentumaikat ***irányított gráffal*** ábrázolják: a gráf egy részének kiértékelésekor a gráfot az eredményül kapott értékkel frissítik a számítógépben (ezért nevezik ***gráfredukciónak***).

  A lusta kiértékeléshez bonyolult nyilvántartást kell vezetni (időigényes!).
- A lusta kiértékelés működési elvének megértéséhez irányított gráf helyett most $x = [E]$ -vel jelöljük, hogy az $x$ ***összes előfordulása*** osztozik az $E$ értéken.

# Lusta kiértékelés

- **Nézzük pl. `sq(sq(sq 2))` lusta kiértékelését!**

  ```
  fun sq x = x * x;            fun zero x = 0;
  ```

  **($x = [E]$ jelentése: az $x$ *összes előfordulása* osztozik az $E$ értéken.)**

  `sq(sq(sq 2))` → `x * x` *[x = sq(sq 2)]* → `x * x` *[x = y * y] [y = sq 2]* →
  `x * x` *[x = y * y] [y = 2 * 2]* → `x * x` *[x = y * y] [y = 4]* →
  `x * x` *[x = 4 * 4]* → `x * x` *[x = 16]* → `16 * 16` → `256`

- **Gyakran nyerünk, de néha vesztünk a lusta kiértékeléssel.**

  **Láttuk, hogy `fun faci(0, p) = p | faci(n, p) = faci(n-1, n*p)` *mohó kiértékelés* esetén hatékonyabb `fac`-nál, mert az `n*p` szorzást azonnal végrehajtja. *Lusta kiértékelés* esetén az `n`-et azonnal kiszámítaná (szükség van `n` értékére az implicit `n = 0` vizsgálathoz), a `p` kiértékelését azonban a szorzások akkumulálásával késleltetné:**

  `faci(4, 1)` → `faci(4-1, 4*1)` → `faci(3-1, 3*(4*1))` →
  `faci(2-1, 2*(3*(4*1)))` ⋯ → `24`

# Összetett adattípusok

# Ennes és típusa

- Két különböző típusú értékből rekordot vagy párt képezhetünk. Pl.
  `{x = 2, y = 1.0} : {x : int, y : real}` és `(2, 1.0) : (int * real)`.
- A pár is csak szintaktikai édesítőszer. Pl.
  `(2, 1.0) = {1 = 2, 2 = 1.0} = {2 = 1.0, 1 = 2}`, de `(2, 1.0)` és `{1 = 1.0, 2 = 2}` különböző típusúak. Az `1` és a `2` ***mezőnevek*** (vö. szintaxis).
- Rekordot kettőnél több értékből is összeállíthatunk. Pl.
  `{nev= "Bea", tel= 3192144, kor= 19} : {kor :int, nev :string, tel :int}`.
  Egy hasonló rekord egészszám-mezőnevekkel:
  `{1 = "Bea", 3 = 3192144, 2 = 19}:  {1 : string, 2 : int, 3 : int`.
  Az ***utóbbi*** azonos az alábbi ***ennessel*** (n-es, n-tuple):
  `("Bea", 19, 3192144) : (string * int * int)`,
  azaz `(string * int * int)` $\equiv$ `{1 = string, 2 = int, 3 = int}`.
- Egy rekordban a tagok sorrendje közömbös, az értékeket a mezőnév azonosítja.

# Ennes és típusa (folyt.)

- Egy ennesben a tagok sorrendje meghatározó! Pl. `(2, 1.0) : (int * real)`, de `(1.0, 2) : (real * int)`. A két ennes különböző!
- Ennes lehet függvény argumentuma és eredménye, összetett adat eleme stb. Példa: Fibonacci-számok iterációval.

  A definíció: $F_0 = 0; F_1 = 1; F_n = F_{n-2} + F_{n-1}, n > 1.$

```
(* iterfib(n, (prev, curr)) = a (prev, curr) Fibonacci-számpárt követő
                              n-edik Fibonacci-szám (n > 0)
   iterfib : int * (int * int) -> int *)
fun iterfib (1, (prev, curr)) = curr
  | iterfib (n, (prev, curr)) = iterfib(n - 1, (curr, prev + curr));

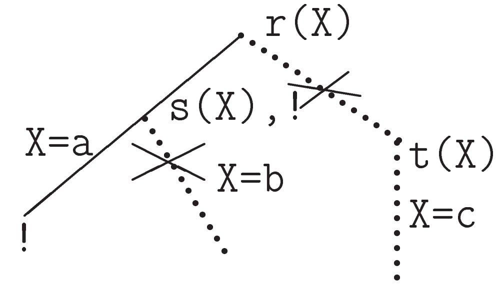
(* fib n = az n-edik Fibonacci-szám
   fib : int -> int *)
fun fib 0 = 0
  | fib n = iterfib(n, (0, 1));
```

# FELHASZNÁLÓI ADATTÍPUSOK

# A `datatype` deklaráció

- `person` **néven új összetett típust hozunk létre:**

```
datatype person = King
                | Peer of string * string * int
                | Knight of string
                | Peasant of string;
```

- **Az új típusnak négy *adatkonstruktora* (röviden: *konstruktora)* van:** `King`, `Peer`, `Knight` **és** `Peasant`.
- `King` **ún. *adatkonstruktorállandó*, a többi ún. *adatkonstruktorfüggvény*.**
- **Az adatkonstruktoroknak is van típusuk:**

```
King :    person
Peer :    string * string * int -> person
Knight :  string -> person
Peasant : string -> person
```

# A `datatype` deklaráció (folyt.)

- `King` (király) csak egy van, ezért definiálhattuk konstruktorállandóként.
- A `Peer`-t (főnemest) nemesi címe (`string`), birtokának neve (`string`) és sorszáma (`int`) azonosítja.
- A `Knight`-ot (lovagot) és a `Peasant`-ot (parasztot) csupán a neve (`string`) azonosítja.
- Példa a `person` adattípus alkalmazására:

```
- val persons = [King, Peasant "Jack Cade", Knight "Gawain",
                 Peer("Duke", "Norfolk", 9)];
> val persons = [King, Peasant "Jack Cade", ...] : person list
```

- Az egyes esetek mintaillesztéssel választhatók szét.
- Minden esetet le kell fedni mintával; ha nem, figyelmeztetést kapunk.
- A minták tetszőlegesen összetettek lehetnek.

# A `datatype` deklaráció (folyt.)

- Az alábbi példában a négy közül az egyik a `Peasant name` *minta*, és benne `name` a *mintaazonosító*.

```
(* title p = p megszólítása
   title : person -> string *)
fun title King = "His Majesty the King "
  | title (Peer (deg, ter, _)) = "The " ^ deg ^ " of " ^ ter
  | title (Knight name) = "Sir " ^ name
  | title (Peasant name) = name;
```

- A `sirs` függvény az összes `Knight` nevét összegyűjti a `person` típusú személyek egy listájából (a változatok sorrendje *fontos* az `_` miatt!):

```
(* sirs ps = az összes Knight nevének listája
   sirs : person list -> string list *)
fun sirs [] = []
  | sirs ((Knight s)::ps) = s::sirs ps
  | sirs (_::ps) = sirs ps;
```

# A `datatype` deklaráció (folyt.)

- Ha más lenne a változatok sorrendje, a `_::ps` minta nemcsak a `King`-re, a `Peer`-re és a `Peasant`-ra illeszkedne (ti. ezek helyett áll a példában), hanem a `Knight`-ra is.
- Az összes diszjunkt eset fölsorolása segíti az algoritmus helyességének belátását, bizonyítását.
- Azért vontunk össze három esetet egyetlen változatban, mert a részletezésük hosszabbá tenné a program szövegét is, végrehajtását is.
- A bizonyítás nem okoz gondot, ha a függvény harmadik sorát (`sirs (_::ps) = sirs ps`) *feltételes egyenletnek* tekintjük:

```
sirs(p::ps) = sirs ps if ∀s·p≠Knight s.
```

# A `datatype` deklaráció (folyt.)

- A sorrend még fontosabb a következő példában, amelyben személyek hierarchiáját vizsgáljuk. Itt 16 helyett csak 7 esetet kell megkülönböztetnünk: azokat, amelyek *igaz* eredményt adnak.

```
(* superior (p, r)= igaz, ha p magasabb rangú r-nél
   superior : person * person -> bool *)
fun superior (King, Peer _) = true
  | superior (King, Knight _) = true
  | superior (King, Peasant _) = true
  | superior (Peer _, Knight _) = true
  | superior (Peer _, Peasant _) = true
  | superior (Knight _, Peasant _) = true
  | superior _ = false;
```

# A felsorolásos típus `datatype` deklarációval

- Gyakori, hogy egy név csak néhány különböző értéket vehet fel (azaz a név által felvehető értékek halmaza kis számosságú), ilyen esetben érdemes ***felsorolásos típust*** létrehozni a `datatype` deklarációval. Pl.

```
datatype degree = Duke | Marquis | Earl | Viscount | Baron;
```

- A felsorolásos típusnak csak ***konstruktorállandói*** vannak. Az új típus alkalmazásához a `person` típust újra deklarálnunk kell:

```
datatype person = King
                | Pear of degree * string * int
                | Knight of string
                | Peasant of string;
```

# A felsorolásos típus `datatype` deklarációval (folyt.)

- A `degree` típusú adatok feldolgozásakor külön-külön elemezzük az előforduló eseteket, pl.

```
(* lady p = p főnemes hitvesének rangja
   lady : degree -> string *)
fun lady Duke     = "Duchess "
  | lady Marquis  = "Marchioness"
  | lady Earl     = "Countess"
  | lady Viscount = "Viscountess"
  | lady Baron    = "Baroness";
```

- A belső `bool` típushoz hasonló `Bool` típust és hozzá a `Not` függvényt például így is deklarálhatnánk, ill. definiálhatnánk:

```
datatype Bool = True | False;
(* Not b = b negáltja
   Not : Bool -> Bool *)
fun Not True = False | Not False = True;
```

# Polimorf adattípusok

- **Láttuk, hogy a `list` *postfix* pozíciójú *típusoperátor*, nem típus: a `datatype` deklaráció az adatkonstruktorok mellett *típuskonstruktort* is létrehoz.**
- **A belső `'a list` típushoz hasonló `'a List` listát és vele együtt a `Nil` és a `Cons` *adatkonstruktorokat* például így definiálhatjuk:**

```
datatype 'a List = Nil | Cons of 'a * 'a List;
```

- **A `Cons` *adatkonstruktorfüggvény* alkalmazásával elég körülményes a listák létrehozása. Az 1, 2, 3, 4 sorozatot például így kell megadni:**

```
Cons(1, Cons(2, Cons(3, Cons(4, Nil))));
```

- **Bevezethetjük az *infix* pozíciójú `:::` *adatkonstruktoroperátort:***

```
infix 5 ::: ; val op ::: = Cons;
```

- **A *hatospontot* közvetlenül a típusdeklarációban is definiálhatjuk:**

```
infix 5 ::: ; datatype 'a List = Nil | ::: of 'a * 'a List;
```

# Polimorf adattípusok: megkülönböztetett egyesítés

- Következő példánk két típus *megkülönböztetett egyesítése*, más néven diszjunkt uniója:

```
datatype ('a, 'b) disun = In1 of 'a | In2 of 'b;
```

- Itt három dolgot definiáltunk:
  1. a kétargumentumú `disun` típusoperátort,
  2. az `In1 : 'a -> ('a, 'b) disun` és
  3. az `In2 : 'b -> ('a, 'b) disun` adatkonstruktorfüggvényeket.
- `('a, 'b) disun` az `'a` és `'b` típusok megkülönböztetett egyesítése. *Megkülönböztetettnek* nevezzük az egyesítést, mert később is bármikor meg tudjuk mondani, hogy egy `('a, 'b) disun` típusú pár egyik vagy másik eleme melyik alaptípusból származik. Az új típusba tartozó értékek `In1 x` alakúak, ha `x` `'a` típusú, és `In2 y` alakúak, ha `y` `'b` típusú.
- Az `In1` és `In2` konstruktorfüggvények olyan *címkének* tekinthetők, amelyek az `'a` típust megkülönböztetik a `'b` típustól.

# Megkülönböztetett egyesítés (folyt.)

- A megkülönböztetett egyesítés lehetővé teszi, hogy különböző típusokat használjunk ott, ahol egyébként csak egyetlen típust használhatnánk (vö. objektum-orientált programozás, ahol pl. egy *alakzat* osztálynak *téglalap*, *háromszög* vagy *kör* nevű leszármazottai lehetnek).
- Az SML-ben megkülönböztetett egyesítéssel tudunk létrehozni *különböző típusú elemekből* álló listát:

```
[In2 King, In1 "Skócia"] : ((string, person) disun) list
[In1 "zsarnok", In2 1040] : ((string, int) disun) list
```

- A lehetséges eseteket most is *mintaillesztéssel* elemezhetjük, pl.

```
(* concat d = a d diszjunkt unió In1 címkéjű elemeinek konkatenációja
   concat : (string, 'a) disun list -> string *)
fun concat [] = ""
  | concat (In1 s :: ls) = s ^ concat ls
  | concat (In2 _ :: ls) = concat ls;
```

# Megkülönböztetett egyesítés (folyt.)

- Egy példa `concat` alkalmazására:

```
- concat [In1 "Ó! ", In2 King, In1 "Skócia"];
> val it = "Ó! Skócia : string
```

- Az `In1` konstruktorfüggvény típusa `'a -> ('a, 'b) disun`, ezért a `string` típusú `"Ó!"` argumentumra alkalmazva `(string, 'b) disun` típusú érték az eredmény.
- Az `In2` konstruktorfüggvény típusa `'b -> ('a, 'b) disun`, ezért a `person` típusú `King` kifejezésre alkalmazva `('a, person) disun` típusú érték az eredmény.
- Az `[In1 "Ó!", In2 King, In1 "Skócia"]` kifejezésben mindkét alaptípust lekötjük, ezért ennek a listának a típusa: `((string, person) disun) list`.
- Az `[In2 "Ó", In2 King, In1 "Skócia"]` kifejezés kiértékelése hibajelzést eredményez, mert a `'b` típusváltozót nem lehet ugyanabban a kifejezésben egyszer így, másszor úgy lekötni.

# BINÁRIS FÁK

# Bináris fák datatype deklarációval

- **A listához hasonlóan rekurzív adatszerkezet a *fa*.**
- **Először olyan bináris fát deklarálunk, amelynek a levelei üresek, a csomópontjaiban pedig előbb a bal részfát, majd az `'a` típusú értéket, és végül a jobb részfát adjuk meg:**

```
datatype 'a tree = L | B of 'a tree * 'a * 'a tree;
```

- **Tekintsük például az alábbi fát:**




- **Az `'a tree` adattípus `L` és `B` adatkonstruktoraival ez a fa pl. a következő lapon látható módon írható le.**

# Bináris fák `datatype` deklarációval (folyt.)

```
B(B(B(B(L,3,L),
      5,
      B(L,7,L)
     ),
    9,
    B(L,11,L)
   ),
  12,
  B(B(L,
      14,
      B(L,16,L)
     ),
    17,
    B(L,22,L)
   )
 );
```

**A bal oldali kifejezést elég nehéz átlátni. A fastruktúra szöveges leírását megkönnyíti, ha az ábrába beírjuk a megfelelő adatkonstruktorokat.**



# Bináris fák `datatype` deklarációval (folyt.)

- **A fastruktúra szöveges leírása átláthatóbb, ha az egyes részfáknak nevet adunk, és a részfákból építjük fel a teljes fát:**




```
val tr3  = B(L,3,L);          val tr7  = B(L,7,L);
val tr5  = B(tr3,5,tr7);      val tr11 = B(L,11,L);
val tr9  = B(tr5,9,tr11);     val tr16 = B(L,16,L);
val tr14 = B(L,14,tr16);      val tr22 = B(L,22,L);
val tr17 = B(tr14,17,tr22);   val tr12 = B(tr9,12,tr17);
```

# Bináris fák `datatype` deklarációval (folyt.)

- Másféle fastruktúrákat is deklarálhatunk, pl.
  - kezdhetjük az `'a` típusú értékkel, majd folytathatjuk előbb a bal, azután a jobb részfa megadásával,
  - felhasználhatjuk a levelet is értékek tárolására,
  - az értéket nem tároló üres csonkokat pedig `E`-vel jelölhetjük.
- A leírtak szerinti bináris fát hoz létre a következő deklaráció:

```
datatype 'a tree = E | L of 'a | B of 'a * 'a tree * 'a tree;
```

- A rekurzív függvényekhez hasonlóan a rekurzív adattípusok deklarációjában is kell lennie nemrekurzív ágnak (ún. triviális esetnek).
- A nemrekurzív ág hiánya miatt az alábbi, szintaktikailag helyes deklarációk használhatatlanok:

```
datatype 'a badtree = B of 'a badtree * 'a * 'a badtree;
datatype 'a badtree = L of 'a badtree | B of 'a badtree * 'a * 'a badtree;
```

# Egyszerű műveletek bináris fákon

- `nodes` egy fa csomópontjait számlálja meg. Legyen

```
datatype 'a tree = L | N of 'a * 'a tree * 'a tree;
```

```
(* nodes f = az f fa csomópontjainak a száma
   nodes : 'a tree -> int *)
fun nodes (N(_, t1, t2)) = 1 + nodes t2 + nodes t1
  | nodes L = 0;
```

- `nodes` akkumulátort használó változata (`nodesa`):

```
fun nodesa f =
      let (* nodes0(f, n) = n + a csomópontok száma f-ben
             nodes0 : 'a tree * int -> int *)
          fun nodes0 (N(_, t1, t2), n) = nodes0(t1, nodes0(t2, n+1))
            | nodes0 (L, n) = n
      in  nodes0(f, 0)
      end;
```

# Egyszerű műveletek bináris fákon (folyt.)

- A fa gyökeréből a leveléhez vezető úton az élek számát (az út hosszát) az adott levél szintjének is nevezzük. A szintek közül a legnagyobbat a fa ***mélységének*** hívjuk.
- `depth` egy fa mélységét határozza meg.

```
(* depth f = az f fa mélysége
   depth : 'a tree -> int *)
fun depth  (N(_, t1, t2)) = 1 + Int.max(depth t2, depth t1)
  | depth L = 0;
```

- `depth` akkumulátort használó változata (`deptha`):

```
fun deptha f = let fun depth0 (N(_, t1, t2), d) =
                         Int.max(depth0(t1, d+1), depth0(t2, d+1))
                     | depth0 (L, d) = d
              in
                 depth0(f, 0)
              end;
```

# SML-Prolog átvezetés: párhuzamok a két nyelv között

| *SML* | *Prolog* |
|---|---|
| <pre>fun append ([], ys) = ys<br>  \| append (x::xs, ys) =<br>                x::append (xs, ys)</pre> | <pre>append([], L, L).<br>append([X\|L1], L2, [X\|L3]) :-<br>        append(L1, L2, L3).</pre> |
| *SML „Prologosítva”* | *Prolog „SML-esítve”* |
| <pre>fun append([], L) = L<br>  \| append(X::L1, L2) =<br>    let val L3 = append(L1, L2)<br>    in  X::L3 end</pre> | <pre>append([], L, Res) :- Res = L.<br>append([X\|L1], L2, Res) :-<br>        append(L1, L2, L3),<br>        Res = [X\|L3].</pre> |
| **függvény** | **predikátum** |
| **klóz** | **klóz (lazább a kapcsolat a pred.-mal)** |
| **változó: egyetlen, ismert érték** | **változó: egy, esetleg ismeretlen érték** |
| **egyirányú mintaillesztés** | **kétirányú mintaillesztés** |
| **egyértelmű klózválasztás** | **többértelmű klózválasztás** |
| **egy eredmény** | **több eredmény (nemdeterminizmus)** |
| **egyirányú használat** | **többirányú használat<br>(pl. összerakó és szétszedő `append`)** |
| **adatkonstruktor-függvény** | **struktúra (rekord)** |
| **egymásba ágyazott függvényhívások** | **konjunkció, segéd-változóval** |

# SML-Prolog átvezetés: további példák

| *SML* | *Prolog* |
|---|---|
| `fun append xs ys = foldr op:: ys xs` | `/* Prologban kevésbé használtak`<br>`   a magasabbrendű eljárások */` |
| `fun fakt 0 = 1`<br>`  \| fakt n = n * fakt (n-1)` | `fakt(0, 1).`<br>`fakt(N, F) :-`<br>`    N>0, N1 is N-1,`<br>`    fakt(N1, F1), F is N*F1.` |
| **típusos nyelv** | **típustalan nyelv** |
| **magasabbrendű függvény** | **rekurzió, ritkábban magasabbr. pred.** |
| **rekurzió** | **visszalépéses ciklus**<br>**(pl. két lista közös eleme)** |
| **kivétel**<br>**(pl.** `fakt` **negatív számmal)** | **meghiúsulás, kivétel** |

# Összefoglalás: Prolog programok szemantikája

- Prolog program jelentése = milyen válaszokat (behelyettesítéseket) kapunk egy cél futtatásakor:
  - Procedurális szemantika — az ismertetett végrehajtási, egyesítési algoritmus.
  - Deklaratív szemantika:
    - program: logikai állítások (klózok, azaz implikációk) halmaza;
    - egy cél futási eredménye: olyan behelyettesítés, amelyre a cél ***következménye*** a programnak.
- A Prolog procedurális szemantika csak olyan választ ad, amely a deklaratív szemantika szerint is helyes! (Ha predikátumaink „igazak”, akkor rossz eredményt nem kaphatunk, csak végtelen ciklust. `:-(` )

# Ismétlés: A Prolog végrehajtási mechanizmus, dióhéjban

- (Kezdet:) Ha célsorozat üres $\rightarrow$ sikeres lefutás.
- (Folytatás:) Keresünk az ***első*** céllal egyesíthető klózfejet (a klózból friss másolatot képezve, felülről lefelé haladva a programbeli klózokon ).
- Ha van ilyen:
  - Ha van esély további illesztésre, akkor választási pontot hozunk létre: a futás jelenlegi állapotát (célsorozat + hányadik klózzal illesztettünk) megjegyezzük, azaz a veremre rakjuk.
  - Az egyesítéshez szükséges behelyettesítéseket a klóztörzsön és a célsorozaton is elvégezzük.
  - Az első cél helyébe a klóztörzset rakjuk, ez lesz az új célsorozat, majd vissza a (Kezdet)-hez.
- Ha nincs illeszthető klózfej, akkor visszalépünk a ***legutolsó*** választási pontnak megfelelő állapotba (azt leemelve a verem tetejéről), és új egyesíthető fejű klóz keresésével folytatjuk a (Folytatás)-nál.

# Ismétlés: A Prolog egyesítési algoritmus, dióhéjban

- Legáltalánosabb egyesítő behelyettesítés meghatározása
  - Azonos változók ill. konstansok behelyettesítés nélkül egyesíthetőek.
  - Változó minden más kifejezéssel egyesíthető, triviális behelyettesítéssel (tartalmazás-vizsgálat nélkül)
  - Két összetett kifejezés egyesíthető, ha funktoraik azonosak, és az argumentumaik sorra egyesíthetőek, úgy, hogy a megelőző argumentumok egyesítéséhez szükséges behelyettesítéseket már elvégeztük. Az argumentumok egyesítését biztosító behelyettesítések kompozíciója a legáltalánosabb egyesítő.
  - Minden más esetben a két kifejezés nem egyesíthető, az egyesítési algoritmus meghiúsul.

# 4. fejezet: Prolog programozási módszerek

- **Az előző előadás-blokk (jegyzetbeli 3. fejezet) célja volt:**
  - **a Prolog nyelv alapjainak bemutatása,**
  - **a logikailag „tiszta” résznyelvre koncentrálva.**
- **A jelen előadás-blokk (jegyzetben a 4. fejezet) célja: olyan**
  - **beépített eljárások,**
  - **programozási technikák**

  **bemutatása, amelyekkel**
  - **hatékony Prolog programok készíthetők,**
  - **esetleg a tiszta logikán túlmutató eszközök alkalmazásával.**

# Prolog programozási módszerek: tartalomjegyzék

- A keresési tér szűkítése
- Vezérlési eljárások
- Determinizmus és indexelés
- Jobbrekurzió és akkumulátorok
- Algoritmusok Prologban
- Megoldások gyűjtése és felsorolása
- Megoldásgyűjtő eljárások
- Meta-logikai eljárások
- Modularitás
- Magasabbrendű eljárások
- Dinamikus adatbáziskezelés
- „Hagyományos” beépített eljárások
- Nyelvtani elemzés

# A KERESÉSI TÉR SZŰKÍTÉSE

# Prolog nyelvi eszközök a keresési tér szűkítésére

## Eszközök

- a vágó beépített eljárás: `!`
- feltételes diszjunktív szerkezet:
  `( felt -> akkor ; egyébként )`

## Miért vágunk le ágakat a keresési térben?

- mert mi tudjuk, hogy ott nincs megoldás, de a Prolog megvalósítás nem — zöld vágás, szemantikailag „ártalmatlan”
  - (Például, a legtöbb Prolog megvalósítás „nem tudja”, hogy a $X = 0$ és $X > 0$ feltételek kizárják egymást, lásd később: indexelés.)
- ténylegesen eldobunk megoldásokat — vörös vágás, a program jelentését megváltoztatja
  - (Vörös vágás legtöbbször úgy keletkezik, hogy egy zöld vágót tartalmazó programban a „felesleges” feltételeket elhagyjuk.)

# Példák a vágó eljárás használatára

```
% fakt(+N, ?F): N! = F.
fakt(0, 1) :- !.                                            % zöld vágó
fakt(N, F) :- N > 0, N1 is N-1, fakt(N1, F1), F is N*F1.

% last(+L, ?E): az L lista utolsó eleme E. (A lists könyvtárban van!)
last([E], E) :- !.                                          % zöld vágó
last([_|L], E) :- last(L, E).

% pirosak(+L, -Pirosak): Pirosak az L piros/1 funktorú elemeiből áll.
pirosak([], []).
pirosak([E|Ek], [E|Pk]) :-
       E = piros(_), !,                                     % vörös vágó
       pirosak(Ek, Pk).
pirosak([_E|Ek], Pk) :-
       /* \+ _E = piros(_), */ pirosak(Ek, Pk).
```

**Figyelem: a fenti példák nem tökéletesek, hatékonyabb ill. általánosabb változatukat később ismertetjük!**

# A vágó definíciója

## Segédfogalom

- **Egy cél *szülője* az a cél, amelyik az őt tartalmazó klóz fejével illesztődött.**
- **Pl. a `last([E], E) :- !.` klózbeli vágó szülője lehet a `last([7], X)` hívás.**
- **A `g` (ancestors) nyomkövetési parancs kiírja a kurrens cél őseit (szülőjét, annak szülőjét, stb.)**

## A vágó végrehajtása:

- **mindig sikerül; és a végrehajtás adott állapotától visszafelé egészen a szülő célig, azt is beleértve, minden választási pontot megszüntet.**

## A vágás kétféle választási pontot szüntet meg:

```
r(X):- s(X), !.   % az s(X)-beli választási pontokat --- a vágót megelőző
                  % cél(ok)nak az első megoldására szorítkozunk
                  % az r(X) többi klózának választását --- a vágót tartalmazó
r(X):- t(X).      % klóz mellett kötelezzük el magunkat (commit)
```

# A vágó által megszüntetett választási pontok

```
% vágó nélküli példa
q(X):- s(X).
q(X):- t(X).

% ugyanaz a példa vágóval
r(X):- s(X), !.
r(X):- t(X).

s(a).      s(b).       t(c).

% a vágó nélküli példa futása
:- q(X), write(X), fail.
                         --->        abc
% a vágót tartalmazó példa futása
:- r(X), write(X), fail.
                         --->        a
```



# A diszjunktív feltételes szerkezet definíciója

- A diszjunktív feltételes szerkezet, a diszjunkcióhoz hasonlóan egy segédeljárással váltható ki:

```
p :-                                p :-
    ...                                 ...
    (   felt1 -> akkor1                 segéd(...)
    ;   felt2 -> akkor2                 ... .
    ;   ...                ==>
    ;   egyébként                   segéd(...) :- felt1, !, akkor1.
    )                               segéd(...) :- felt2, !, akkor2.
    ... .                           ...
                                    segéd(...) :- egyébként.
```

- Az `egyébként` alternatíva elmaradhat, ilyenkor a megfelelő klóz is elmarad.
- SICStus módban a `felt` részekben vágó nem lehet, ISO módban lehet, de hatásköre (szülője) a `felt` rész.
- Az `akkor` részekben lehet vágó. Ennek hatásköre, a `->` nyílból generált vágóval ellentétben, a teljes `p` predikátum (távolbaható vágó).

# Példák a diszjunktív feltételes szerkezet használatára

```
% fakt(+N, ?F): N! = F.
fakt(N, F) :-
        (   N = 0 -> F = 1
        ;   N > 0, N1 is N-1, fakt(N1, F1), F is N*F1
        ).

% last(+L, ?E): az L nem üres lista utolsó eleme E.
last([E|L], Last) :-
        (   L = [] -> Last = E
        ;   last(L, Last)
        ).

% pirosak(+L, ?Pirosak): Pirosak az L piros/1 funktorú elemeiből áll.
pirosak([], []).
pirosak([E|Ek], Pk) :-
        (   E = piros(_) -> Pk = [E|Pk0]
        ;   Pk = Pk0
        ), pirosak(Ek, Pk0).
```

# A vágás első alapesete — klóz mellett való elkötelezés

- A klóz melletti elkötelezés általában egyszerű feltételes szerkezetet jelent.

```
szülő :- feltétel, !, akkor.
szülő :- egyébként.
```

- A vágó szükségtelenné teszi a `feltétel` negációjának végrehajtását a többi klózban. A logikailag tiszta, de nem hatékony alak:

```
szülő :- feltétel, akkor.
szülő :- \+ feltétel, egyébként.
```

  A fenti két alak csak akkor ekvivalens, ha `feltétel` egyszerű, nincs benne választás.

- Analógia: ha `a`, `b` és `c` logikai változók (pl. Pascalban), akkor
  `if a then b else c` $\equiv$ `a` $\wedge$ `b` $\vee \neg$ `a` $\wedge$ `c`

- A vágó által kiváltott negált feltételt célszerű kommentként jelezni:

```
szülő :- feltétel, !, akkor.
szülő :- /* \+ feltétel, */ egyébként.
```

# Feltételes szerkezetek

## Feltételes szerkezet — példa

```
% abs(X, A): A az X abszolút értéke.
abs(X, A)    :- X < 0, !, A is -X.
abs(X, X) /* :- X >= 0 */.
```

## Általános alak

```
p :- felt1, !, akkor1.
p :- felt2, !, akkor2.
...
p :- egyébként.
```

## Diszjunktív feltételes szerkezet

```
abs(X, Y) :-
        (   X < 0 -> Y is -X
        ;   Y = X
        ).
```

## Általános alak

```
p :-
        (   felt1 -> akkor1
        ;   felt2 -> akkor2
        ;   ...
        ;   egyébként
        ).
```

# Feltételes szerkezetek és fejillesztés

- Vigyázat: a tényleges feltétel részét képezik a fejbeli egyesítések!

```
% a vágót fej-egyesítés előzi meg      % az egyesítés explicitté téve:
abs(X, X) :- X >= 0, !.                abs(X, A) :- A = X, X >= 0, !.
abs(X, A) :- A is -X.                  abs(X, A) :- A is -X.
```

- A fej-egyesítés gondot okozhat, ha az eljárást ellenőrzésre használjuk:

```
| ?- abs(10, -10).  --->  yes
```

- A megoldás a ***vágás alapszabálya***:
  - A kimenő paraméterek értékadását mindig a vágó után végezzük!

    ```
    abs(X, A) :- X >= 0, !, A = X.
    abs(X, A) :- A is -X.
    ```

  - Ez nemcsak általánosabban használható, hanem hatékonyabb kódot is ad!
  - (*„kimenő” paraméterek* — vágó alkalmazásakor általában nincs többirányú használat :-)

# A bevezető példáknak a vágás alapszabályát betartó változata

```
% fakt(+N, ?F): N! = F.
fakt(0, F) :- !, F = 1.
fakt(N, F) :- N > 0, N1 is N-1, fakt(N1, F1), F is N*F1.

% last(+L, ?E): az L nem üres lista utolsó eleme E.
last([E], Last) :- !, Last = E.
last([_|L], E)  :- last(L, E).

% pirosak(+L, ?Pirosak): Pirosak az L piros/1 funktorú elemeiből áll.
pirosak([], []).
pirosak([E|Ek], Pk) :-
        E = piros(_), !, Pk = [E|Pk0], pirosak(Ek, Pk0).
pirosak([_E|Ek], Pk) :-
        /* \+ _E = piros(_), */ pirosak(Ek, Pk).
```

**Megjegyzés: a diszjunktív alakban a feltételek eleve explicitek, nincs fejillesztési probléma.**

# Példasor: `max(X, Y, Z)`: `X` és `Y` maximuma `Z`.

- **1. változat, tiszta Prolog. Lassú, választási pontot hagy.**

```
max(X, Y, X) :- X >= Y.
max(X, Y, Y) :- Y > X.
```

- **2. változat, zöld vágóval. Lassú, nem hagy választási pontot.**

```
max(X, Y, X) :- X >= Y, !.
max(X, Y, Y) :- Y > X.
```

- **3. változat, vörös vágóval. Gyors, nem hagy választási pontot, de nem használható ellenőrzésre, pl. `| ?- max(10, 1, 1)` sikerül.**

```
max(X, Y, X) :- X >= Y, !.
max(X, Y, Y).
```

- **4. változat, vörös vágóval. Helyes, gyors és nem hagy választási pontot.**

```
max(X, Y, Z) :- X >= Y, !, Z = X.
max(X, Y, Y) /* :- Y > X */.
```

# A vágás második alapesete — első megoldásra való megszorítás

## Mikor használjuk az első megoldásra megszorító vágót?

- behelyettesítést nem okozó, eldöntendő kérdés esetén;
- feladatspecifikus optimalizálásra;
- végtelen választási pontot létrehozó eljárások hasznosítására.

## Eldöntendő kérdés: eljáráshívás csupa bemenő paraméterrel

```
% van_elég_hosszú_út(+N, +A, +B, +Min):
% A és B között van N lépéses út, amelynek összhossza legalább Min km.
van_elég_hosszú_út(N, A, B, Min) :-
        útvonal(N, A, B, Hossz), Hossz >= Min, !.
```

**Eldöntendő kérdés esetén általában nincs értelme többszörös választ adni/várni.**

# Feladatspecifikus optimalizálás

- **Példafeladat: egy nem-negatív számokból álló lista első pozitív eleme**
- **Első megoldás, rekurzióval (mérnöki :-)**

```
első_poz_elem([0|L], EP)     :-  !, első_poz_elem(L, EP).
első_poz_elem([EP|_], EP) /* :- EP > 0 */.
```

- **Második megoldás, visszalépéses kereséssel (matematikusi :-)**

```
első_poz_elem(L, EP) :-
        append(Nk, [EP|_], L), EP > 0, \+ poz_elem(Nk, _).

poz_elem(L, P)  :- member(P, L), P > 0.
```

- **Harmadik megoldás, vágóval (Prolog hacker megoldása :-)**

```
első_poz_elem(L, EP) :- member(EP, L), EP > 0, !.
```

- **Figyelem: a harmadik megoldás épít a `member/2` felsorolási sorrendjére!**

# Feladatspecifikus optimalizálás — 2. példa

**A feladat: megkeresendő egy lista elején álló „plató” hossza (platónak hívjuk a csupa azonos elemből álló folytonos részlistát).**

```
% Az L lista első eleme H-szor ismétlődik a lista kezdőszeleteként.
kezdethossz(L, H) :-
        L = [E|_], append(Ek, Farok, L),
        \+ Farok = [E|_], !,            % vörös vágó
        /* egyformák(Ek, E), */
        length(Ek, H).
/*
% egyformák(Ek, E): Az Ek lista minden eleme E.
egyformák([], _).
egyformák([E|Ek], E) :-
        egyformák(Ek, E).
*/
| ?- kezdethossz([1,1,1,2,3,5], H).
H = 3 ? ; no
```

# Végtelen választás megszelidítése: `memberchk`

```
% memberchk(X, L): "X eleme az L listának" kérdés első megoldása.

% 1. változat                     % 2. ekvivalens változat
memberchk(X, L):-                 memberchk(X, [X|_]) :- !.
        member(X, L), !.          memberchk(X, [_|L]) :-
                                          memberchk(X, L).
```

## `memberchk/2` használata

- **Eldöntő kérdésben (visszalépéskor nem keresi végig a lista maradékát.)**
  `memberchk(1, [1,2,3,4,5,6,7,8,9])`
- **Nyílt végű lista elemévé tesz, pl.:**

```
| ?- memberchk(1,L), memberchk(2,L), memberchk(1,L).
        L = [1,2|_A] ?
```

# Nyílt végű listák kezelése memberchk segítségével: szótárprogram

```
szótaraz(Sz):-
        read(M-A), !,  % kifejezést olvas be és egyesíti az argumentummal
        memberchk(M-A,Sz),
        write(M-A), nl,
        szótaraz(Sz).
szótaraz(_).
```

**Egy futása:**

```
| ?- szótaraz(Sz).
|: alma-apple.               |: alma-X.
alma-apple                   alma-apple
|: korte-pear.               |: X-pear.
korte-pear                   korte-pear
                             |: vege.

                             Sz = [alma-apple,korte-pear|_A] ?
```

# VEZÉRLÉSI ELJÁRÁSOK

# Vezérlési eljárások: `call/1`

- Vezérlési eljárás: A Prolog végrehajtási mechanizmusához kapcsolódó beépített eljárás (pl. a vágó).
- A vezérlési eljárások többsége ***magasabbrendű*** eljárás, azaz olyan eljárás, amely egy vagy több argumentumát eljáráshívásként értelmezi. (A magasabbrendű Prolog eljárásokat szokás ***meta-eljárásnak*** is hívni.)
- A meta-eljárások fő képviselője és alapvető építőeleme a `call/1`:
  - Hívási minta: `call(+Cél)`
  - Argumentumok: `Cél` egy „meghívható kifejezés” (callable), azaz struktúra, vagy atom.
  - Jelentése: `Cél` igaz.
  - Hatása: a `Cél` kifejezést eljáráshívássá alakítja és meghívja
- Ha klóztörzsben célként szerepel egy `X` változó, akkor azt a rendszer egy `call(X)` hívássá alakítja át.
- `Cél`-ban további vezérlési eljárások is előfordulhatnak, pl. `','/2`, `';'/2`. A `Cél`-beli vágó csak a `call` belsejében vág (szülője a `call(Cél)` hívás).

# call/1: példák

```
| ?- [user].
| kétszer(Hívás) :- call(Hívás), Hívás.
| ^D
{consulted user in module user, 0 msec 224 bytes}
yes
 ?- kétszer(write(ba)), nl.
baba
yes
| ?- _Cél = (kétszer(write(ba)), write(' ')), kétszer(_Cél), nl.
baba baba
yes
| ?- listing(kétszer).
kétszer(A) :-
        call(user:A),
        call(user:A).
yes
```

# call/1 példa: futási időt mérő meta-eljárás

```
% Kiírja Goal első megoldásának előállításához vagy a meghiúsuláshoz
% szükséges időt, a Txt szöveg kiséretében (lásd: peldak/call_koltsege.pl).
time(Txt, Goal) :-
        statistics(runtime, [T0,_]),  % T0 az indítás óta eltelt CPU idő,
                                      % msec-ban (szemétgyűjtés nélkül).
        (   call(Goal) -> Res = true
        ;   Res = false
        ),
        statistics(runtime, [T1,_]), T is T1-T0,
        format('~w futási idő = ~3d sec\n', [Txt,T]),
        Res = true.
```

**A `call/1` viszonylag költséges: egy 1414 hosszú lista megfordítása `nrev`-vel (kb 1 millió `append` hívás), minden `append` körül egy felesleges `call`-lal ill. anélkül:**

| | `call` **nélkül** | `call`**-lal** |
|---|---|---|
| **lefordítva** | **0.220 sec** | **9.710 sec** |
| **interpretálva** | **1.850 sec** | **11.940 sec** |

# Vezérlési szerkezetek mint eljárások

- A `call/1` argumentumában azért szerepelhetnek vezérlési szerkezetek, mert ezek maguk beépített eljárásként is jelen vannak a Prolog rendszerben:
  - `(',')/2`: konjunkció.
  - `(;)/2`: diszjunkció.
  - `(->)/2`: if-then.
  - `(;)/2`: if-then-else.
- A `call`-ban szereplő vezérlési szerkezetek lényegében ugyanúgy futnak, mint az interpretált (`consult`-tal betöltött) kód.
- Példa

```
| ?- kétszer((member(X, [a,b,c,d]), write(X), fail ; nl)).
abcd
abcd

true ?
```

# További vezérlési eljárások

- A „nem-bizonyíthatóságot” ellenőrző `\+` eljárás definíciója:

```
\+ X :- call(X), !, fail.
\+ _X.
```

- Az első megoldásra megszorító `once` beépített eljárás definíciója:

```
once(X) :- call(X), !.
```

- A `true` ill. `fail` beépített eljárás mindig sikerül ill. mindig meghiúsul.
- A `repeat` beépített eljárás egy végtelen választási pontot hoz létre:

```
repeat.
repeat :- repeat.
```

- A `repeat` eljárást mindig egy vágóval kell semlegesíteni. Példa:

```
bc :-  repeat, read(Expr),
           (   Expr = end_of_file -> true
           ;   Res is Expr, write(Expr = Res), nl, fail
           ), !.
```

# DETERMINIZMUS ÉS INDEXELÉS

# Determinizmus

- Egy eljáráshívás *determinisztikus*, ha (legfeljebb) egyféleképpen sikerülhet.
- Egy eljáráshívásnak egy sikeres végrehajtása *determinisztikusan futott le*:
  - ha nem hagyott választási pontot a híváshoz tartozó részfában:
    - választásmentesen futott le, azaz létre sem hozott választási pontot (figyelem: ez a Prolog megvalósítástól függ!); vagy
    - létrehozott ugyan választást, de megszüntette (kimerítette, levágta).
- A SICStus Prolog nyomkövetésében *?* jelzi a *nem*determinisztikus lefutást:

```
p(1, a).   | ?- p(1, X).                        % det. hívás,
p(2, b).                   1 1 Exit: p(1,a)     %      det. lefutás
p(3, b).   | ?- p(Y, a).                        % det. hívás,
                         ? 1 1 Exit: p(1,a)     %      nemdet. lefutás
           | ?- p(Y, b), Y > 2.                 % nemdet. hívás
                         ? 1 1 Exit: p(2,b)     %      nemdet. lefutás
                           1 1 Exit: p(3,b)     %      det. lefutás
```

# A determinisztikus lefutás

- Mi a determinisztikus lefutás haszna?
  - a futás gyorsabb lesz,
  - a tárigény csökken,
  - más optimalizálások (pl. jobbrekurzió) alkalmazható.
- Hogyan ismeri fel a fordító azt, hogy nem kell választási pont?
  - indexelés (indexing)
  - vágók és feltételes szerkezetek
- Az alábbi definíciók esetén a `p(`*Nonvar*`, Y)` hívás nem hoz létre választási pontot (a 2. definíció esetén a `p(`*Var*`, Y)` sem):

```
p(1, a).
p(2, b).
```

```
p(1, Y) :- !,
    Y = a.
p(_, b).
```

```
p(X, Y) :-
    (   X > 1 -> Y = a
    ;   Y = b
    ).
```

# Indexelés

- Mi az indexelés?
  - egy hívásra illeszthető klózok gyors kiválasztása,
  - egy eljárás klózainak fordítási idejű csoportosításával,
- A legtöbb Prolog rendszer, így a SICStus Prolog is, az első fej-argumentum alapján indexel (first argument indexing).
- Az indexelés alapja az első fejargumentum külső funktora:
  - `C` szám vagy névkonstans esetén `C/0`;
  - `R` nevű és `N` argumentumú struktúra esetén `R/N`;
  - változó esetén nem értelmezett.
- Az indexelés megvalósítása:
  - Fordításkor a funktorokhoz elkészítjük az illeszthető klózok részhalmazát.
  - Futáskor lényegében konstans idő alatt választunk a részhalmazok közül.
  - ***Fontos:*** ha egyelemű a részhalmaz, nem hozunk létre választási pontot!

# Példa indexelésre

```
p(0, a).            /* (1) */      q(1).
p(X, t) :- q(X).    /* (2) */      q(2).
p(s(0), b).         /* (3) */
p(s(1), c).         /* (4) */
p(9, z).            /* (5) */
```

- **A `p(A, B)` hívással illesztendő klózhalmaz:**
  - `{(1) (2) (3) (4) (5)}` **ha `A` változó;**
  - `{(1) (2)}` **ha `A = 0`;**
  - `{(2) (3) (4)}` **ha `A` fő funktora `s/1`;**
  - `{(2) (5)}` **ha `A = 9`;**
  - `{(2)}` **minden más esetben.**
- **Példák hívásokra:**
  - `p(3, Y)` **nem hoz létre választási pontot.**
  - `p(s(1), Y)` **létrehoz választási pontot, de determinisztikusan fut le.**
  - `p(s(0), Y)` **nemdeterminisztikusan fut le.**

# Struktúrák, változók a fejargumentumban

- Azonos funktorú struktúrák az első fejargumentumban:
  - Ha a klózok szétválasztásához szükség van az első (struktúra) argumentum részeire is, akkor érdemes segédeljárást bevezetni.
  - Például `p/2` és `q/2` ekvivalens, de `q(`*Nonvar*`, Y)` determinisztikusan fut le!

| | | |
|---|---|---|
| `p(0, a).`<br>`p(s(0), b).`<br>`p(s(1), c).`<br>`p(9, z).` | `q(0, a).`<br>`q(s(X), Y) :-`<br>`        q_seged(X, Y).`<br>`q(9, z).` | `q_seged(0, b).`<br>`q_seged(1, c).` |

- Fejillesztés kiváltása egyenlőséggel (vö. SML rétegelt minta)
  - Az indexelés figyelembe veszi a törzs elején szereplő egyenlőséget: `p(X, ...)  :- X = Kif, ...` esetén `Kif` funktora szerint indexel.
  - Példa: lista hosszának reciproka, üres lista esetén 0:

```
rhossz([], 0).
rhossz(L, RH) :- L = [_|_], length(L, H), RH is 1/H.
% rhossz([X|L], RH) :-  length([X|L], H), RH is 1/H. % nem hatékony!
```

# Indexelés és aritmetika, indexelés és listák

- Aritmetikai elágazások
  - Az indexelés nem foglalkozik aritmetikai vizsgálatokkal.
  - Pl. az `N = 0` és `N > 0` feltételek nem „zárják ki” egymást.
  - Az alábbi `fakt(N, F)` lefutása nem-determinisztikus:

```
fakt(0, 1).
fakt(N, F) :- N > 0, N1 is N-1, fakt(N1, F1), F is N*F1.
```

- Listakezelő eljárások
  - Gyakran kell az üres és nem-üres lista esetét szétválasztani.
  - A bemenő lista-argumentumot célszerű az első argumentum-pozícióba tenni.
  - Az `[]` és `[...|...]` eseteket az indexelés megkülönbözteti (funktoruk: `'[]'/0` ill. `'.'/2`).
  - A két klóz sorrendje nem érdekes (feltéve, hogy zárt listával hívjuk az első pozíción) — de azért tegyük a leálló klózt mindig előre.

# Listakezelő eljárások indexelése: példák

- **Az `append/3` választásmentesen fut le (összefűzésre).**

```
append([], L, L).
append([X|L1], L2, [X|L3]) :-
    append(L1, L2, L3).
```

- **A `last/2` közvetlen megfogalmazása nemdeterminisztikusan fut le:**

```
% last(L, E): Az L lista utolsó eleme E.
last([E], E).
last([_|L], E) :- last(L, E).
```

- **Érdemes segédeljárást bevezetni, `last2/2` választásmentesen fut**

```
last2([X|L], E) :- last2(L, X, E).

% last2(L, X, E): Az [X|L] lista utolsó eleme E.
last2([], E, E).
last2([X|L], _, E) :- last2(L, X, E).
```

# Az indexelés és a vágó kölcsönhatása

- Hogyan vehető figyelembe a vágó az indexelés fordításakor?
- Példa: a `p(1, A)` hívás választásmentes, de a `q(1, A)` nem!

```
p(1, Y) :- !, Y = 2.     % (1)    | q(1, 2) :- !.            % (1)
p(X, X).                 % (2)    | q(X, X).                 % (2)
Arg1=1 → (1), Arg1≠1 → (2)        | Arg1=1 → {(1),(2)}, Arg1≠1 → (2)
```

- Csak akkor tudjuk fordításkor kizárni a vágót követő klózokat, ha garantált, hogy az adott fő funktor esetén a vágót elérjük. Ennek feltételei:
  - az első argumentumban konstans, vagy legáltalánosabb struktúra legyen,
  - a további argumentumok változók legyenek,
  - a fejben az összes változóelőfordulás különböző legyen,
  - a törzs első hívása a vágó (megengedve a fejillesztést kiváltó =-t).
- Példa: `p(s(A, B, C), D, E) :- !, ....`
- Ez egy újabb érv a vágás alapszabálya mellett:

  ***A kimenő paraméterek értékadását mindig a vágó után végezzük!***

# A vágó és az indexelés hatékonysága

- **Egy Fibonacci-szerű sorozat:** $f_1 = 1; \quad f_2 = 2; \quad f_n = f_{\lfloor 3n/4 \rfloor} + f_{\lfloor 2n/3 \rfloor}, \quad n > 2$

```
% determinisztikus
fib(1, 1).
fib(2, 2).
fib(N, F) :-
        N > 2,
        N2 is N*3//4,
        N3 is N*2//3,
        fib(N2, F2),
        fib(N3, F3),
        F is F2+F3.
```

```
% determ. lefutású
fibc(1, 1) :- !.
fibc(2, 2) :- !.
fibc(N, F) :-
        N > 2,
        N2 is N*3//4,
        N3 is N*2//3,
        fibc(N2, F2),
        fibc(N3, F3),
        F is F2+F3.
```

```
% választásmentes
fibci(1, F) :- !, F = 1.
fibci(2, F) :- !, F = 2.
fibci(N, F) :-
        N > 2,
        N2 is N*3//4,
        N3 is N*2//3,
        fibci(N2, F2),
        fibci(N3, F3),
        F is F2+F3.
```

- **Futási idők $N = 2000$ esetén**

| | fib | fibc | fibci |
|---|---|---|---|
| futási idő | 4410 ms | 4060 ms | 3820 ms |
| meghiúsulási idő | 730 ms | 0 ms | 0 ms |
| összesen | 5140 ms | 4060 ms | 3820 ms |

# Választás-mentesség diszjunktív feltételes szerkezetek esetén

- **Feltételes szerkezet végrehajtásakor általában választási pont jön létre.**
- **A SICStus Prolog a „`( felt -> akkor ; egyébként )`" szerkezetet választásmentesen hajtja végre, ha a `felt` konjunkció tagjai csak:**
  - **aritmetikai összehasonlító eljáráshívások (pl. `<`, `=<`, `=:=`), és/vagy**
  - **kifejezés-típust ellenőrző eljáráshívások (pl. `atom`, `number`), és/vagy**
  - **általános összehasonlító eljáráshívások (ld. később, pl. `@<`, `@=<`, `==`).**
- **Analóg módon választásmentes kód keletkezik a „`fej :- felt, !, akkor.`" klózból, ha `fej` argumentumai különböző változók, és `felt` olyan mint fent.**
- **Például választásmentes kód keletkezik az alábbi definíciókból:**

```
fakt(N, F) :-
    (   N =:= 0 -> % N = 0 nem jó!
        F = 1
    ;   N1 is N-1, fakt(N1, F1),
        F is N*F1
    )
```

```
fakt(N, F) :-
    N =:= 0, !, F = 1.
fakt(N, F) :-
    N1 is N-1, fakt(N1, F1),
    F is N*F1.
```

# JOBBREKURZIÓ ÉS AKKUMULÁTOROK

# Jobbrekurzió (farok-rekurzió, tail-recursion) optimalizálás

- **Az általános rekurzió költséges, helyben és időben is.**
- **Jobbrekurzióról beszélünk, ha**
  - **a rekurzív hívás a klóztörzs utolsó helyén van, vagy az utolsó helyen szereplő diszjunkció egyik tagjának utolsó helyén, stb., és**
  - **a rekurzív hívás pillanatában nincs választási pont a predikátumban, tehát a rekurzív hívást megelőző célok determinisztikusan futottak le.**
- **Jobbrekurzió optimalizálás: az utolsó hívás végrehajtása *előtt* a predikátum által lefoglalt hely felszabadul ill. szemétgyüjtésre alkalmassá válik.**
- **Ez az optimalizálás nemcsak rekurzív hívás esetén, hanem minden *utolsó* hívás esetén megvalósul — utolsó hívás optimalizálás (last call optimisation).**
- **A jobbrekurzió így tehát nem növeli a memória-igényt, korlátlan mélységig futhat — mint a ciklusok az imperatív nyelvekben. Példa:**

```
ciklus(Állapot) :- lépés(Állapot, Állapot1), !, ciklus(Állapot1).
ciklus(_Állapot).
```

# Predikátumok jobbrekurzív alakra hozása — listaösszeg

- **A listaösszegzés „természetes”, nem jobbrekurzív definíciója:**

```
% sum(+L, ?S): Az L számlista elemeinek összege S.
sum([], 0).
sum([X|L], S):- sum(L,S0), S is S0+X.
```

- **Első jobbrekurzív változat, csak ellenőrzésre használható:**

```
% sum1(+L, +S): Az L számlista elemeinek összege S.
sum1([], 0).
sum1([X|L], S) :- /* S is S0+X  helyett: */ S0 is S-X, sum1(L, S0).
```

- **Második jobbrekurzív változat, csak kiírni tudja az eredményt:**

```
% sum2(+L): Az L számlista elemeinek összegét kiírja.
sum2(L):- sum2(L, 0).

% sum2(+L, +S0): Az L lista S0-lal növelt összegét kiírja.
sum2([], S) :-    write(S), nl.
sum2([X|L], S0):- S1 is S0+X, sum2(L, S1).
```

# Jobbrekurzív listaösszeg — akkumulátorpár segítségével

- **Harmadik változat: teljes értékű jobbrekurzív lista-összegző:**

```
% sum3(+L, ?S): Az L számlista elemeinek összege S.
sum3(L, S):- sum3(L, 0, S).

% sum3(+L, +S0, ?S): Az L lista elemeit hozzáadva S0-hoz kapjuk S-et.
sum3([], S, S).
sum3([X|L], S0, S):-
        S1 is S0+X, sum3(L, S1, S).
```

- **Az *akkumulátor* fogalma:**
  - **A `sum3(L, S0, S)` predikátumban az `S0` és `S` argumentumok egy akkumulátorpárt alkotnak.**
  - **Az akkumulátorpár két része egy változó mennyiség (a példában az összeg) különböző időpontokban vett értékeit mutatja:**
    - **`S0` az összeg értéke a `sum3/3` *meghívásakor*;**
    - **`S` az összeg értéke a `sum3/3` *lefutása után*.**

# Akkumulátorok használata

- Az akkumulátorpárok a hagyományos, „változtatható” változók megfelelői.
- Az általános séma:

```
p(..., A0, A):-
        q0(..., A0, A1), ...,
        q1(..., A1, A2), ...,
        qn(..., An, A).
```

- A `sum3/3` második klóza ilyen alakra hozva:

```
sum3([X|L], S0, S):- plus(X, S0, S1), sum3(L, S1, S).

plus(X, S0, S) :- S is S0+X.
```

- Akkumulátorváltozók elnevezési konvenciója: kezdőérték: *Vált*0; közbülső értékek: *Vált*1, ..., *Vált*n; végérték: *Vált*.
- A Prolog akkumulátorpár nem más mint a funkcionális programozásból ismert gyűjtőargumentum és a függvény eredményének együttese.

# Akkumulátorok használata — folytatás

- **Három lista összege**

```
% sum_3_lists(+L, +LL, +LLL, +S0, ?S): Az L, LL, LLL számlisták
% összegeinek összege S-S0
sum_3_lists(L, LL, LLL, S0, S) :-
        sum3(L, S0, S1), sum3(LL, S1, S2), sum3(LLL, S2, S).
```

- **Többszörös akkumulálás — listák összege és négyzetösszege**

```
% sum12(+L, +S0, ?S, +Q0, ?Q): S-S0 =Σ Li, Q-Q0 = Σ Li*Li
sum12([], S, S, Q, Q).
sum12([X|L], S0, S, Q0, Q):-
        S1 is S0+X, Q1 is Q0+X*X, sum12(L, S1, S, Q1, Q).
```

- **Többszörös akkumulátorok összevonása**

```
% sum12(+L, +S0/Q0, ?S/Q): S-S0 =Σ Li, Q-Q0 = Σ Li*Li
sum12([], SQ, SQ).
sum12([X|L], S0/Q0, SQ):-
        S1 is S0+X, Q1 is Q0+X*X, sum12(L, S1/Q1, SQ).
```

# Korábbi listakezelő predikátumok

- **A `revapp` mint akkumuláló eljárás**

```
% revapp(Xs, L0, L): Xs megfordítását L0 elé füzve kapjuk L-t.
% Másképpen: Xs megfordítása L-L0.
revapp([], L, L).
revapp([X|Xs], L0, L) :-
        L1 = [X|L0], revapp(Xs, L1, L).
```

- **Az `L-L0` jelölés (különbséglista): az a lista amelyet úgy kapunk, hogy `L` végéről elhagyjuk `L0`-t (előfeltétel: `L0` szuffixuma `L`-nek).**
- **Az `append` is tekinthető akkumuláló eljárásnak (a 2. és 3. arg. felcserélt). A változtatás: az `L0` elejéről sorra elhagyjuk `Xs` elemeit, végül marad `L`.**

```
% append(Xs, L, L0): L0 elejéről Xs elemeit lehagyva marad L.
% Másképpen: Xs = L0-L.
append([], L, L).
append([X|Xs], L, L0) :-
       L0 = [X|L1], append(Xs, L, L1).
```

# Egy mintafeladat: $a^n b^n$ alakú sorozat előállítása

## Első megoldás, $3n$ lépés

```
% anbn(N, L): Az L lista N db a-ból
% és azt követő N db b-ből áll.
anbn(N, L) :-
        an(N, a, AN),
        an(N, b, BN),
        append(AN, BN, L).

% an(N, A, L): L az A elemet N-szer
% tartalmazó lista
an(0, _A, L) :- !, L = [].
an(N, A, [A|L]) :-
        N > 0,
        N1 is N-1,
        an(N1, A, L).
```

## Második megoldás, $2n$ lépés

```
anbn(N, L) :-
        an(N, b, [], BN),
        an(N, a, BN, L).

% an(N, A, L0, L): L-L0 az A
% elemet N-szer tartalmazó lista
an(0, _A, L0, L) :- !, L = L0.
an(N, A, L0, [A|L]) :-
        N > 0,
        N1 is N-1,
        an(N1, A, L0, L).
```

# $a^n b^n$ alakú sorozatok (folyt.)

- **Harmadik megoldás, $n$ lépés**

```
anbn(N, L) :-
        anbn(N, [], L).

% anbn(N, L0, L): Az L-L0 lista N db a-ból és azt követő N db b-ből áll.
anbn(0, L0, L) :- !, L = L0.
anbn(N, L0, [a|L]) :-
        N > 0,
        N1 is N-1,
        anbn(N1, [b|L0], L).
```

- **A második klóz nem jobbrekurzív változata**

```
anbn(N, L0, L) :-
        N > 0, N1 is N-1,
        L1 = [b|L0],      % 1. lépés: L0 elé b => L1
        anbn(N1, L1, L2), % 2. lépés: L1 elé a^N1 b^N1 => L2
        L = [a|L2].       % 3. lépés: L2 elé a => L
```

# Összetettebb adatstruktúrák akkumulálása

- Az adatstruktúra:
  `% :- type bfa --> ures ; bfa(int, bfa, bfa).`
- A fa csomópontjaiban tároljuk a számértékeket, a levelek nem tárolnak információt.
- Egészek gyűjtése rendezett bináris fában
  - `beszur(BFa0, E, BFa)`: Az `E` egész számnak a `BFa0` fába való beszúrása a `BFa` bináris fát eredményezi.
  - Itt `BFa0` és `BFa` egy akkumulátor-pár, de az indexelés érdekében `BFa0` az első argumentum-pozícióba kerül.
- Példafutás:

```
| ?- beszur(ures, 3, Fa0), beszur(Fa0, 1, Fa1), beszur(Fa1, 5, Fa2).

Fa0 = bfa(3,ures,ures),
Fa1 = bfa(3,bfa(1,ures,ures),ures),
Fa2 = bfa(3,bfa(1,ures,ures),bfa(5,ures,ures)) ?
```

# Akkumulálás bináris fákkal

- **Elem beszúrása bináris fába**

```
% beszur(BF0, E, BF): E beszúrása BF0 rendezett fába
% a BF rendezett fát adja
% :- pred beszur(bfa::in, int::in, bfa::out).
beszur(ures, Elem, bfa(Elem, ures, ures)).
beszur(BF0, Elem, BF):-
        BF0 = bfa(E,B,J),  % az indexelés működik!
        (   Elem = E -> BF = BF0
        ;   Elem < E ->
            BF = bfa(E,B1,J),
            beszur(B, Elem, B1)
        ;   BF = bfa(E,B,J1),
            beszur(J, Elem, J1)
        ).
```

# Akkumulálás bináris fákkal — folyt.

- **Lista konverziója bináris fává**

```
% lista_bfa(L, BF0, BF): L elemeit beszúrva BF0-ba kapjuk BF-t.
% :- pred lista_bfa(list(int)::in, bfa::in, bfa::out).
lista_bfa([], BF, BF).
lista_bfa([E|L], BF0, BF):-
        beszur(BF0, E, BF1),
        lista_bfa(L, BF1, BF).

| ?- lista_bfa([3,1,5], ures, BF).
BF = bfa(3,bfa(1,ures,ures),bfa(5,ures,ures)) ? ;
no

| ?- lista_bfa([3,1,5,1,2,4], ures, BF).
BF = bfa(3,bfa(1,ures,bfa(2,ures,ures)),
           bfa(5,bfa(4,ures,ures),ures)) ? ;
no
```

# Akkumulálás bináris fákkal — folyt.

## Bináris fa konverziója listává

```
% bfa_lista(BF, L0, L): A BF fa levelei az L-L0 listát adják.
% :- pred bfa_lista(bfa::in, list(int)::in, list(int)::out).
bfa_lista(ures, L, L).
bfa_lista(bfa(E, B, J), L0, L):-
        bfa_lista(J, L0, L1),
        bfa_lista(B, [E|L1], L).
```

## Rendezés bináris fával

```
% L lista rendezettje R.
% :- pred rendez(list(int)::in, list(int)::out).
rendez(L, R):-
        lista_bfa(L, ures, BF), bfa_lista(BF, [], R).

| ?- rendez([1,5,3,1,2,4], R).
R = [1,2,3,4,5] ? ;
no
```

# IMPERATÍV PROGRAMOK ÁTÍRÁSA PROLOGBA

# Hogyan írjunk át imperatív nyelvű algoritmust Prolog programmá?

- Példafeladat: Hatékony hatványozási algoritmus
  - Alaplépés: a kitevő felezése, az alap négyzetre emelése.
  - Lényegében a kitevő kettes számrendszerbeli alakja szerint hatványoz.
- Az algoritmust megvalósító C nyelvű függvény:

```
/* hatv(a, h) = a**h */
int hatv(int a, unsigned h)
{
  int e = 1;
  while (h > 0)
  {
    if (h & 1) e *= a;
    h >>= 1; a *= a;
  }
  return e;
}
```

# A `hatv` C függvénynek megfelelő Prolog eljárás

- A fügvény eredménye a reláció utolsó arg.-a: `hatv(+A, +H, ?E)`: $A^H = E$.
- A ciklusnak segédeljárás felel meg: `hatv(+A0, +H0, +E0, ?E)`: $A0^{H0} * E0 = E$.
- Az »`a`« és »`h`« C változóknak az »`+A`« és »`+H`« bemenő ***paraméterek***, az »`e`« C változónak az »`+E0, ?E`« ***akkumulátor-pár*** felel meg.

```
hatv(A, H, E) :-
        hatv(A, H, 1, E).

hatv(A0, H0, E0, E) :- H0 > 0, !,
        (   H0 /\ 1 =:= 1
        ->  E1 is E0*A0
        ;   E1 = E0
        ),
        H1 is H0 >> 1,
        A1 is A0*A0,
        hatv(A1, H1, E1, E).
hatv(_, _, E, E).
```

```
int hatv(int a, unsigned h)
{       int e = 1;

  ism:  if (h > 0)
        {  if (h & 1)
                e *= a;



           h >>= 1;
           a *= a;
           goto ism;
        } else return e;
}
```

# A C ciklus és a Prolog eljárás kapcsolata

- A ciklust megvalósító Prolog eljárás minden pontján minden C változónak megfeleltetethető egy Prolog változó (pl. `h`-nak `H0, H1, ...`):
  - A ciklusmag elején a C változók a megfelelő Prolog argumentumban levő változónak felelnek meg.
  - Egy C értékadásnak egy új Prolog változó bevezetése felel meg, az ezutáni kódban az új változó felel meg a C változónak.
  - Ha a diszjunkció egyik ága megváltoztat egy változót, akkor a többi ágon is be kell vezetni az új Prolog változót, a régivel azonos értékkel (ld. `if (h & 1) ...`).
- A C ciklusmag végén a Prolog eljárást vissza kell hívni, argumentumaiban az egyes C változóknak megfeleltetett Prolog változóval.
- A C ciklus *ciklus-invariánsa* nem más mint a Prolog eljárás fejkommentje, a példában:

  `% hatv(+A0, +H0, +E0, ?E):` $\mathtt{A0}^{\mathtt{H0}} * \mathtt{E0} = \mathtt{E}$.

# Programhelyesség-bizonyítás

- Egy algoritmus (függvény) specifikácója:
  - *előfeltételek*: a bemenő paramétereknek teljesíteniük kell ezeket,
  - *utófeltételek*: a paraméterek és az eredmény kapcsolatát írják le.
- Egy algoritmus *helyes*, ha minden, az előfeltételeket kielégítő adatra a függvény hibátlanul lefut, és eredményére fennállnak az utófeltételek.
- Példa: `x = mfoku_gyok(a,b,c)`
  - előfeltételek: `b*b-4*a*c >= 0`, `a` $\neq$ `0`
  - utófeltétel: `a*x*x+b*x+c = 0`
  - a program:

```
double mfoku_gyok(a, b, c)
double a, b, c;
{ double d = sqrt(b*b-4*a*c);
  return (-b+d)/2/a; }
```

- A program helyességének bizonyítása lineáris kódra viszonylag egyszerű.

# Ciklikus programok helyességének bizonyítása

- A ciklusokat „fel kell vágni” egy *ciklus-invariáns*-sal, amely:
  - az előfeltételekből és a ciklust megelőző értékadásokból következik,
  - ha a ciklus elején fennáll, akkor a ciklus végén is (indukció),
  - belőle és a leállási feltételből következik a ciklus utófeltétele.

```
int hatv(int a0, unsigned h0)      /* utófeltétel: hatv(a0, h0) = a0^h0 */
{ int e = 1, a = a0, h = h0;
  while (h > 0)
  { /* ciklus-invariáns: a0^h0 == e*a^h */
    /* induláskor a kezdőértékek alapján triviálisan fennáll */
    if (h & 1) e *= a;           /* e' = e * a^(h&1) */
    h >>= 1;                     /* h' = (h-(h&1))/2 */
    a *= a;                      /* a' = a*a */
  }                              /* indukció: e'*a'^h' = ... = e*a^h */
  return e;
  /* Az invariánsból h = 0 miatt következik az utófeltétel */
}
```

## Második példa: Fibonacci sorozat tagjainak hatékony számítása

- **A C függvény**

```
unsigned fib(unsigned n)
{ unsigned f = 0, fnxt = 1, t;
  while (n > 0) t = fnxt, fnxt += f, f = t, --n;  /* (1) */
  return f;
}
```

- **Az (1) ciklusnak bemenő változói:** `n`, `f`, `fnxt`, **kimenő változója:** `f`.
- **A ciklusnak megfeleltetett Prolog eljárás:** `fib(N, F0, FNXT, F)`:
  **az** `F0` **és** `FNXT` **kezdőértékű Fibonacci sorozat** `N`**-edik tagja** `F`.

```
% "betű szerinti" Prolog átírás:
fib(N, F0, FNXT, F) :- N > 0, !,
    T = FNXT, FNXT1 is FNXT+F0,
    F1 = T, N1 is N-1,
    fib(N1, F1, FNXT1, F).
fib(_, F0, _, F0).
```

```
% Leegyszerűsített alak:
fib(N, F0, FNXT, F) :- N > 0, !,
    FNXT1 is FNXT+F0,
    N1 is N-1,
    fib(N1, FNXT, FNXT1, F).
fib(_, F0, _, F0).
```

# Fibonacci sorozat — Prolog stílusban

- **A Fibonacci sorozat teljes Prolog megvalósítása, és az ennek megfeleltethető C kód:**

```
fib(N, F) :-                     % unsigned fib(unsigned N)
        fib(N, 0, 1, F).         % { unsigned F0 = 0, F1 = 1, F2;
                                 %
fib(N, F0, F1, F) :-             % ism:
        N > 0, !,                %   if (N > 0)
        N1 is N-1,               %   {  --N;
        F2 is F0+F1,             %      F2 = F0+F1;
        fib(N1, F1, F2, F).      %      F0 = F1; F1 = F2; goto ism;
                                 %   }
fib(_, F0, _, F0).               %   return F0;
                                 % }
```

# MEGOLDÁSOK GYŰJTÉSE ÉS FELSOROLÁSA

# Keresési feladat Prologban — felsorolás vagy gyűjtés?

- Keresési feladat: bizonyos feltételeknek megfelelő dolgok meghatározása.
- Prolog nyelven egy ilyen feladat alapvetően kétféle módon oldható meg:
  - gyűjtés — az összes megoldás összegyűjtése, pl. egy listába;
  - felsorolás — a megoldások visszalépéses felsorolása: egyszerre egy megoldást kapunk, de visszalépés esetén sorra előáll minden megoldás.
- Egyszerű példa: egy lista páros elemeinek megkeresése:

```
% páros_elemei(L, Pk): Pk az L
% lista páros elemeinek listája.
páros_elemei([], []).
páros_elemei([X|L], Pk) :-
    X mod 2 =\= 0, !,
    páros_elemei(L, Pk).
páros_elemei([P|L], [P|Pk]) :-
    páros_elemei(L, Pk).
```

```
% páros_eleme(L, P): P egy páros
% eleme az L listának.
páros_eleme([P|L], P) :-
    P mod 2 =:= 0.
páros_eleme([_|L], P) :-
    páros_eleme(L, P).

páros_eleme2(L, P) :-
    member(P, L), P mod 2 =:= 0.
```

# Mi a közös a felsoroló és gyűjtő megoldásokban?

- **Keressük meg a közös részt a `páros_eleme(i)` eljárásokban!**
- **Mindkettőben át kell lépni a páratlan elemeket:**

```
% köv_páros(L0, P, L) :- Az L0 első páros eleme P, a maradék L.
köv_páros([X|L0], P, L) :-
    X mod 2 =\= 0, !, köv_páros(L0, P, L).
köv_páros([P|L], P, L).
```

- **A `köv_páros` eljárásra épülő `páros_eleme(i)` eljárások:**

```
% páros_elemei(L, Pk): Pk az L
% lista páros elemeinek listája.
páros_elemei(L0, Pk) :-
    köv_páros(L0, P, L1), !,
    Pk = [P|Pk1],
    páros_elemei(L1, Pk1).
páros_elemei(_, []).
```

```
% páros_eleme(L, P): P egy páros
% eleme az L listának.
páros_eleme(L0, P) :-
    köv_páros(L0, P0, L1),
    (   P = P0
    ;   páros_eleme(L1, P)
    ).
```

# A gyűjtő és felsoroló sémák összehasonlítása

- A páros elemeket gyűjtő ill. felsoroló eljárások alapján adjunk meg egy általános sémát a kétféle eljárástípusra!
- Az általános esetben a keresésnek lehet egy vagy több `Param` paramétere. Például, kereshetjük az `Param`-mal osztható elemeket.
- A közös építőelem: `következő(V0, Param, E, V1)`: A `V0` kifejezéssel jellemzett keresési térben az első megoldás `E`, és a fennmaradó keresési tér `V1`, a `Param` paraméter-érték mellett.

A gyűjtő séma:

```
% A V0 keresési térben a Param
% paraméterű megoldások listája L.
megoldások(V0, Param, L) :-
  következő(V0, Param, E, V1), !,
  L = [E|L1],
  megoldások(V1, Param, L1).
megoldások(_, _, []).
```

A felsoroló séma:

```
% A V0 keresési térben E egy
% Param paraméterű megoldás.
megoldás(V0, Param, E) :-
  következő(V0, Param, E0, V1),
  (   E = E0
  ;   megoldás(V1, Param, E)
  ).
```

# Egy összetettebb példa: fennsíkok felsorolása

- Egy listában fennsíknak nevezünk:
  - egy csupa azonos elemből álló, legalább kételemű, folytonos részlistát;
  - amely az ilyenek között maximális (egyik irányba sem kiterjeszthető).
- A feladat: felsorolandók egy lista fennsíkjai és kezdőpozíciójuk.
- Egy gyorsprogramozási módszerrel készült megoldás:

```
% Az L listában az F pozíción egy H hosszú fennsík van.
```

```
fennsík0(L, F, H) :-
    Teste = [E,E|_],
    append(Eleje, Teste, L),
    \+ last(Eleje, E),
    length(Eleje, F0), F is F0+1,
    kezdethossz(Teste, H).
    % kezdethossz/2 definícióját
    % lásd korábban
```

```
fennsík1(L, F, H) :-
    Teste = [E,E|_],
    append(Eleje, Teste, L),
    \+ last(Eleje, E),
    length(Eleje, F0), F is F0+1,
    (   append(Ek, Farok, Teste),
        \+ Farok = [E|_] ->
        length(Ek, H)
    ).
```

# Fennsíkok felsorolása — 2., hatékony megoldás

- **Használjuk a megoldás-felsoroló sémát:** `megoldás(`*V0*`,` *Param*`,` *E*`)`**!**
  - *V0*: »`L, P`«, a bejárandó lista és első elemének pozíciója;
  - *Param*: üres;
  - *E*: »`F, H`«, a megoldás-fennsík kezdőpozíciója és hossza.

```
% Az L listában az F pozíción egy H hosszú fennsík van.
fennsík(L, F, H) :-
        fennsík(L, 1, F, H).

% A P0-tól számozott L0 listában az F pozíción egy H hosszú fennsík van.
fennsík(L0, P0, F, H) :-
        % az első fennsík jellemzői F0 és H0, az utána levő maradék L1:
        első_fennsík(L0, P0, F0, H0, L1),
        (   F = F0, H = H0
        ;   % L1 kezdőpoz.ja, P1 = előző megoldás kezdőpoz.ja+hossza:
            P1 is F0+H0, fennsík(L1, P1, F, H)
        ).
```

# Fennsíkok felsorolása — 2., hatékony megoldás (folyt.)

```
% első_fennsík(+L0, +P0, -F, -H, -L): A P0-tól számozott L0 listában az
% első fennsík az F. pozíción van és hossza H, a fennsík után fennmaradó
% rész pedig az L lista.
első_fennsík([E,E|L1], P0, F, H, L) :-
        !, F = P0, azonosak(L1, E, 2, H, L).
első_fennsík([_|L1], P0, F, H, L) :-
        P1 is P0+1,
        első_fennsík(L1, P1, F, H, L).

% azonosak(+L0, +E, +H0, -H, -L): Az L0 lista elejéről a maximális számú
% E-vel azonos elemet lehagyva marad L, a lehagyott elemek száma H-H0.
azonosak([X|L0], E, H0, H, L) :-
        E = X, !,
        H1 is H0+1,
        azonosak(L0, E, H1, H, L).
azonosak(L, _, H, H, L).
```

# MEGOLDÁSGYŰJTŐ BEÉPÍTETT ELJÁRÁSOK

# Gyűjtés és felsorolás kapcsolata

- Korábban láttuk, hogyan lehet egy keresési feladat gyűjtő és felsoroló eljárásait egy közös magból előállítani.
- Most vizsgáljuk meg, hogyan lehet egy felsoroló eljárást visszavezetni a gyűjtőre, és fordítva:
  - felsorolás gyűjtésből: a `member/2` könyvtári eljárás segítségével, pl.

    ```
    páros_eleme(L, P) :-
        páros_elemei(L, Pk), member(P, Pk).
    ```

    Természetesen ez így nem hatékony!
  - gyűjtés felsorolásból: a megoldásgyűjtő beépített eljárások segítségével, pl.

    ```
    páros_elemei(L, Pk) :-
        % A páros_eleme(L, P) cél összes P megoldásának listája Pk:
        findall(P, páros_eleme(L, P), Pk).
    ```

# A `findall(?Gyűjtő, :+Cél, ?Lista)` beépített eljárás

- **Az eljárás végrehajtása:**
  - **a `Cél` kifejezést eljáráshívásként értelmezi, meghívja**
    (A `:+` annotáció meta- (azaz eljárás) argumentumot jelez);
  - **minden egyes megoldásához előállítja `Gyűjtő` egy *másolatát***
    (a megoldásbeli változók, ha vannak, szisztematikusan újakkal helyettesítődnek);
  - **Az összes `Gyűjtő` értéket egy listába összegyűjti, és ezt egyesíti `Lista`-val.**
- **Példák az eljárás használatára:**

```
| ?- findall(X, (member(X, [1,7,8,3,2,4]), X>3), L).
            ⟹  L = [7,8,4] ? ; no
| ?- findall(X-Y, (between(1, 3, X), between(1, X, Y)), L).
            ⟹  L = [1-1,2-1,2-2,3-1,3-2,3-3] ? ; no
```

- **Az eljárás jelentése:** `Lista` = { `Gyűjtő` másolat | (∃`X`...`Z`)`Cél` igaz }
  ahol `X`, ..., `Z` a **`findall`** hívásban levő szabad változók (azaz olyan, a hívás pillanatában behelyettesítetlen változók, amelyek a `Cél`-ban előfordulnak de a `Gyűjtő`-ben nem).

# A `bagof(?Gyűjtő, :+Cél, ?Lista)` beépített eljárás

- **Az eljárás végrehajtása:**
  - **a `Cél` kifejezést eljáráshívásként értelmezi, meghívja;**
  - **összegyűjti a megoldásait (a `Gyűjtő`-t és a szabad változókat);**
  - **a szabad változók összes behelyettesítését *felsorolja* és mindegyikhez a `Lista`-ban megadja az összes hozzá tartozó `Gyűjtő` értéket.**
- **Példák az eljárás használatára:**

```
gráf([a-b,a-c,b-c,c-d,b-d]).

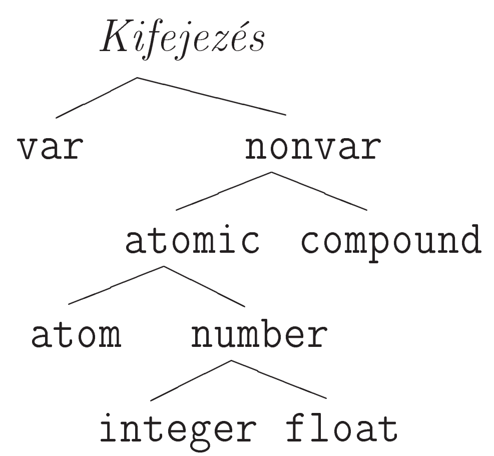
| ?- gráf(_G), findall(B, member(A-B, _G), VegP).
                                ⟹ VegP = [b,c,c,d,d] ? ; no
| ?- gráf(_G), bagof(B, member(A-B, _G), VegP).
                                ⟹ A = a, VegP = [b,c] ? ;
                                    A = b, VegP = [c,d] ? ;
                                    A = c, VegP = [d] ? ; no
```

- **Az eljárás jelentése:** `Lista` $=$ { `Gyűjtő` | `Cél` igaz }, `Lista` $\neq$ `[]`.

# A `bagof` megoldásgyűjtő eljárás (folyt.)

- **Explicit kvantorok**
  - `bagof(Gyűjtő, V1 ^ ...^ Vn ^ Cél, Lista)` **alakú hívása a** `V1, ..., Vn` **változókat egzisztenciálisan kötöttnek tekinti, nem sorolja fel.**
  - **jelentése:** $\texttt{Lista} = \{\ \texttt{Gyűjtő} \mid (\exists \texttt{V1}, \ldots, \texttt{Vn})\texttt{Cél}\ \text{igaz}\ \} \neq \texttt{[]}$.

```
| ?- gráf(_G), bagof(B, A^member(A-B, _G), VegP).
                                   ==> VegP = [b,c,c,d,d] ? ; no
```

- **Egymásba ágyazott gyűjtések**
  - **szabad változók esetén a** `bagof` **nemdet. lehet, így skatulyázható:**

```
% A G irányított gráf fokszámlistája FL:
% FL = { A-N | N = |{ V | A-V ∈ G }|}
fokszámai(G, FL) :-
    bagof(A-N, Vk^(bagof(V, member(A-V, G), Vk),
                   length(Vk, N)                ), FL).

| ?- gráf(_G), fokszámai(_G, FL).  ==> FL = [a-2,b-2,c-1] ? ; no
```

# A `bagof` megoldásgyűjtő eljárás (folyt.)

- **Fokszámlista hatékonyabb előállítása**
  - **a vezérlési szerkezeteket célszerű elkerülni a meta-argumentumokban**
  - **segédeljárás bevezetésével a kvantor is szükségtelenné válik:**

```
% Az A pont foka a G irányított gráfban N>0.
pont_foka(A, G, N) :-  bagof(V, member(A-V, G), Vk), length(Vk, N).

% A G irányított gráf fokszámlistája FL:
fokszámai(G, FL) :-    bagof(A-N, pont_foka(A, G, N), FL).
```

- **Példák a `bagof/3` és `findall/3` közötti kisebb különbségekre:**

```
| ?- findall(X, (between(1, 5, X), X<0), L).   ==> L = [] ? ; no
| ?-   bagof(X, (between(1, 5, X), X<0), L).   ==> no
| ?- findall(S, member(S, [f(X,X),g(X,Y)]), L).
                                  ==> L = [f(_A,_A),g(_B,_C)] ? ; no
| ?-   bagof(S, member(S, [f(X,X),g(X,Y)]), L).
                                  ==> L = [f(X,X),g(X,Y)] ? ; no
```

- **A `bagof/3` logikailag tisztább mint a `findall/3`, de időigényesebb!**

# A `setof(?Gyűjtő, :+Cél, ?Lista)` beépített eljárás

- az eljárás végrehajtása:
  - ugyanaz mint: `bagof(Gyűjtő, Cél, L0), sort(L0, Lista),`
  - itt `sort/2` egy univerzális rendező eljárás (lásd később), amely
  - az eredménylistát rendezi (az ismétlődések kiszűrésével).
- Példa a `setof/3` eljárás használatára:

```
gráf([a-b,a-c,b-c,c-d,b-d]).

% Gráf egy pontja P.
pontja(P, Gráf) :- member(A-B, Gráf), ( P = A ; P = B).

% A G gráf pontjainak listája Pk.
gráf_pontjai(G, Pk) :- setof(P, pontja(P, G), Pk).

| ?- gráf(_G), gráf_pontjai(_G, Pk). ⟹ Pk = [a,b,c,d] ? ; no
```

# META-LOGIKAI ELJÁRÁSOK

# A meta-logikai, azaz a logikán túlmutató eljárások fajtái:

- A Prolog kifejezések pillanatnyi behelyettesítettségi állapotát vizsgáló eljárások (értelemszerűen sorrendfüggőek):
  - kifejezések osztályozása (1)

```
| ?- var(X) /* X változó? */, X = 1. ⟹ X = 1
| ?- X = 1, var(X). ⟹ no
```

  - kifejezések rendezése (4)

```
| ?- X @< 3 /* X megelőzi 3-t? */, X = 4. ⟹ X = 4
     % a változók megelőzik a nem változó kifejezéseket
| ?- X = 4, X @< 3. ⟹ no
```

- Prolog kifejezéseket szétszedő vagy összerakó eljárások:
  - (struktúra) kifejezés ⟺ név és argumentumok (2)

```
| ?- X = f(alma,körte), X =.. L ⟹ L = [f,alma,körte]
```

  - atomok és számok ⟺ karaktereik (3)

```
| ?- atom_codes(A, [0'a,0'b,0'a] ⟹ A = aba
```

# Kifejezések osztályozása

- **Kifejezés-osztályok fastruktúrája — osztályozó beépített eljárások**




| | |
|---|---|
| `var(X)` | `X` **változó** |
| `nonvar(X)` | `X` **nem változó** |
| `atomic(X)` | `X` **konstans** |
| `compound(X)` | `X` **struktúra** |
| `atom(X)` | `X` **atom** |
| `number(X)` | `X` **szám** |
| `integer(X)` | `X` **egész szám** |
| `float(X)` | `X` **lebegőpontos szám** |

- **SICStus-specifikus osztályozó eljárások:**
  - `simple(X)`: `X` **nem összetett (konstans vagy változó);**
  - `ground(X)`: `X` **tömör, azaz nem tartalmaz behelyettesítetlen változót.**
- **Az osztályozó eljárások használata — példák**
  - `var`, `nonvar` **— többirányú eljárásokban a különböző irányok elágaztatása**
  - `number`, `atom`, ... **— nem-megkülönböztetett úniók feldolgozása**

# Osztályozó eljárások: elágaztatás behelyettesítettség alapján

- **Példa: a `length/2` beépített eljárás megvalósítása (SICStus kód!)**

```
% length(?L, ?N): Az L lista N hosszú.
length(L, N) :- var(N), !, length(L, 0, N).
length(L, N) :-          dlength(L, 0, N).
```

```
% length(?L, +I0, -I):
%   Az L lista I-I0 hosszú.
length([], I, I).
length([_|L], I0, I) :-
        I1 is I0+1,
        length(L, I1, I).
```

```
% dlength(?L, +I0, +I):
%   Az L lista I-I0 hosszú.
dlength([], I, I) :- !.
dlength([_|L], I0, I) :-
        I0<I, I1 is I0+1,
        dlength(L, I1, I).
```

```
| ?- length([1,2], Len).  (length/3)   ==>  Len = 2 ? ; no
| ?- length([1,2], 3).    (dlength/3)  ==>  no
| ?- length(L, 3).        (dlength/3)  ==>  L = [_A,_B,_C] ? ; no
| ?- length(L, Len).      (length/3)   ==>  L = [], Len = 0 ? ;
                   L = [_A], Len = 1 ? ; L = [_A,_B], Len = 2 ?
```

# Osztályozó eljárások: nem-megkülönböztetett úniók kezelése

- Példa: egy formula természetes módon ábrázolható Prologban, pl. `x*y+y+1`.
  A formula típusának leírásához nem-megkülönböztetett úniót kell használni:

```
% :- type form == atom \/ int \/ { form+form } \/ { form-form } ...
```

- Példa formulakezelésre: szimbolikus derivált előállítása

```
% deriv(+Kif, +X, ?D):  Kif-nek az X atom szerinti deriváltja D.
deriv(X, X, D) :-   !, D = 1.
deriv(C, _X, D) :-  atomic(C), !, D = 0.
deriv(U+V, X, DU+DV) :-               deriv(U, X, DU), deriv(V, X, DV).
deriv(U-V, X, DU-DV) :-               deriv(U, X, DU), deriv(V, X, DV).
deriv(U*V, X, DU*V + U*DV) :-         deriv(U, X, DU), deriv(V, X, DV).
deriv(U/V, X, (DU*V - U*DV)/(V*V)) :- deriv(U, X, DU), deriv(V, X, DV).

| ?- deriv(x*y+1, x, DX), deriv(x*y+1, y, DY).
                        ==> DX = 1*y+x*0+0, DY = 0*y+x*1+0 ? ; no
| ?- deriv((x+y)*(2+x), x, D).
                        ==> D = (1+0)*(2+x)+(x+y)*(0+1) ? ; no
```

# Struktúrák szétszedése és összerakása: az *univ* eljárás

- Az *univ* eljárás hívási mintái:
  - `+Kif =.. ?Lista`
  - `-Kif =.. +Lista`
- Az eljárás jelentése: Igaz, ha
  - `Kif = ` $Fun(A_1, \ldots, A_n)$ és `Lista = ` $[Fun, A_1, \ldots A_n]$, ahol *Fun* egy atom és $A_1, \ldots A_n$ tetszőleges kifejezések; vagy
  - `Kif = ` $C$ és `Lista = ` $[C]$, ahol $C$ egy konstans.
- Példák

```
| ?- el(a,b,10) =.. L.         ⟹   L = [el,a,b,10]
| ?- Kif =.. [el,a,b,10].      ⟹   Kif = el(a,b,10)
| ?- alma =.. L.               ⟹   L = [alma]
| ?- Kif =.. [1234].           ⟹   Kif = 1234
| ?- Kif =.. L.                ⟹   hiba
| ?- f(a,g(10,20)) =.. L.      ⟹   L = [f,a,g(10,20)]
| ?- Kif =.. [/,X,2+X].        ⟹   Kif = X/(2+X)
| ?- [a,b,c] =.. L.            ⟹   L = ['.',a,[b,c]]
```

# Struktúrák szétszedése és összerakása: a `functor` eljárás

- `functor/3`: **kifejezés funktorának, adott funktorú kifejezésnek az előállítása**
  - **Hívási minták:** `functor(-Kif, +Név, +Argszám)`
    `functor(+Kif, ?Név, ?Argszám)`
  - **Jelentése: igaz, ha `Kif` egy `Név/Argszám` funktorú kifejezés.**
    - **A konstansok 0-argumentumú kifejezésnek számítanak.**
    - **Ha `Kif` kimenő, az adott funktorú legáltalánosabb kifejezéssel egyesíti (argumentumaiban csupa különböző változóval).**
- **Példák:**

```
| ?- functor(el(a,b,1), F, N).     ⟹  F = el, N = 3
| ?- functor(E, el, 3).            ⟹  E = el(_A,_B,_C)
| ?- functor(alma, F, N).          ⟹  F = alma, N = 0
| ?- functor(Kif, 122, 0).         ⟹  Kif = 122
| ?- functor(Kif, el, N).          ⟹  hiba
| ?- functor(Kif, 122, 1).         ⟹  hiba
| ?- functor([1,2,3], F, N).       ⟹  F = '.', N = 2
| ?- functor(Kif, ., 2).           ⟹  Kif = [_A|_B]
```

# Struktúrák szétszedése és összerakása: az arg eljárás

- `arg/3`: kifejezés adott sorszámú argumentuma.
  - Hívási minta: `arg(+Sorszám, +StrKif, ?Arg)`
  - Jelentése: A `StrKif` struktúra `Sorszám`-adik argumentuma `Arg`.
  - Végrehajtása: `Arg`-ot az adott sorszámú argumentummal *egyesíti* (kétirányúság!).
- Példák:

```
| ?- arg(3, el(a, b, 23), Arg).     ⟹  Arg = 23
| ?- K=el(_,_,_), arg(1, K, a),
     arg(2, K, b), arg(3, K, 23). ⟹  K = el(a,b,23)
| ?- arg(1, [1,2,3], A).            ⟹  A = 1
| ?- arg(2, [1,2,3], B).            ⟹  B = [2,3]
```

- Az *univ* visszavezethető a `functor` és `arg` eljárásokra (és viszont), például:

```
Kif =.. [F,A1,A2]   ⟺   functor(Kif, F, 2),
                          arg(1, Kif, A1), arg(2, Kif, A2)
```

# Az *univ* alkalmazása: ismétlődő sémák összevonása

- **A feladat: egy szimbolikus aritmetikai kifejezésben a kiértékelhető (infix) részkifejezések helyettesítése az értékükkel.**
- **1. megoldás, *univ* nélkül:**

```
% Az X szimbolikus kifejezés egyszerűsítése EX.
egysz0(X, EX) :- atomic(X), !, EX = X.
egysz0(U+V, EKif) :-
    egysz0(U, EU), egysz0(V, EV), kiszamol(EU+EV, EU, EV, EKif).
egysz0(U*V, EKif) :-
    egysz0(U, EU), egysz0(V, EV), kiszamol(EU*EV, EU, EV, EKif).
%...
% EU és EV részekből képzett EUV egyszerűsítése EKif.
kiszamol(EUV, EU, EV, EKif) :-
        number(EU), number(EV), !, EKif is EUV.
kiszamol(EUV, _, _, EUV).
```

```
| ?- deriv((x+y)*(2+x), x, D), egysz0(D, ED).
    ⟹ D = (1+0)*(2+x)+(x+y)*(0+1), ED = 1*(2+x)+(x+y)*1 ? ; no
```

# Az *univ* alkalmazása: ismétlődő sémák összevonása (folyt.)

- **Kifejezés-egyszerűsítés, 2. megoldás, *univ* segítségével**

```
egysz(X, EX) :- atomic(X), !, EX = X.
egysz(Kif, EKif) :-
     Kif =.. [Muv,U,V],     % Kif = Muv(U,V)
     egysz(U, EU), egysz(V, EV),
     EUV =.. [Muv,EU,EV],  % EUV = Muv(EU,EV)
     kiszamol(EUV, EU, EV, EKif).
```

- **Kifejezés-egyszerűsítés, általánosítás tetszőleges *tömör* kifejezésre:**

```
egysz1(Kif, EKif) :-
     Kif =.. [M|ArgL], egysz1_lista(ArgL, EArgL), EKif0 =.. [M|EArgL],
     % catch(:+Cél,?Kiv,:+KCél): ha Cél kivételt dob, KCél-t futtatja:
     catch(EKif is EKif0, _, EKif = EKif0).

egysz1_lista([], []).
egysz1_lista([K|Kk], [E|Ek]) :- egysz1(K, E), egysz1_lista(Kk, Ek).

| ?- egysz1(f(1+2+a, exp(3,2), a+1+2), E). ⟹ E = f(3+a,9.0,a+1+2)
```

# *Univ* alkalmazása általános kifejezés-bejárásra: kiiratás

- A feladat: egy tetszőleges kifejezés kiiratása úgy, hogy
  - a kétargumentumú operátorok zárójelezett infix formában,
  - minden más alap-struktúra alakban jelenjék meg.

```
ki(Kif) :- compound(Kif), !, /* Kif itt biztosan nem változó: */
    Kif =.. [Func, A1|ArgL],
    ( current_op(_, Kind, Func), (Kind=xfy;Kind=yfx;Kind=xfx),
      ArgL = [A2] ->  % kétargumentumú operátor
      write('('), ki(A1), format(' ~w ', [Fun]), ki(A2), write(')')
    ; write(Func), write('('), ki(A1), arglistaki(ArgL), write(')')
    ).
ki(Kif) :- write(Kif).

% Az [A1,...,An] listát ",A1,...,An" alakban kiírja.
arglistaki([]).
arglistaki([A|AL]) :- write(','), ki(A), arglistaki(AL).

| ?- ki(f(+a, X*c*X, e)).  ⟹  f(+(a),((_117 * c) * _117),e)
```

## *Univ* alkalmazása általános kifejezés-bejárásra: változómentesítés

- A SICStus Prologban beépített `numbervars(?Kif, +N0, ?N)` eljárás hatása:
  - A tetszőleges `Kif` minden változóját `'$VAR'(I)` alakú kifejezéssel helyettesíti, `I = N0, ..., N-1` (azaz `Kif`-ben `N-N0` különböző változó van).
- A `'$VAR'(0), '$VAR'(1), ...` kifejezések `write`-tal való kiíráskor változónévként (`A, B ...`) jelennek meg.
- Ezek speciális opciókkal `write_term`-mel „eredetiben” is megjeleníthetők:

```
| ?- _Kif = [f(_X),g(_),_X], numbervars(_Kif, 0, N), write(_Kif), nl,
       write_term(_Kif, [quoted(true),numbervars(false)]).
==>       [f(A),g(B),A]
          [f('$VAR'(0)),g('$VAR'(1)),'$VAR'(0)]
          N = 2
```

- A feladat: elkészítendő egy `numbervars1/3` eljárás, amely `'$VAR'` helyett `'$myvar'` funktort használ.

# Általános kifejezés-bejárás *univ*-val : saját változómentesítés

```
% A Term kifejezésben levő változókat '$myvar(I)' stb.
% struktúrákkal helyettesíti be, I = N0, ... N-1.
numbervars1(Term, N0, N) :- var(Term), !,
        Term = '$myvar'(N0), N is N0+1.
numbervars1(Term, N0, N) :-
        Term =.. [_|Args], numbervars1_list(Args, N0, N).

% numbervars1_list(L, N0, N): Az L listában levő változókat
% '$myvar(I)' stb. struktúrákkal helyettesíti be, I = N0, ... N-1.
numbervars1_list([], N, N).
numbervars1_list([A|As], N0, N) :-
        numbervars1(A, N0, N1), numbervars1_list(As, N1, N).

| ?- Kif = [f(_X),g(_),_X], numbervars1(Kif, 0, N).
       ⟹ N = 2,
          Kif = [f('$myvar'(0)),g('$myvar'(1)),'$myvar'(0)]
```

# *Univ* alkalmazása: részkifejezések keresése

- A feladat: egy tetszőleges kifejezéshez soroljuk fel a benne levő számokat, és minden szám esetén adjuk meg annak a ***kiválasztóját***!
- Egy részkifejezés kiválasztója egy olyan lista, amely megadja, mely argumentumpozíciók mentén juthatunk el hozzá.
- Az $[i_1, i_2, \ldots, i_k]$ lista egy `Kif`-ből az $i_1$-edik argumentum $i_2$-edik argumentumának, $\ldots i_k$-adik argumentumát választja ki.
- Pl. `a*b+f(1,2,3)/c`-ben `b` kiválasztója `[1,2]`, `3` kiválasztója `[2,1,3]`.

```
% kif_szám(?Kif, ?N, ?Kiv): Kif Kiv kiválasztójú része az N szám.
kif_szám(X, N, Kiv) :- number(X), !, N = X, Kiv = [].
kif_szám(X, N, [I|Kiv]) :-
        compound(X), % a változó kizárása miatt fontos!
        functor(X, F, N), between(1, N, I), arg(I, X, X1),
        kif_szám(X1, N, Kiv).

| ?- kif_szám(f(1,[b,2]), N, K). ⟹ K=[1],N=1? ; K=[2,2,1],N=2? ; no
```

# Atomok szétszedése és összerakása

- `atom_codes/2`: **atom és karakterkód-lista közötti átalakítás**
  - **Hívási minták:** `atom_codes(+Atom, ?KódLista)`
    `atom_codes(-Atom, +KódLista)`
  - **Jelentése: Igaz, ha** `Atom` **karakterkódjainak a listája** `KódLista`**.**
  - **Végrehajtása:**
    - **Ha** `Atom` **bemenő, és a** $c_1 c_2 \ldots c_n$ **karakterekből áll, akkor** `KódLista` = [$k_1, k_2, \ldots, k_n$]**, ahol** $k_i$ **a** $c_i$ **karakter kódja.**
    - **Ha** `Atom` **kimenő, akkor a** `KódLista` **karakterkód-listából összerak egy atomot, és azt egyesíti** `Atom`**-mal.**
- **Példák:**

```
| ?- atom_codes(ab, Cs).               ==> Cs = [97,98]
| ?- atom_codes(ab, [0'a|L]).          ==> L = [98]
| ?- Cs="bc", atom_codes(Atom, Cs).    ==> Cs = [98,99], Atom = bc
| ?- atom_codes(Atom, [0'a|L]).        ==> hiba
```

# Atomok szétszedése és összerakása — alkalmazási példák

- **Keresés atomokban**

```
% Atom-ban a Rész nem üres részatom kétszer ismétlődik.
dadogó_rész(Atom, Rész) :-
    atom_codes(Atom, Cs), dadogó(Cs, Ds), atom_codes(Rész, Ds).

% L-ben a D nem üres részlista kétszer ismétlődik (lásd korábban).
dadogó(L, D) :- D = [_|_],
    append(_, Farok, L), append(D, Vég, Farok), append(D, _, Vég).

| ?- dadogó_rész(babaruhaha, R).    ==>  R = ba ? ; R = ha ? ; no
```

- **Atomok összefűzése**

```
% atom_concat(+A, +B, ?C): A és B atomok összefűzése C.
% (Szabványos beépített eljárás atom_concat(?A, ?B, +C) módban is.)
atom_concat(A, B, C) :- atom_codes(A, Ak), atom_codes(B, Bk),
    append(Ak, Bk, Ck),  atom_codes(C, Ck).

| ?- atom_concat(abra, kadabra, A). ==> A = abrakadabra ?
```

# Számok szétszedése és összerakása

- `number_codes/2`: **szám és karakterkód-lista közötti átalakítás**
  - **Hívási minták:** `number_codes(+Szám, ?KódLista)`
    `number_codes(-Szám, +KódLista)`
  - **Jelentése: Igaz, ha** `Szám` **tizes számrendszerbeli alakja a** `KódLista` **karakterkód-listának felel meg.**
  - **Végrehajtása:**
    - **Ha** `Szám` **bemenő, és tizes számrendszerben a** $c_1c_2...c_n$ **karakterekből áll, akkor** `KódLista = [`$k_1, k_2, ..., k_n$`]`, **ahol** $k_i$ **a** $c_i$ **karakter kódja.**
    - **Ha** `Szám` **kimenő, akkor a** `KódLista` **karakterkód-listából összerak egy számot, és azt egyesíti** `Szám`**-mal.**
- **Példák:**

```
| ?- number_codes(12, Cs).              ⟹ Cs = [49,50]
| ?- number_codes(0123, [0'1|L]).       ⟹ L = [50,51]
| ?- number_codes(N, " - 12.0e1").      ⟹ N = -120.0
| ?- number_codes(N, "12e1").           ⟹ hiba (nincs .0)
```

# Kifejezések rendezése: szabványos sorrend

Legyen $X$ és $Y$ két tetszőleges Prolog kifejezés, ha $X$ megelőzi $Y$-t, azt írjuk, hogy $X \prec Y$.

1. Ha $X$ és $Y$ azonos, akkor sem $X \prec Y$ sem $Y \prec X$ nem igaz és fordítva.
2. Ha $X$ és $Y$ különböző kifejezésosztályba tartozik, akkor az osztály dönt: *változó* $\prec$ *lebegőpontos szám* $\prec$ *egész szám* $\prec$ *név* $\prec$ *struktúra*.
3. Ha $X$ és $Y$ változó, akkor az eredmény rendszerfüggő.
4. Ha $X$ és $Y$ lebegőpontos vagy egész szám, akkor $X \prec Y \Leftrightarrow X < Y$.
5. Ha $X$ és $Y$ név, akkor sorrendjük megegyezik az abc sorrenddel.
6. Ha $X$ és $Y$ struktúrák:
   - 6.1. Ha $X$ és $Y$ aritása különböző, $X \prec Y \Leftrightarrow X$ aritása kisebb mint $Y$ aritása.
   - 6.2. Egyébként, ha a rekordok neve különböző, $X \prec Y \Leftrightarrow X$ neve $\prec Y$ neve.
   - 6.3. Egyébként balról az első nem azonos argumentum dönt.

Végtelen (ciklikus) kifejezésekre a fenti rendezés nem érvényes.

# Kifejezések összehasonlítása — beépített eljárások

- Két tetszőleges kifejezés összehasonlítását végző eljárások:

| hívás | igaz, ha |
|---|---|
| `Kif1 == Kif2` | $\mathtt{Kif1} \not\prec \mathtt{Kif2} \wedge \mathtt{Kif2} \not\prec \mathtt{Kif1}$ |
| `Kif1 \== Kif2` | $\mathtt{Kif1} \prec \mathtt{Kif2} \vee \mathtt{Kif2} \prec \mathtt{Kif1}$ |
| `Kif1 @< Kif2` | $\mathtt{Kif1} \prec \mathtt{Kif2}$ |
| `Kif1 @=< Kif2` | $\mathtt{Kif2} \not\prec \mathtt{Kif1}$ |
| `Kif1 @> Kif2` | $\mathtt{Kif2} \prec \mathtt{Kif1}$ |
| `Kif1 @>= Kif2` | $\mathtt{Kif1} \not\prec \mathtt{Kif2}$ |

- Az összehasonlító eljárások logikailag nem tiszták:

`| ?- X @< 3, X = 4.` $\Longrightarrow$ `X = 4`
`| ?- X = 4, X @< 3.` $\Longrightarrow$ `no`

- Az összehasonlítás mindig a belső ábrázolás szerint történik:

`| ?- [1, 2, 3, 4] @< struktúra(1, 2, 3).` $\Longrightarrow$ **sikerül (6.1 szabály)**

# A meta-logikai eljárások egy komplex alkalmazása: $\prec$ megvalósítása

```
% T1 megelőzi T2-t a szabványos sorrendben (lényegében T1 @< T2)
precedes(T1, T2) :- \+ \+ (numbervars1(T1-T2, 0, _), prec(T1, T2)).

% T1 megelőzi T2-t, a változók már '$myvar'(n) konstansokra cseréltek.
prec(T1, T2) :- class(T1, C1), class(T2, C2),
        (   C1 =:= C2 ->
            (   C1 =:= 1 -> T1 < T2   % 4. szabály (lebegőpontos szám)
            ;   C1 =:= 2 -> T1 < T2   % 4. szabály (egész szám)
            ;   struct_prec(T1, T2)   % 3., 5. és 6. szabály
            )                         % (változó, név, struktúra)
        ;   C1 < C2
        ).

% class(+T, -C): A T kifejezés a C-edik kifejezésosztályba tartozik.
class(T, C) :- ( /*vált*/ T='$myvar'(_) -> C=0
               ; /*szám*/ float(T) ->   C=1 ; integer(T) -> C=2
               ; /*atom*/ atom(T) ->    C=3 ; /*struktúra*/ C=4
               ).
```

# A $\prec$ reláció megvalósítása (folyt.)

```
% S1 megelőzi S2-t (struktúra-kifejezésekre és atomokra).
struct_prec(S1, S2) :- functor(S1, F1, N1), functor(S2, F2, N2),
    (   N1 < N2 -> true
        N1 = N2, (   F1 = F2 -> args_prec(1, N1, S1, S2)
                 ;   atom_prec(F1, F2)
                 )
    ).

% Az S1 struktúra-kifejezés N0, ..., N sorszámú argumentumai
% lexikografikusan megelőzik S2 azonos sorszámú argumentumait.
args_prec(N0, N, S1, S2) :- N0 =< N, arg(N0, S1, A1), arg(N0, S2, A2),
    (   A1 = A2 -> N1 is N0+1, args_prec(N1, N, S1, S2)
    ;   prec(A1, A2)
    ).

% A1 atom megelőzi A2 atomot (előfeltétel: A1 \= A2).
atom_prec(A1, A2) :-
    atom_codes(A1, C1), atom_codes(A2, C2), struct_prec(C1, C2).
```

# EGYENLŐSÉGFAJTÁK — ÖSSZEFOGLALÁS

# A Prolog egyenlőség-szerű beépített eljárásai

| | |
|---|---|
| • `U = V`: `U` egyesítendő `V`-vel. Soha sem jelez hibát. | `\| ?- X = 1+2.` ⟹ `X = 1+2`<br>`\| ?- 3 = 1+2.` ⟹ `no` |
| • `U == V`: `U` azonos `V`-vel. Soha sem jelez hibát és soha sem helyettesít be. | `\| ?- X == 1+2.` ⟹ `no`<br>`\| ?- 3 == 1+2.` ⟹ `no`<br>`\| ?- +(1,2)==1+2` ⟹ `yes` |
| • `U =:= V`: Az `U` és `V` aritmetikai kifejezések értéke megegyezik. Hibát jelez, ha `U` vagy `V` nem (tömör) aritmetikai kifejezés. | `\| ?- X =:= 1+2.` ⟹ hiba<br>`\| ?- 1+2 =:= X.` ⟹ hiba<br>`\| ?- 2+1 =:= 1+2.` ⟹ `yes`<br>`\| ?- 2.0 =:= 1+1.` ⟹ `yes`<br>`\| ?- 2.0 is 1+1.` ⟹ `no` |
| • `U is V`: `U` egyesítendő a `V` aritmetikai kifejezés értékével. Hiba, ha `V` nem (tömör) aritmetikai kifejezés. | `\| ?- X is 1+2.` ⟹ `X = 3`<br>`\| ?- 1+2 is X.` ⟹ hiba<br>`\| ?- 3 is 1+2.` ⟹ `yes`<br>`\| ?- 1+2 is 1+2.` ⟹ `no` |
| • (`U =.. V`: `U` „szétszedettje” a `V` lista) | `\| ?- 1+2 =.. X.` ⟹ `X = [+,1,2]`<br>`\| ?- X =.. [f,1].` ⟹ `X = f(1)` |

# A Prolog nem-egyenlőség jellegű beépített eljárásai

- A nem-egyenlőség jellegű eljárások sohasem helyettesítenek be változót!
  - `U \= V`: `U` nem egyesíthető `V`-vel. Soha sem jelez hibát.
    ```
    | ?- X \= 1+2.          ⟹ no
    | ?- +(1,2) \= 1+2.     ⟹ no
    ```
  - `U \== V`: `U` nem azonos `V`-vel. Soha sem jelez hibát.
    ```
    | ?- X \== 1+2.         ⟹ yes
    | ?- 3 \== 1+2.         ⟹ yes
    | ?- +(1,2)\==1+2       ⟹ no
    ```
  - `U =\= V`: Az `U` és `V` aritmetikai kifejezések értéke különbözik. Hibát jelez, ha `U` vagy `V` nem (tömör) aritmetikai kifejezés.
    ```
    | ?- X =\= 1+2.         ⟹ hiba
    | ?- 1+2 =\= X.         ⟹ hiba
    | ?- 2+1 =\= 1+2.       ⟹ no
    | ?- 2.0 =\= 1+1.       ⟹ no
    ```

# A Prolog (nem-)egyenlőség jellegű beépített eljárásai — példák

| | | *Egyesítés* | | *Azonosság* | | *Aritmetika* | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *U* | *V* | `U = V` | `U \= V` | `U == V` | `U \== V` | `U =:= V` | `U =\= V` | `U is V` |
| `1` | `2` | *no* | `yes` | *no* | `yes` | *no* | `yes` | *no* |
| `a` | `b` | *no* | `yes` | *no* | `yes` | error | error | error |
| `1+2` | `+(1,2)` | `yes` | *no* | `yes` | *no* | `yes` | *no* | *no* |
| `1+2` | `2+1` | *no* | `yes` | *no* | `yes` | `yes` | *no* | *no* |
| `1+2` | `3` | *no* | `yes` | *no* | `yes` | `yes` | *no* | *no* |
| `3` | `1+2` | *no* | `yes` | *no* | `yes` | `yes` | *no* | `yes` |
| `X` | `1+2` | `X=1+2` | *no* | *no* | `yes` | error | error | `X=3` |
| `X` | `Y` | `X=Y` | *no* | *no* | `yes` | error | error | error |
| `X` | `X` | `yes` | *no* | `yes` | *no* | error | error | error |

**Jelmagyarázat:** `yes` — **siker;** *no* — **meghiúsulás, error — hiba.**

# MODULARITÁS

# Modulok definiálása SICStus Prolog nyelven

- A SICStus Prolog modulfogalmának jellemzői:
  - Minden modul külön állományba kell kerüljön.
  - Az állomány első programeleme egy modul-parancs kell legyen:

    `:- module(` *Modulnév*`, [`*ExpFunktor1*`, `*ExpFunktor2*`, ...]).`

    *ExpFunktor* = az exportálandó eljárás funktora (név/argumentumszám)
  - Pl. `:- module(platók, [fennsík/3]).` *% plato állomány első sora*
  - Modul-betöltésre szolgáló beépített eljárások:
    - `use_module(`*ÁllományNév*`)`
    - `use_module(`*ÁllományNév*`, [`*ImpFunktor1*`,`*ImpFunktor2*`,...])`

      *ImpFunktor* — az importálandó eljárás funktora
    - *ÁllományNév* lehet atom, vagy pl. `library(`*KönyvtárNév*`)`:

      ```
      :- use_module(plato).                    % a fenti modul betöltése
      :- use_module(library(lists), [last/2]). % csak last/2 importált
      ```
  - A modulfogalom nem szigorú: `platók:első_fennsík(...)` meghívható!
  - Modulkvalifikált hívási forma: *ModulNév*:*EljárásNév*(*Argumentumok* ...).

# Meta-eljárások modularizált programban

- Eljárások átadása paraméterként modulközi hívásban gondot okozhat:
  - `m1.pl` állomány:

```
:- module(m1, [kétszer/1]).
kétszer(X) :- X, X.                              p :- write(bu).
```

  - `m2.pl` állomány:

```
:- module(m2, [q/0,r/0]).
:- use_module(m1).
q :- kétszer(p).  r :- kétszer(m2:p).            p :- write(ba).
```

  - Futtatás:

```
| ?- [m1,m2].
| ?- q.  ⟹ bubu
| ?- r.  ⟹ baba
```

  - Automatikus modul-kvalifikáció meta-predikátum deklarációval:
    Ha `m1.pl`-be beszúrjuk: `:- meta_predicate kétszer(:).`, akkor
    `| ?- q.` ⟹ `baba`!

# Meta-predikátum deklaráció, modulnév-kiterjesztés

- Meta-predikátum deklaráció
  - Formája:
    `:- meta_predicate ⟨eljárásnév⟩(⟨módspec`$_1$`⟩, ..., ⟨módspec`$_n$`⟩), ....`
  - `⟨módspec`$_i$`⟩` lehet `':'`, `'+'`, `'-'`, `vagy` `'?'`.
  - `A ':' mód azt jelzi, hogy az adott argumentumot betöltéskor ún. modulnév-kiterjesztésnek kell alávetni.`
- Egy *Kif* kifejezés modulnév-kiterjesztése:
  - ha *M*:*X* alakú (vagy egy olyan változó, amely az adott eljárás fejében meta-argumentum pozíción szerepelt) akkor változatlanul hagyjuk;
  - egyébként helyettesítjük *CurMod*:*Kif*-fel (*CurMod* a kurrens modul).
- Példa folyt. (az `m1`-beli `kétszer` meta-predikátumnak deklarált!)

```
:- module(m2, [négyszer/1,q/0]). :- use_module(m1).
q :- kétszer(p).                          ⟹ q :- kétszer(m2:p).
:- meta_predicate négyszer(:).
négyszer(X) :- kétszer(X), kétszer(X). ⟹ változatlan
```

# MAGASABBRENDŰ ELJÁRÁSOK

# Magasabbrendű eljárások — listakezelés

- Magasabbrendű (vagy meta-eljárás) egy eljárás,
  - ha eljárásként értelmezi egy vagy több argumentumát
  - pl. `call/1`, `findall/3`, `\+ /1`, `stb.`
- Listafeldolgozás `findall` segítségével, példák:

```
% Az L egész-lista páros elemeinek listája Pk.
páros_elemei(L, Pk) :-
        findall(X, (member(X, L), X mod 2 =:= 0), Pk).

% Az L számlista  elemei négyzeteinek listája Nk.
négyzetei(L, Nk) :-
        findall(Y, (member(X, L), Y is X*X), Nk).

| ?- páros_elemei([1,2,3,4], Pk). ⟹ Pk = [2,4]

| ?- négyzetei([1,2,3,4], Nk).    ⟹ Nk = [1,4,9,16]
```

# Listakezelő meta-eljárások megoldásgyűjtő eszközökkel

- **Lista szűrése (vö. a `filter` SML függvénnyel!)**

```
% Az L lista X elemeinek Pred szerinti szűrése FL.
:- meta_predicate filter(+, ?, :, -).
filter(L, X, Pred, FL) :-
        findall(X, (member(X, L), call(Pred)), FL).

| ?- filter([1,2,3,4], X, X mod 2 =:= 0, Pk).  ⟹ Pk = [2,4]
```

- **Lista leképezése (vö. a `map` SML függvénnyel!)**

```
% Az L lista X elemeit Pred-del Y-ba képezve kapjuk az ML listát.
:- meta_predicate map(+, ?, :, ?, -).
map(L, X, Pred, Y, ML) :-
        findall(Y, (member(X, L), Pred), ML).

| ?- map([1,2,3,4], X, Y is X*X, Y, Nk).       ⟹ Nk = [1,4,9,16]
```

- **A példákban a szűrést az ⟨`X, Pred`⟩ argumentumpár, a leképezést az ⟨`X, Pred, Y`⟩ hármas határozza meg. Ezek egy egy- ill. kétargumentumú predikátumot adnak meg (vö. a funkcionális nyelvek $\lambda$-kifejezéseivel).**

# Részlegesen paraméterezett eljáráshívások

- A listát elemenként négyzetreemelő eljárás egy másik változata:

```
négyzete(X, Y) :- Y is X*X.

négyzeteik(Xk, Yk) :- map(Xk, X, négyzete(X,Y), Y, Yk).
```

- A lista elemeire az $x \to x^2 + \mathtt{P}x + \mathtt{Q}$ hozzárendelést alkalmazó eljárás:

```
másodfokú_képe(P, Q, X, Y) :- Y is X*X + P*X + Q.

másodfokú_képeik(P, Q, Xk, Yk) :-
        map(Xk, X, másodfokú_képe(P,Q,X,Y), Y, Yk).
```

- Konvenció: a meta-alkalmazásban változó paramétereket az eljárás végére tesszük — így egyszerűsíthető a meta-eljárás hívása. Példa: `map/3`:

```
map(Xk, RészlPred, Yk) :-
        RészlPred =.. L0, append(L0, [X,Y], L), Pred =.. L,
        findall(Y, (member(X, Xk), Pred), Yk).

másodfokú_képeik(P, Q, Xk, Yk) :- map(Xk, másodfokú_képe(P,Q), Yk).
```

# Részlegesen paraméterezett eljáráshívások — segédeszközök

- **A `call/1` eljárás általánosítása: a `call/2`, `call/3`, ...eljárások.**
- `call(RPred, A1, A2, ...)` **végrehajtása: az `RPred` hívást kiegészíti az `A1, A2, ...` argumentumokkal, és meghívja.**
- **A `call/N` eljárások sok Prologban beépítettek, SICStusban definiálandók:**

```
:- meta_predicate call(:, ?), call(:, ?, ?), ....

% Pred az A utolsó argumentummal meghívva igaz.
call(M:Pred, A) :-
        Pred =.. FAs0, append(FAs0, [A], FAs1), Pred1 =.. FAs1,
        call(M:Pred1).

% Pred az A és B utolsó argumentumokkal meghívva igaz.
call(M:Pred, A, B) :-
        Pred =.. FAs0, append(FAs0, [A,B], FAs2), Pred2 =.. FAs2,
        call(M:Pred2).

...
```

# Részlegesen paraméterezett eljárások — rekurzív `map/3`

- `map/3` **rekurzív definíciója:**

```
% map(Xs, Pred, Ys): Az Xs lista elemeire a Pred transzformációt
% alkalmazva kapjuk az Ys listát.
map([X|Xs], Pred, [Y|Ys]) :-
        call(Pred, X, Y), map(Xs, Pred, Ys).
map([], _, []).
```

- **Példák:**

```
| ?- map([1,2,3,4], négyzete, L).             ⟹ L = [1,4,9,16]
| ?- map([1,2,3,4], másodfokú_képe(2,1), L). ⟹ L = [4,9,16,25]
```

- **A** `call/N`**-re épülő megoldás előnyei:**
  - **hatékonyabb és általánosabb mint a** `findall`**-ra épülő;**
  - **alkalmazható akkor is, ha az elemekre elvégzendő műveletek nem függetlenek, pl.** `foldl`**.**

# Rekurzív meta-eljárások — foldl és foldr

```
% foldl(Xs, Pred, Y0, Y): Az Xs elemeire balról jobbra alkalmazott,
% a Pred által leírt kétargumentumú függvény Y0 kezdőértékre
% alkalmazott eredménye Y.
foldl([X|Xs], Pred, Y0, Y) :-
        call(Pred, X, Y0, Y1), foldl(Xs, Pred, Y1, Y).
foldl([], _, Y, Y).

jegyhozzá(A, J, E0, E) :- E is E0*A+J.

| ?- foldl([1,2,3], jegyhozzá(10), 0, E).  ⟹ E = 123


% foldr(Xs, Pred, Y0, Y): Az Xs elemeire jobbról balra alkalmazott, a
% Pred által leírt függvény Y0 kezdőértékre alkalmazott eredménye Y.
foldr([X|Xs], Pred, Y0, Y) :-
        foldr(Xs, Pred, Y0, Y1), call(Pred, X, Y1, Y).
foldr([], _, Y, Y).

| ?- foldr([1,2,3], jegyhozzá(10), 0, E).  ⟹ E = 321
```

# DINAMIKUS ADATBÁZISKEZELÉS

# Dinamikus predikátumok

- A dinamikus predikátum jellemzői:
  - a program szövegében lehet 0 vagy több klóza;
  - futási időben hozzáadhatunk és elvehetünk klózokat belőle;
  - végrehajtása mindenképpen interpretált.
- Létrehozása
  - programszövegbeli deklarációval:

    `:- dynamic(Eljárásnév/Argumentumszám).`

    (ha van klóza a programban, akkor az első előtt — ilyenkor kötelező);
  - futási időben, adatbáziskezelő beépített eljárással
- Adatbáziskezelő eljárások („adatbázis” = a program klózainak összessége):
  - klóz felvétele első, utolsó helyre: `asserta/1`, `assertz/1`
  - klóz törlése (illesztéssel, többszörösen sikerülhet): `retract/1`
  - klóz lekérdezése (illesztéssel, többszörösen sikerülhet): `clause/2`

# Klóz felvétele: `asserta/1`, `assertz/1`

- `asserta(:@Klóz)`
  - **A** `Klóz` **kifejezést klózként értelmezve felveszi a programba az adott predikátum *első* klózaként.**
  - **A** `'@' mód jelentése: tisztán bemenő paraméter, az eljárás a paraméterbeli változókat nem helyettesíti be (a '+' mód speciális esete).`
  - **A** `':' mód modul-kvalifikált paramétert jelez.`
- `assertz(:@Klóz)`
  - **A** `Klóz` **kifejezést az adott predikátum *utolsó* klózaként veszi fel**
- **Példa:**

```
| ?- assertz((p(1,X):-q(X))), asserta(p(2,0)),
     assertz((p(2,Z):-r(Z))), listing(p).

p(2, 0).
```

```
p(1, A) :-   q(A).
p(2, A) :-   r(A).
```

# Klóz törlése: `retract/1`

- `retract(:@Klóz)`
  - A `Klóz` klóz-kifejezésből megállapítja a predikátum funktorát.
  - Az adott predikátum klózait sorra megpróbálja illeszteni `Klóz`-zal.
  - Ha az illesztés sikerült, akkor kitörli a klózt és sikeresen lefut.
  - Visszalépés esetén folytatja a keresést (illeszt, töröl, sikerül, stb.)
- Példa (folytatás):

```
| ?- listing(p), retract((p(2,_):-_)), listing(p), fail. ⟹ no
```

- A futás kimenete:

```
p(2, 0).                 | p(1, A) :-               | p(1, A) :-
p(1, A) :-               |         q(A).            |         q(A).
        q(A).            | p(2, A) :-               |
p(2, A) :-               |         r(A).            |
        r(A).            |                          |
```

# Alkalmazási példa — egyszerűsített `findall`

- **A `findall1/3` eljárás hatása megegyezik a beépített `findall`-lal, de**
- **nem működik helyesen, ha a `Cél`-ban újabb `findall1` hívás van.**

```
:- dynamic(megoldás/1).

% findall1(Minta, Cél, L): Cél összes megoldására Minták listája L.
findall1(Minta, Cél, _MegoldL) :-
    call(Cél), asserta(megoldás(Minta)),  fail.     % fordított sorrend!
findall1(_Minta, _Cél, MegoldL) :-
    megoldás_lista([], MegoldL).

% A megoldás/1 tényállításokban tárolt kifejezések fordított listája L-L0.
megoldás_lista(L0, L) :-
    retract(megoldás(M)), !, megoldás_lista([M|L0], L).
megoldás_lista(L, L).

| ?- findall1(Y, (member(X, [1,2,3]), Y is X*X), ML). ⟹ ML = [1,4,9]
```

# Klóz lekérdezése: `clause/2`

- `clause(:@Fej, ?Törzs)`
  - A `Fej` alapján megállapítja a predikátum funktorát.
  - Az adott predikátum klózait sorra megpróbálja illeszteni a `Fej :- Törzs` kifejezéssel (tényállítás esetén `Törzs = true`).
  - Ha az illesztés sikerült, akkor sikeresen lefut.
  - Visszalépés esetén folytatja a keresést (illeszt, sikerül, stb.)
- Példa:

```
:- listing(p), clause(p(2, 0), T).
```

| | |
|---|---|
| `p(2, 0).`<br>`p(1, A) :-`<br>`        q(A).`<br>`p(2, A) :-`<br>`        r(A).` | `T = true ? ;`<br>`T = r(0) ? ;`<br>`no` |

# A `clause` eljárás alkalmazása: egyszerű nyomkövető interpreter

```
% interp(G, D): A G cél futását D bekezdésű nyomkövetéssel mutatja.
interp(true, _) :- !.
interp((G1, G2), D) :- !,
    interp(G1, D), interp(G2, D).
interp(G, D) :-
    (   trace(G, D, call)
    ;   trace(G, D, fail), fail   % követi a fail kaput, tovább-hiúsul
    ),
    D2 is D+2, clause(G, B), interp(B, D2),
    (   trace(G, D, exit)
    ;   trace(G, D, redo), fail   % követi a redo kaput, tovább-hiúsul
    ).

% A G cél áthaladását a Port kapun D bekezdésű nyomkövetéssel mutatja.
trace(G, D, Port) :-
    /*D szóközt ír ki:*/ tab(D), write(Port), write(': '), write(G), nl.
```

# Nyomkövető interpreter - példafutás

```
:- dynamic app/3, app/4.

app([], L, L).
app([X|L1], L2, [X|L3]) :-
    app(L1, L2, L3).

app(L1, L2, L3, L123) :-
    app(L1, L23, L123),
    app(L2, L3, L23).
```

```
| ?-  interp(app(_, [b,c], L, [c,b,c,b]), 0).
call: app(_203,[b,c],_253,[c,b,c,b])
  call: app(_203,_666,[c,b,c,b])
  exit: app([],[c,b,c,b],[c,b,c,b])
  call: app([b,c],_253,[c,b,c,b])
  fail: app([b,c],_253,[c,b,c,b])
  redo: app([],[c,b,c,b],[c,b,c,b])
    call: app(_873,_666,[b,c,b])
    exit: app([],[b,c,b],[b,c,b])
  exit: app([c],[b,c,b],[c,b,c,b])
  call: app([b,c],_253,[b,c,b])
    call: app([c],_253,[c,b])
      call: app([],_253,[b])
      exit: app([],[b],[b])
    exit: app([c],[b],[c,b])
  exit: app([b,c],[b],[b,c,b])
exit: app([c],[b,c],[b],[c,b,c,b])
L = [b] ?
```

# „HAGYOMÁNYOS” BEÉPÍTETT ELJÁRÁSOK

# Aritmetikai beépített eljárások

- `X is Kif`: `Kif` aritmetikai kifejezés kell legyen, értékét egyesíti `X`-szel.
- `Kif1` $\rho$ `Kif2`: `Kif1` és `Kif2` aritmetikai kifejezések kell legyenek, értékeik között elvégzi a $\rho$ összehasonlítást ($\rho$ lehet `=`, `=\=`, `<`, `=<`, `>`, `>=`).
- Aritmetikai kifejezésekben felhasználható funktorok:

| Infix operátorok | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| + | összeadás | // | egész osztás | /\ | bitenkénti és |
| - | kivonás | ** | hatványozás | \/ | bitenkénti vagy |
| * | szorzás | mod | modulus képzés | << | bitenkénti balra léptetés |
| / | osztás | rem | maradék képzés | >> | bitenkénti jobbra léptetés |
| Prefix operátorok: | | - | negáció | \ | bitenkénti negáció |

| Függvény jelölésűek | | | |
|---|---|---|---|
| abs/1 | exp/1 | floor/1 | sign/1 |
| atan/1 | float/1 | log/1 | sin/1 |
| ceiling/1 | float_fractional_part/1 | max/2,min/2 | sqrt/1 |
| cos/1 | float_integer_part/1 | round/1 | truncate/1 |

# Listakezelő beépített eljárások

- Lista hossza: `length(?L, ?N)`
  - Jelentése: az `L` lista hossza `N`.
  - `length(-L, +N)` módban adott hosszúságú, csupa különböző változóból álló listát hoz létre.
  - `length(-L, -N)` módban rendre felsorolja a 0, 1, ... hosszú listákat.
  - Megvalósítását lásd korábban.
- Lista rendezése: `sort(@L, ?S)`
  - Jelentése: az `L` lista `@<` szerinti rendezése `S`, (`==/2` szerint azonos elemek ismétlődését kiszűrve).
- Lista kulcs szerinti rendezése: `keysort(@L, ?S)`
  - Az `L` argumentum `Kulcs-Érték` alakú kifejezések listája.
  - Az eljárás jelentése: az `S` lista az `L` lista `Kulcs` értékei szerinti szabványos (`@<` általi) rendezése, ismétlődéseket nem szűr.

# Kifejezések kiírása

- `write(@X)`: **Kiírja `X`-et, ha szükséges operátorokat, zárójeleket használva.**
- `writeq(@X)`: **Mint `write(X)`, csak gondoskodik, hogy szükség esetén az atomok idézőjelek közé legyenek téve.**
- `write_canonical(@X)`: **Mint `writeq(X)`, csak operátorok nélkül, minden struktúra szabványos alakban jelenik meg.**
- `write_term(@X, +Opciók)`: **Az `Opciók` opciólista szerint kiírja `X`-et.**
- `format(@Formátum, @AdatLista)`: **A `Formátum`-nak megfelelő módon kiírja `AdatLista`-t. A formázójelek alakja:** `~⟨szám esetleg⟩⟨formázójel⟩`.

```
| ?- write('Helló világ').                        ==> Helló világ
| ?- writeq('Helló világ').                       ==> 'Helló világ'
| ?- write_canonical('*' - '%').                  ==> -(*,'%')
| ?- write_canonical([1,2]).                      ==> '.'(1,'.'(2,[]))
| ?- write_term([1,2,3], [max_depth(2)]).         ==> [1,2|...]
| ?- format('X=~s --- ~3d s', [[0'j,0'ó],3245]).  ==> X=jó --- 3.245 s
```

# Kifejezések kiírása — felhasználó vezérelte formázás

- `print(@X)`: Alapértelmezésben azonos `write`-tal. Ha a felhasználó definiál egy `portray/1` eljárást, akkor a rendszer minden a `print`-tel kinyomtatandó részkifejezésre meghívja `portray`-t. Ennek sikere esetén feltételezi, hogy a kiírás megtörtént, meghiúsulás esetén maga írja ki a részkifejezést.

  A rendszer a `print` eljárást használja a változó-behelyettesítések és a nyomkövetés kiírására!

- `portray(@Kif)` (felhasználó által definiálandó ún. ***kampó eljárás***): Igaz, ha `Kif` kifejezést a Prolog rendszernek *nem* kell kiírnia (és ekkor maga a `portray` kell, hogy elvégzze a kiírást).

- Példa:

```
portray(Matrix) :-
     Matrix = [[_|_]|_],
     (   member(Row, Matrix),
         nl, print(Row), fail
     ;   true
     ).
```

```
| ?- X = [[1,2],[3,4],[5,6]].

X =
[1,2]
[3,4]
[5,6] ?
```

# Karakterek kiírása és beolvasása

- `put_code(+Kód)`: Kiírja az adott kódú karaktert.
- `tab(+N)`: Kiír `N` szóközt feltéve, hogy `N` > 0.
- `nl`: Kiír egy soremelést.
- `get_code(?Kód)`: Beolvas egy karaktert és (karakterkódját) egyesíti `Kód`-dal. (File végénél `Kód = -1`.)
- `peek_code(?Kód)`: A soronkövetkező karakter kódját egyesíti `Kód`-dal. A karaktert nem távolítja el a bemenetről. (File végénél `Kód = -1`.)
- Példa:

```
% L a következő sor karakterkódjainak listája.
rd_line(L) :-     peek_code(0'\n), !, get_code(_), L = [].
rd_line([C|L]) :- get_code(C), rd_line(L).

| ?- rd_line(L), tab(20), member(X, L), put_code(X), tab(1), fail ; nl.
|: Hello world!
                    H e l l o   w o r l d !
```

# Példa: számbeolvasás

```
% számbe(Szám): a Szám szám következik az input-folyamban.
számbe(Szám) :-
        számjegy(Érték), számbe(Érték, Szám).

% Az eddig beolvasott Szám0-val együtt az input-folyamban következő
% szám értéke Szám.
számbe(Szám0, Szám) :-
        számjegy(E), !, Szám1 is Szám0*10+E, számbe(Szám1, Szám).
számbe(Szám, Szám).

% Érték értékű számjegy következik.
számjegy(Érték) :-
        peek_code(Kar), Kar >= 0'0, Kar =< 0'9, get_code(_),
        Érték is Kar - 0'0.

| ?- számbe(X), get_code(_), számbe(Y).
|: 123 456
                   ⟹ X = 123, Y = 456
```

# Kifejezések beolvasása

- `read(?Kif)`: **Beolvas egy ponttal lezárt kifejezést és egyesíti `Kif`-fel. (File végénél `Kif = end_of_file`.)**
- `read_term(?Kif, +Opciók)`: **Mint `read/1`, de az `Opciók` opciólistát is figyelembe veszi.**
- **Példa — botcsinálta programbeolvasó:**

```
consult_body :-
        repeat, read(Term),
        (   Term = end_of_file -> true
        ;   assertz(Term), fail
        ), !.

| ?- consult_body.
|: p(X) :- q(X), r(X).
|: ^D
yes
```

```
| ?- listing([p/1]).
p(A) :-
        q(A),
        r(A).
yes
```

# Be- és kiviteli csatornák

- Csatornák megnyitása és kezelése:
  - `open(@Filenév, @Mód, -Csatorna)`: Megnyitja a `Filenév` nevű állományt `Mód` módban (`read`, `write` vagy `append`). A `Csatorna` argumentumban visszaadja a megnyitott csatorna „nyelét”.
  - `set_input(@Csatorna)`, `set_output(@Csatorna)`: Az ezt követő beviteli/kiviteli eljárások `Csatorna`-t használják majd (jelenlegi csatorna).
  - `current_input(?Csatorna)`, `current_output(?Csatorna)`: A jelenlegi beviteli/kiviteli csatornát egyesíti `Csatorna`-val.
  - `close(@Csatorna)`: Lezárja a `Csatorna` csatornát.
- Explicit csatornamegadás be- és kiviteli eljárásokban
  - Az eddig ismertetett összes be- és kiviteli eljárásnak van egy eggyel több argumentumú változata, amelynek első argumentuma a csatorna. Ezek: `write/2`, `writeq/2`, `write_canonical/2`, `write_term/3`, `print/2`, `read/2`, `read_term/3`, `format/3`, `put_code/2`, `tab/2`, `nl/1`, `get_code/2`, `peek_code/2`.

# Egy egyszerűbb be- és kiviteli szervezés: DEC10 I/O

- `see(@Filenév)`, `tell(@Filenév)`: Megnyitja a `Filenév` file-t olvasásra/írásra és a jelenlegi csatornává teszi. Újabb híváskor csak a jelenlegi csatornává teszi.
- `seeing(?Filenév)`, `telling(?Filenév)`: A jelenlegi beviteli/kiviteli csatorna állománynevét egyesíti `Filenév`-vel.
- `seen`, `told`: Lezárja a jelenlegi beviteli/kiviteli csatornát.
- Példák — nagyon egyszerű `consult` variánsok:

```
consult_dec10_style(File) :-
    seeing(Old), see(File),
    repeat, read(Term),
    (   Term = end_of_file
    ->  seen
    ;   assertz(Term), fail
    ), !, see(Old).
```

```
consult_with_streams(File) :-
    open(File, read, S),
    repeat, read(S, Term),
    (   Term = end_of_file
    ->  close(S)
    ;   assertz(Term), fail
    ), !.
```

# Hibakezelési beépített eljárások

- Hibahelyzetet beépített eljárás rossz argumentumokkal való meghívása, vagy a `throw/1` (`raise_exception/1`) eljárás válthat ki.
- Minden hibahelyzetet egy Prolog kifejezés (ún. hiba-kifejezés) jellemez.
- Hiba „dobása”: `throw(@HibaKif)`, `raise_exception(@HibaKif)`
  - Hatása: Kiváltja a `HibaKif` hibahelyzetet.
- Hiba „elkapása”: `catch(:+Cél, ?Minta, :+Hibaág)`, `on_exception(?Minta, :+Cél, :+Hibaág)`
  - Hatása: Futtatja a `Cél` hívást.
    - Ha `Cél` végrehajtása során hibahelyzet nem fordul elő, futása azonos `Cél`-lal.
    - Ha `Cél`-ban hiba van, a hiba-kifejezést egyesíti `Mintá`-val.
    - Ha ez sikeres, meghívja a `Hibaág`-at.
    - Ellenkező esetben továbbdobja a hiba-kifejezést, hogy a további körülvevő `catch` eljárások esetleg elkaphassák azt.

# Programfejlesztési beépített eljárások (SICStus specifikusak)

- `set_prolog_flag(+Jelző, @Érték)`: `Jelző` értkékét `Érték`-re állítja.
- `current_prolog_flag(?Jelző, ?Érték)`: `Jelző` pillanatnyi értéke `Érték`.
- Néhány fontos Prolog jelző:
  - `language`: végrehajtási mód (`sicstus`, `iso`).
  - `argv`: csak olvasható, a parancssorbeli argumentumok listája.
  - `unknown`: viselkedés definiálatlan eljárás hívásakor (`trace`, `fail`, `error`).
  - `source_info`: forrásszintű nyomkövetés (`on`, `off`, `emacs`).
- `consult(:@Files)`, `[:@File,...]`: Betölti a `File`(ok)at, interpretált alakban.
- `compile(:@File)`: Betölti a `File`(ok)at, leforditott alakot hozva létre.
- `listing`: Kiírja az összes interpretált eljárást az aktuális kimenetre.
- `listing(:@EljárásSpec)`: Kiírja a megnevezett interpretált eljárásokat.
- Itt és később: `EljárásSpec` — név vagy funktor, eseteg modul-kvalifikációval ellátva, ill. ezek listája, pl. `listing(p)`, `listing([m:q,p/1])`.

# Programfejlesztési eljárások (folytatás)

- `statistics`: Különféle statisztikákat ír ki az aktuális kimenetre.
- `statistics(?Fajta, ?Érték)`: `Érték` a `Fajta` fajtájú mennyiség értéke.
  - Példa: `statistics(runtime, E)` ⟹`E=[Tdiff, T]`, `Tdiff` az előző lekérdezés óta, `T` a rendszerindítás óta eltelt idő, ezredmásodpercben.
- `break`: Egy új interakciós szintet hoz létre.
- `abort`, `halt`: Kilép a legkülső interakciós szintre ill. a Prolog rendszerből.
- `trace`: Elindítja az interaktív nyomkövetést.
- `debug`, `zip`: Elindítja a szelektív nyomkövetést, csak spion-pontoknál áll meg. (A `zip` mód gyorsabb, de nem gyűjt annyi információt mint a `debug` mód.)
- `nodebug`, `notrace`, `nozip`: Leállítja a nyomkövetést.
- `spy(:@EljárásSpec)`: Spion-pontot tesz a megadott eljárásokra.
- `nospy(:@EljárásSpec)`: Megszünteti a megadott spion-pontokat.
- `nospyall`: Az összes spion-pontot megszünteti.

# NYELVTANI ELEMZÉS PROLOGBAN

# Egy egyszerű nyelvtani elemzési példa

- Bináris számok nyelvtana

  $\langle$ **szám** $\rangle$ ::= $\langle$ **számjegy** $\rangle$ $\langle$ **számmaradék** $\rangle$
  $\langle$ **számmaradék** $\rangle$ ::= $\langle$ **számjegy** $\rangle$ $\langle$ **számmaradék** $\rangle$ $|$ $\epsilon$
  $\langle$ **számjegy** $\rangle$ ::= `0` $|$ `1`

- Ugyanez DCG (Definite Clause Grammar) jelöléssel:

```
szám -->            számjegy, számmaradék.
számmaradék -->     számjegy, számmaradék | "".
számjegy -->        "0" | "1".
```

- A definit klóz nyelvtan (DCG):
  - egy általános nyelvtani formalizmus,
  - amely egyszerűen Prologra fordítható,
  - a legtöbb Prolog rendszer része (bár a szabványnak nem).

# Nyelvtani elemzés „bevetítése” Prologba

- Nyelvtani elemzés: annak eldöntése, hogy egy (Prolog listában tárolt) jelsorozat megfelel-e egy adott nem-terminális nyelvtani fogalomnak.
- A lista lehet karakterkódok listája, lexikai elemek (token-ek) listája stb.
- Egy nem-terminálisnak egy kétargumentumú Prolog szabály felel meg:

```
szám -->        számjegy,         számmaradék.
szám(L0, L) :- számjegy(L0, L1), számmaradék(L1, L).
% Az L0 kódlistáról "leelemezhető" egy <szám>, marad L ha
%           L0-ról leelemezhető egy <számjegy>, marad L1, és
%           L1-ről leelemezhető egy <számmaradék>, marad L.
```

- Általánosan: az adott nem-terminálisnak megfelelő jelsorozatot „leelemezve” (lehagyva) egy `L0` lista elejéről marad egy `L` lista.
- Terminális szimbólumok esetén egyetlen elemet kell lehagyni a listáról, erre szolgál a `'C'/3` beépített eljárás. Definíciója: `'C'(L0, X, L)` $\equiv$ `L0 = [X|L]` (A SICStus fordító a két hívást pontosan ugyanúgy fordítja).

# A DCG szabályok lefordított alakja

- **A DCG mint szintaktikai édesítőszer — példa:**

```
szám -->              számjegy, számmaradék.          % A | B ≡ A ; B
számmaradék -->       számjegy, számmaradék | "".     % ""  ≡ []
számjegy -->          "0" | "1".                      % "0" ≡ [48]
```

- **A fenti DCG szabályok betöltésekor a következő Prolog kód keletkezik:**

```
szám(L0, L) :-          számjegy(L0, L1), számmaradék(L1, L).
számmaradék(L0, L) :-   (   számjegy(L0, L1), számmaradék(L1, L)
                        ;   L = L0
                        ).
számjegy(L0, L) :-      (   'C'(L0, 48, L) ;   'C'(L0, 49, L)   ).
```

- **A DCG elemző futtatása:**

```
| ?- szám("101", []).  ⟹ yes          % "101" == [0'1,0'0,0'1]
| ?- szám("102", L).   ⟹ L = [0'2] ; L = [0'0,0'2] ; no
```

# Vezérlési szerkezetek DCG szabályokban

- DCG szabályokban használható: vágó, diszjunkció, negáció és feltételes diszjunktív szerkezet.
- Ezek változtatás nélkül átkerülnek a Prolog alakba. Példák:

```
% Leelemezhető számjegyek egy MAXIMÁLIS (esetleg üres) listája.
számmaradék -->   (   számjegy -> számmaradék.
                  ;   []
                  ).

% Ugyanez vágóval
számmaradék -->   számjegy, !, számmaradék.
számmaradék -->   [].

% Az utóbbi Prolog alakja:
számmaradék(L0, L) :- számjegy(L0, L1), !, számmaradék(L1, L).
számmaradék(L0, L) :- L = L0.

| ?- számmaradék("102", L).  ⟹ L = [0'2] ; no
```

# Prolog hívás beillesztése DCG szabályba

- **Általánosabb példa: decimális számjegyek elemzése**

```
számjegy --> "0" ; "1" ; "2" ; "3" ; "4" ;
             "5" ; "6" ; "7" ; "8" ; "9".

% Ugyanez általánosabban és egyszerűbben:
számjegy --> [K],              % K a következő terminális
             {decimális_jegy_kódja(K)}.

% K egy számjegy kódja.
decimális_jegy_kódja(K):- K >= 0'0, K =< 0'9.
```

- **A fenti DCG szabály Prolog megfelelője:**

```
% Leelemezhető egy számjegy kódja.
számjegy(L0, L) :-
        'C'(L0, K, L),           % K a következő kód
        decimális_jegy_kódja(K). % megfelelő-e a K?
```

# Az elemző kiegészítése argumentumokkal

- **Egy DCG szabály argumentumaiban egy „belső” alakot építhet:**

```
% leelemezhető egy Sz értékű decimálisszámjegy-sorozat
szám(Sz) --> számjegy(J), számmaradék(J, Sz).

% leelemezhető számjegyek egy esetleg üres listája, amelynek
% az eddig leelemzett Sz0-val együtt vett értéke Sz.
számmaradék(Sz0, Sz) -->
    számjegy(J), !, {Sz1 is Sz0*10+J}, számmaradék(Sz1, Sz).
számmaradék(Sz0, Sz0) --> [].

% leelemezhető egy J értékű számjegy.
számjegy(J) --> [K], {decimális_jegy_kódja(K), J is K-0'0}.

| ?- szám(Sz, "102 56", L). ⟹ L = " 56", Sz = 102; no
```

- **A `számmaradék` DCG szabály Prolog alakja:**

```
számmaradék(Sz0, Sz, L0,L) :-
    számjegy(J, L0,L1), !, Sz1 is Sz0*10+J, számmaradék(Sz1, Sz, L1,L).
számmaradék(Sz0, Sz0, L0,L) :- L=L0.
```

# A DCG nyelvtani szabályok szerkezete — összefoglalás

- A DCG szabály alakja: ⟨ ***Baloldal*** ⟩ `->` ⟨ ***Jobboldal*** ⟩ .
- ⟨ ***Baloldal*** ⟩: egy nem-terminális(, amit esetleg terminálisok listája követ).
- ⟨ ***Jobboldal*** ⟩: konjunkció (,), diszjunkció (;), ha-akkor (`->`) és negáció (`\+`) segítségével épül terminálisokból, nem-terminálisokból és Prolog hívásokból.
- Nem-terminális: tetszőleges ***hívható*** kifejezés (atom vagy struktúra).
- Terminális: ***tetszőleges*** Prolog kifejezés; 0, 1 vagy több terminális jel sorozata ***listaként*** helyezhető el a DCG szabályokban.
- Prolog hívás: `{}` zárójelekbe zárva helyezhető el (vágó köré nem kell zárójel).
- DCG = egy „ingyen” akkumulátor (akkum. lépés: `'C'`, egy elem levétele):

```
p(A,...) -->
    q0(B,...), ..., [X], qi(C,...), ..., {Cél}, ..., qn(D,...).
```

```
p(A,...,L0,L):-
    q0(B,...,L0,L1), ..., 'C'(Li-1, X, Li), qi(C,...,Li,Li+1),...,
                                          Cél, ..., qn(D,...,Ln,L).
```

# DCG példa: kifejezés kiértékelése

```
% kif(Z, L0, L): L0 elején egy Z értékű aritm. kifejezés áll, marad L.
kif(Z) --> tag(X), "+", kif(Y), {Z is X + Y}.
kif(Z) --> tag(X), "-", kif(Y), {Z is X - Y}.
kif(X) --> tag(X).

% tag(Z, L0, L): L0-ból leelemezhető egy Z értékű tag, marad L.
tag(Z) --> szám(X), "*", tag(Y), {Z is X * Y}.
tag(Z) --> szám(X), "/", tag(Y), {Z is X / Y}.
tag(X) --> szám(X).

| ?- kif(Z, "10*10-6*6", "").  ==> Z = 64 ;  no
| ?- kif(Z, "10*10-6*6", L).   ==> L = [], Z = 64 ;
                                   L = [42,54], Z = 94 ; ...
| ?- kif(Z, "4-2+1", []).      ==> Z = 1   Jobbról balra elemez!

% Egy lehetséges javítás:
kif(Z) --> tag(X), kifmaradék(X, Z).

kifmaradék(X0, Z)--> "+", tag(X1), {X is X0 + X1}, kifmaradék(X, Z).
...
```

# DCG példa: „természetes” nyelvű beszélgetés

```
:- use_module(library(lists)).

% mondat(Alany, Áll, L0, L): L0-L kielemezhető egy Alany alanyból és Áll
% állítmányból álló mondattá. Alany lehet első vagy második személyű
% névmás, vagy egyetlen szóból álló (harmadik személyű) alany.
mondat(Alany, Áll) --> {én_te(Alany, Ige)}, én_te_perm(Alany, Ige, Áll).
mondat(Alany, Áll) --> szó(Alany), szavak(Áll).

% én_te(Alany, Ige):
% Az Alany első/második személyű névmásnak megfelelő létige az Ige.
én_te("én", "vagyok").                          én_te("te", "vagy").

% én_te_perm(Ki, Ige, Áll, L0, L): L0-L kielemezhető egy Ki
% névmásból, Ige igealakból és Áll állítmányból álló mondattá.
én_te_perm(Alany, Ige, Áll)  --> szó(Alany), szó(Ige), szavak(Áll).
én_te_perm(Alany, Ige, Áll)  --> szó(Alany), szavak(Áll), szó(Ige).
én_te_perm(Alany, Ige, Áll)  --> szavak(Áll), szó(Ige), szó(Alany).
én_te_perm(_Alany, Ige, Áll) --> szavak(Áll), szó(Ige).
```

# Példa: „természetes” nyelvű beszélgetés — szavak elemzése

```
% szó(Sz, L0, L): L0-L egy Sz betűsorozatból álló (nem üres) szó.
szó(Sz) --> betű(B), szómaradék(SzM), {illik([B|SzM], Sz)}, köz.

% szómaradék(Sz, L0, L): L0-L egy Sz kódlistából álló (esetleg üres) szó.
szómaradék([B|Sz]) --> betű(B), !, szómaradék(Sz).
szómaradék([]) --> [].

% illik(Szó0, Szó): Szó0 = Szó, vagy a kezdő kis-nagy betűben különböznek.
illik([B0|L], [B|L]) :- (   B = B0 -> true ; abs(B-B0) =:= 32   ).

% köz(L0, L): L0-L nulla, egy vagy több szóköz.
köz --> (   " " -> köz ; ""   ).

% betű(K, L0, L): L0-L egy K kódú "betű" (különbözik a " .?" jelektől)
betű(K) --> [K], {non_member(K, " .?")}.

% szavak(SzL, L0, L): L0-L egy SzL szó-lista.
szavak([Sz|Szk]) --> szó(Sz), (   szavak(Szk)
                              ;   {Szk = []}
                              ).
```

# Példa: „természetes” nyelvű beszélgetés — párbeszéd-szervezés

```
% :- type mondás ---> kérdez(szó) ; kijelent(szó,list(szó)) ; un.

% Megvalósít egy párbeszédet.
párbeszéd :-
     repeat, rd_line(L),                    % lásd korábban
     (   menet(Mondás, L, []) -> feldolgoz(Mondás)
     ;   write('Nem értem\n'), fail
     ),
     Mondás = un, !.

% menet(Mondás, L0, L): Az L0-L kielemzett alakja Mondás.
menet(kérdez(Alany)) -->       {kérdő(Szó)}, mondat(Alany, [Szó]), "?".
menet(kijelent(Alany,Áll)) --> mondat(Alany, Áll), ".".
menet(un) -->                  szó("unlak"), ".".

% kérdő(Szó): Szó egy kérdőszó.
kérdő("mi").   kérdő("ki").   kérdő("kicsoda").
```

# Példa: „természetes” nyelvű beszélgetés — válaszok előállítása

```
:- dynamic tudom/2.

% feldolgoz(Mondás): feldolgozza a felhasználótól érkező Mondás üzenetet.
feldolgoz(un) :- write('Én is.\n').
feldolgoz(kijelent(Alany, Áll)) :-
     assertz(tudom(Alany,Áll)), write('Felfogtam.\n').
feldolgoz(kérdez(Alany)) :-
     tudom(Alany, _), !, válasz(Alany).
feldolgoz(kérdez(_)) :-
     write('Nem tudom.\n').

% Felsorolja az Alany ismert tulajdonságait.
válasz(Alany) :- tudom(Alany, Áll),
     (   member(Szó, Áll), format('~s ', [Szó]), fail
     ;   nl, fail
     ).
válasz(_).
```

# Beszélgetős DCG példa — egy párbeszéd

```
| ?- párbeszéd.
|: Magyar legény vagyok én.
Felfogtam.
|: Ki vagyok én?
Magyar legény
|: Péter kicsoda?
Nem tudom.
|: Péter tanuló.
Felfogtam.
|: Péter jó tanuló.
Felfogtam.
|: Péter kicsoda?
tanuló
jó tanuló
|: Boldog vagyok.
Felfogtam.
```

```
|: Én vagyok Jeromos.
Felfogtam.
|: Te egy Prolog program vagy.
Felfogtam.
|: Ki vagyok én?
Magyar legény
Boldog
Jeromos
|: Okos vagy.
Felfogtam.
|: Ki vagy  te?
egy Prolog program
Okos
|: Valóban?
Nem értem
|: Unlak.
Én is.
```

# A DCG formalizmus felhasználása elemzésen kívül

- DCG szabályok kényelmesen használhatók általános akkumulálásra
  - Listák akkumulálása (nemcsak elemzés, építés is:)

```
% anbn(+N, ?L): Az L lista N db a-ból és azt követő N db b-ből áll.
anbn(N, L) :- anbn(N, L, []).

% anbn(N, L0, L): L0-L N db a-ból és azt követő N db b-ből áll.
anbn(0) --> !.
anbn(N) --> {N > 0, N1 is N-1}, [a], anbn(N1), [b].

% a fenti DCG szabály kifejtve:
anbn(N, L0, L) :-
    N > 0, N1 is N-1, L0=[a|L1], anbn(N1, L1, L2), L2=[b|L].
```

  - Egyébként az elemi akkumulálási lépést DCG-n kívül kell megírni:

```
% sum(L, S0, S): L összege S-S0.    | % L számlista összege S.
sum([]) --> [].                     | sum(L, S) :- sum(L, 0, S).
sum([X|L]) -->                      |
        plus(X), sum(L).            | plus(X, S0, S) :- S is S0+X.
```

# FEJLETTEBB NYELVI ÉS RENDSZERELEMEK

# Külső nyelvi interfész

- Hagyományos (pl. C nyelvű) programrészek meghívásának módja:
  - A Prolog rendszer elvégzi az átalakítást a Prolog alak és a külső nyelvi alak között. Kényelmesebb, biztonságosabb mint a másik módszer, de kevésbé hatékony. Többnyire csak egyszerű adatokra (egész, valós, atom). (MProlog)
  - A külső nyelvi rutin pointereket kap Prolog adatstruktúrákra, valamint hozzáférési algoritmusokat ezek kezelésére. Nehézkesebb, veszélyesebb, de jóval hatékonyabb mint az előző megoldás. Összetett adatok adásvételére is jó. (SWI, SICStus)

# Külső nyelvi interfész — példa

Prologban az `index_keys(`*Spec*, *Kif*, *Kulcs*, *Szám*`)` eljárást szeretnénk meghívni, aminek a jelentése:

- Ha *Spec* és *Kif* különböző funktorú kifejezések, akkor *Szám* `= -1` és *Kulcs* `= []`.
- Egyébként, ha *Spec* valamelyik argumentuma `+` és *Kif* megfelelő argumentuma változó, akkor *Szám* `= -2` és *Kulcs* `= []`.
- Egyébként *Szám* a *Spec* argumentumaként előforduló `+` atomok száma, *Kulcs* pedig *Kif* megfelelő argumentumok ***kivonatából*** képzett lista. A kivonat lényegében az argumentum funktora, azzal az eltéréssel, hogy a konstansok kivonata maga a konstans, struktúrák esetén pedig a struktúra neve és az aritása külön elemként kerül a kivonat-listába.

# Külső nyelvi interfész — példa

- **A példaeljárás használata**

```
| ?- [ixtest].
| ?- index_keys(f(+, -, +, +),
                f(12.3, _, s(1, _, z(2)), t),
                L, X).
L = [12.3,s,3,t], X = 3 ?
yes
```

- **Az `ixtest.pl` file.**

```
foreign(ixkeys, index_keys(+term, +term, -term, [-integer])).
foreign_resource(ixkeys, [ixkeys]).
:- load_foreign_resource(ixkeys).
```

- **A C programot elő kell készíteni a Prolog számára az `splfr` eszköz segítségével:**

```
splfr ixkeys ixtest.pl +c ixkeys.c
```

# Külső nyelvi interfész — a C kód (`ixkeys.c` állomány)

```
#include <sicstus/sicstus.h>

#define NA -1  /* not applicable */
#define NI -2  /* instantiatedness */

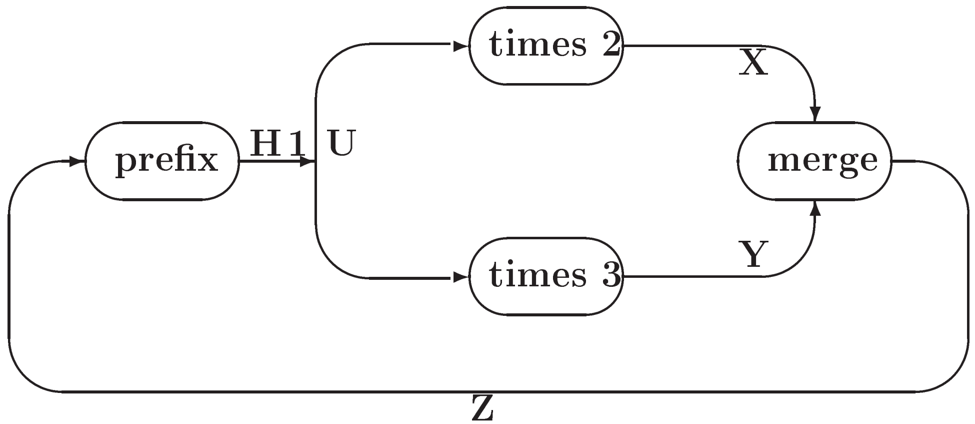
long ixkeys(SP_term_ref spec,
      SP_term_ref term, SP_term_ref list)
{
  unsigned long sname, tname, plus;
  int sarity, tarity, i;
  long ret = 0;
  SP_term_ref arg = SP_new_term_ref(),
              tmp = SP_new_term_ref();

  SP_get_functor(spec, &sname, &sarity);
  SP_get_functor(term, &tname, &tarity);
  if (sname != tname || sarity != tarity)
    return NA;

  plus = SP_atom_from_string("+");
  for (i = sarity; i > 0; --i) {
    unsigned long t;
    SP_get_arg(i, spec, arg);
    SP_get_atom(arg, &t); /* no check */
    if (t != plus) continue;

    SP_get_arg(i, term, arg);
    switch (SP_term_type(arg)) {
    case SP_TYPE_VARIABLE:
      return NI;
    case SP_TYPE_COMPOUND:
      SP_get_functor(arg, &tname, &tarity);
      SP_put_integer(tmp, (long)tarity);
      SP_cons_list(list, tmp, list);
      SP_put_atom(arg, tname);
      break;
    }
    SP_cons_list(list, arg, list); ++ret;
  }
  return ret;
}
```

# Hasznos lehetőségek SICStus Prolog-ban

- **Tetszőleges nagyságú egész számok**

  **pl.:**

```
| ?- fakt(40,F).

F = 815915283247897734345611269596115894272000000000 ?
```

- **Globális változók (Blackboard)**

  `bb_put(Kulcs, Érték)`

  **A** `Kulcs` **kulcs alatt eltárolja** `Érték`**-et, az előző értéket, ha van, törölve. (**`Kulcs` **egy (kis) egész szám vagy atom lehet.)**

  `bb_get(Kulcs, Érték)`

  **Előhívja** `Érték`**-be a** `Kulcs` **értékét.**

  `bb_delete(Kulcs, Érték)`

  **Előhívja** `Érték`**-be a** `Kulcs` **értékét, majd kitörli.**

# Hasznos lehetőségek SICStus Prolog-ban *(folytatás)*

- Visszaléptethető módon változtatható kifejezések

  `create_mutable(Adat, ValtKif)`

  `Adat` kezdőértékkel létrehoz egy új változtatható kifejezést, ez lesz `ValtKif`. `Adat` nem lehet üres változó.

  `get_mutable(Adat, ValtKif)`

  `Adat`-ba elővesziˇ `ValtKif` pillanatnyi értékét.

  `update_mutable(Adat, ValtKif)`

  A `ValtKif` változtatható kifejezés új értéke `Adat` lesz. Ez a változtatás visszalépéskor visszacsinálódik. `Adat` nem lehet üres változó.

- Takarító eljárás

  `call_cleanup(Hivas, Tiszito)`

  Meghívja `call(Hivas)`-t és ha az véglegesen befejezte futását, meghívja `Tiszito`-t. Egy eljárás akkor fejezte be véglegesen a futását, ha további alternatívák nélkül sikerült, meghiúsult vagy kivételt dobott.

# Fejlett vezérlési lehetőségek SICStusban: Blokk-deklarációk

- **Példa:**

  ```
  :- block p(-, ?, -, ?, ?).
  ```

  **Jelentése: ha az első és a harmadik argumentum is behelyettesítetlen változó (blokkolási feltétel), akkor a `p` hívás felfüggesztődik.**

  **Ugyanarra az eljárásra több vagylagos feltétel is szerepelhet, pl.**

  ```
  :- block p(-, ?), p(?, -).
  ```

- **Végtelen választási pontok kiküszöbölése blokk-deklarációval**

  ```
  :- block append(-, ?, -).

  append([], L, L).
  append([X|L1], L2, [X|L3]) :-
      append(L1, L2, L3).
  ```

# Blokk-deklarációk *(folytatás)*

- Generál-és-ellenőriz típusú programok gyorsítása
  - általában nem hatékonyak (pl megrajzolja_1), mert túl sok visszalépést használnak
  - korutinszervezéssel a generáló és ellenőrző rész „automatikusan” összefésülhető
  - ehhez az ellenőrző részt kell előre tenni és megfelelően blokkolni
- Korutinszervezésre épülő programok
  - Példa: egyszerűsített Hamming feladat
    - keressük a $2^i * 3^j (i \geq 1, j \geq 1)$ alakú számok közül az első `N` darabot nagyság szerint rendezve.
    - „stream-and-parallelism” közelítésmódot használva korutinszervezéssel egyszerűen lehet megoldani

# Hamming probléma




```
% A H lista az első N, csak a 2 és 3 tényezőkből álló szám.
hamming(N, H) :-
     U = [1|H], times(U, 2, X), times(U, 3, Y),
     merge(X, Y, Z), prefix(N, Z, H).

% times(X, M, Z): A Z lista az X elemeinek M-szerese
:- block times(-, ?, ?).
times([A|X], M, Z) :- B is M*A, Z = [B|U], times(X, M, U).
times([], _, []).
```

# Hamming probléma (folyt.)

```
% merge(X, Y, Z): Z az X és Y összefésülése.
:- block merge(-, ?, ?), merge(?, -, ?).
% Csak akkor fusson, ha az első két argumentum ismert
merge([A|X], [B|Y], V) :-
     A < B, !, V = [A|Z], merge(X, [B|Y], Z).
merge([A|X], [B|Y], V) :-
     B < A, !, V = [B|Z], merge([A|X], Y, Z).
merge([A|X], [A|Y], [A|Z]) :-
     merge(X, Y, Z).
merge([], X, X) :- !.
merge(_, [], []).

% prefix(N, X, Y): Az X lista első N eleme Y.
prefix(0, _, []) :- !.
prefix(N, [A|X], [A|Y]) :-
     N > 0, N1 is N-1, prefix(N1, X, Y).
```

# Korutinszervező eljárások

- `freeze(X, Hivas)`

  `Hivas`t felfüggeszti mindaddig, amig `X` behelyettesítetlen változó.

- `frozen(X, Hivas)`

  Az `X` változó miatt felfüggesztett hívás(oka)t egyesíti `Hivas`-sal.

- `dif(X, Y)`

  `X` és `Y` nem egyesíthető. Mindaddig felfüggesztődik, amig ez el nem dönthető.

- `call_residue(Hivas, Maradék)`

  `Hivas`-t végrehajtja, és ha a sikeres lefutás után maradnak felfüggesztett hívások, akkor azokat visszaadja `Maradék`ban. Pl.

```
| ?- call_residue(dif(X, f(Y)), Maradek).
        ⟹ Maradek = [[X]-(prolog:dif(X,f(Y)))]
| ?- call_residue((dif(X, f(Y)), X=f(Z)), Maradek).
        ⟹ X = f(Z), Maradek = [[Y,Z]-(prolog:dif(f(Z),f(Y)))]
```

# SICStus könyvtárak

- Könyvtár betöltése

  `:- use_module(library(`*könyvtárnév*`)).`

- A legfontosabb könyvtárak
  - `arrays` Logaritmikus elérési idejű kiterjeszthető tömbök megvalósítását tartalmazza.
  - `assoc` AVL fák segítségével valósítja meg az „asszociációs listák”, azaz véges Prolog kifejezéshalmazokon definiált kiterjeszthető leképezések fogalmát.
  - `atts` tetszőleges attributumokat enged a Prolog változókhoz rendelni, ezeket tárolórekeszként és a Prolog egyesítési mechanizmusának módosítására is engedi használni.
  - `heaps` A bináris kazal (heap) fogalmát valósítja meg, amely főként prioritásos sorok (priority queue) megvalósítására használható.
  - `lists` Biztosítja a listakezelő alapműveleteket.

- `terms` Különböző kifejezéskezelő eljárásokat tartalmaz.
- `ordsets` Halmazműveleteket definiál, ahol a halmazokat a Prolog szabványos rendezése szerint (`compare`) rendezett listákkal ábrázolja.
- `queues` Sorokra (queue, FIFO store) vonatkozó műveleteket definiál.
- `random` Egy véletelenszám-generátort tartalmaz.
- `system` Különféle operációsrendszer-szolgáltatások elérését biztosítja.
- `trees` Az `arrays` könyvtárhoz hasonló, de nem-kiterjeszthető logaritmikus elérési idejű tömbfogalmat valósít meg, bináris fák segítségével (kicsit hatékonyabb mint az `arrays` könyvtár).
- `ugraphs` Irányított és irányítatlan gráffogalmat valósít meg, élcimkék nélkül.
- `wgraphs` Olyan irányított és irányítatlan gráffogalmat valósít meg, ahol minden él egy egészértékű súllyal rendelkezik.
- `sockets` A socket-ek kezelésére szolgáló eljárásokat biztosít.
- `linda/client` és `linda/server` Linda-szerű processzkommunikációs eszközöket ad.

- `bdb` Felhasználó által definiált többszörös indexelést lehetővé tevö, Prolog kifejezések lemezen való tárolására szolgáló adatbázis-rendszer.
- `clpb` Boole-értékekre vonatkozó feltétel-megoldó (constraint solver).
- `clpq` és `clpr` Feltétel-megoldó a Q (racionális számok) ill. R (valós számok) tartományán.
- `clpfd` Véges tartományokra vonatkozó feltétel-megoldó (constraint solver).
- `tcltk` A *Tcl/Tk* nyelv és eszközkészlet elérését biztosítja.
- `gauge` Prolog programok a profilirozására szolgáló, a `tcltk` -n alapuló grafikus interfésszel rendelkező eszköz.
- `charsio` Karaktersorozatból olvasó ill. abba író be- és kiviteli eljárások gyüjteménye.
- `timeout` Lehetőséget ad arra, hogy célok futási idejét korlátozzuk.
- `xref` A nyomkövetés és a program-analízis segítésére használható keresztreferencia készítő program.

# KIÍRÁS, NYOMKÖVETÉS

# Kiírás

- `{TextIO.}print : string -> unit`

  `print s` = kiírja az `s` értékét a standard kimenetre, és azonnal kiüríti a puffert.

- `{Meta.}printVal : 'a -> 'a`

  `printVal e` = kiírja az `e` kifejezés értékét a standard kimenetre pontosan úgy, ahogyan az SML értelmező írja ki a „legfelső szinten”, és azonnal kiüríti a puffert. Eredményül visszaadja az `e` kifejezés értékét. ***Csak interaktív módban használható.***

- Példák:

| | |
|---|---|
| `- print("alma"^"Korte\n");` | `- printVal("alma"^"Korte\n");` |
| `almaKorte` | `"almaKorte\n"> val it = "almaKorte\n" : string` |
| `> val it = () : unit` | |

*Megjegyzés.* A kapcsos zárójelek – `{` és `}` – között opcionálisan megadható modulnév áll. Például `{TextIO.}print` azt jelenti, hogy a függvény a `TextIO` modulban van definiálva, de az SML-értelmező a `print` nevet rövid alakban is felismeri.

# Kiírás (folyt.)

- `printVal`-lal tetszőleges típusú érték íratható ki. További példák:

```
- printVal (3, 5.0);
(3, 5.0)> val it = (3, 5.0) : int * real

- printVal [#"A",#"Z",#":"];
[#"A", #"Z", #":"]> val it = [#"A", #"Z", #":"] : char list

- datatype t = L | B of t * t;
> New type names: =t
  datatype t = (t,{con B : t * t -> t, con L : t})
  con B = fn : t * t -> t
  con L = L : t
- val fa = B(B(B(L,B(L,B(L,B(B(L,L),L)))),L),B(L,L));
> val fa = B(B(B(L, B(L, B(L, B(B(L, L), L)))), L), B(L, L)) : t
- printVal fa;
B(B(B(L, B(L, B(L, B(B(L, L), L)))), L), B(L, L))> val it = B(B(B(L, B(L, B(L, B(B(L, L), L)))), L), B(L, L)) : t
```

# Kiírás (folyt.)

- Az utolsó példában a kiírt sor túl hosszú lett, jó lenne eltörni a > jel előtt. Hogyan írathatunk ki egy újsor-jelet úgy, hogy az eredmény a `fa` érték maradjon? Például így, de ez elég körülményes:

```
- let val res = printVal fa;
      val _ = print "\n"
  in
     res
  end;
B(B(B(L, B(L, B(L, B(B(L, L), L)))), L), B(L, L))
> val it = B(B(B(L, B(L, B(L, B(B(L, L), L)))), L), B(L, L)) : t
```

- A `before` operátort az ilyen és hasonló dolgok kezelésére találták ki.

# Szekvenciális kifejezés (`before`)

- Az `x before y` kifejezés az ún. ***szekvenciális kifejezés*** egy változata.

  `{General.}before : 'a * 'b -> 'a`

  `x before y` = először az `x`-et, majd az `y`-t értékeli ki, eredménye az `x` értéke. Precedenciaszintje 0.

- Példa `before` használatára:

```
- printVal fa before print "\n";
B(B(B(L, B(L, B(L, B(B(L, L), L)))), L), B(L, L))
> val it = B(B(B(L, B(L, B(L, B(B(L, L), L)))), L), B(L, L)) : t
```

- Az `x before y`-hoz hasonló a `(x; y)` szekvenciális kifejezés, amely azonban az ***utolsó*** részkifejezésének az értékét adja eredményül.

```
- (print "A fa változó értéke =\n"; printVal fa before print "\n");
A fa változó értéke =
B(B(B(L, B(L, B(L, B(B(L, L), L)))), L), B(L, L))
> val it = B(B(B(L, B(L, B(L, B(B(L, L), L)))), L), B(L, L)) : t
```

# Szekvenciális kifejezés (;)

- **Az `(x; y)` szekvenciális kifejezés, akárcsak az `x before y`, szintaktikai édesítőszer. Az `(x; y)` helyett írhatjuk, hogy:**

```
let val _ = x in y end;
```

# Kiírás (folyt.)

- Hosszú lista, ill. egymásba skatulyázott adatszerkezetek esetén `printVal` (és maga az SML-értelmező is) alapesetben csak az első 200 listaelemet, ill. legfeljebb 20 szintet ír ki. A hosszat a `printLength`, a szintek számát a `printDepth` ***frissíthető változó*** szabályozza. Mindkét érték felülírható.

| | |
|---|---|
| `printLength : int ref` | `printLength := 7; !printLength;` |
| `printDepth : int ref` | `printDepth := 3; !printDepth;` |

- Példák:

```
- printVal [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10] before print "\n";
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...]
> val it = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...] : int list
- printVal fa before print "\n";
B(B#, B#)
> val it = B(B#, B#) : t
```

- Figyelem: a `printLength` és a `!printLength` kifejezések különböznek!

| | |
|---|---|
| `- printLength;` | `- !printLength;` |
| `> val it = ref 7 : int ref` | `> val it = 7 : int` |

# Kiírás (folyt.)

- **Különböző típusú egyszerű értékeket alakítanak át füzérré a `toString` függvények:**

```
Char.toString : char -> string
Int.toString  : int -> string
Real.toString : real -> string
Bool.toString : bool -> string
Word.toString : word -> string
```

## Nyomkövetés

- Az MOSML-ben nyomkövetés csak a program szövegébe beírt kiíró függvényekkel lehetséges.
- Példa: a `length` függvény két változatának kiértékelése
- A `length` „naív” változata

```
fun length (_::xs) = 1 + length xs
  | length []      = 0;
```

- A `length` „naív” változata kiíró függvényekkel

```
fun length ((_ : int) :: xs) =
        printVal(1 + (print " & "; printVal(length(printVal xs))
                      before print " $ "
                     )
                )
        before print " #\n"
  | length []      = (print " * "; printVal 0 before print " %\n");
```

# Nyomkövetés (folyt.)

- A `length` iteratív változata

```
fun lengthi xs = let fun len (i, _::xs) = len(i+1, xs)
                       | len (i, [])    = i
                 in len(0, xs)
                 end;
```

- A `length` iteratív változata kiíró függvényekkel

```
fun lengthi xs =
    let fun len (i, (_ : int) :: xs) =
              len((print " "; printVal((printVal i before print " $ ") + 1)),
                  (print " & "; printVal xs)
                 )
                  before print "#\n"
          | len (i, []) = (print " * "; printVal i before print " %\n")
    in len(0, xs)
    end;
```

# Nyomkövetés

- `length` és egy alkalmazása

```
fun length ((_ : int) :: xs) =
        printVal(1 + (print " & "; printVal(length(printVal xs))
                      before print " $ "
                     )
                )
        before print " #\n"
  | length []      = (print " * "; printVal 0 before print " %\n");

length [1,2,3];
 & [2, 3] & [3] & [] * 0 %
0 $ 1 #
1 $ 2 #
2 $ 3 #
```

# Nyomkövetés (folyt.)

- `lengthi` és egy alkalmazása

```
fun lengthi xs =
    let fun len (i, (_ : int) :: xs) =
                 len((print " "; printVal((printVal i before print " $ ") + 1)),
                     (print " & "; printVal xs)
                    )
                     before print "#\n"
          | len (i, []) = (print " * "; printVal i before print " %\n")
    in len(0, xs)
    end;

lengthi [1,2,3];
 0 $ 1 & [2, 3] 1 $ 2 & [3] 2 $ 3 & [] * 3 %
#
#
#
```

# Nyomkövetés (folyt.)

- `length` és `lengthi` kiértékelésének összehasonlítása

| `length [1,2,3];` | `lengthi [1,2,3];` |
|---|---|
| | |
| `& [2, 3] & [3] & [] * 0 %` | `0 $ 1 & [2, 3] 1 $ 2 & [3] 2 $ 3 & [] * 3 %` |
| `0 $ 1 #` | `#` |
| `1 $ 2 #` | `#` |
| `2 $ 3 #` | `#` |

- További példák a `22fp.sml` állományban
  - `nodes` és akkumulátort használó `nodesa` változata
  - `depth` és akkumulátort használó `deptha` változata

# KIVÉTELKEZELÉS

# Kivételkezelés

- A leggyakoribb belső kivételek (többek között ld. a `General` könyvtárat)

| *Megnevezés* | *Művelet, amely a kivételt kiválthatja* |
|---|---|
| `Bind` | **Értékdeklarációban a jobb oldali kifejezés nem illeszkedik a bal oldali mintára.** |
| `Chr` | `chr pred succ` |
| `Div` | `/ div mod` |
| `Domain` | **Az érték kilóg az értelmezési tartományból.** |
| `Empty` | `hd tl last` |
| `Fail` | `compile load loadOne` |
| `Interrupt` | **Megszakítás ctrl/c-vel.** |
| `Io` | **Ki/beviteli hiba.** `Io of {function : string, name : string, cause : exn }` |
| `Match` | **Mintaillesztési hiba** `case` **és** `handle` **kifejezésben, vagy függvényalkalmazásban.** |
| `Option` | **Hiba egy** `Option` **könyvtárbeli függvény alkalmazásakor.** |
| `Ord` | **Pl.** `NJ93.ord ""` **váltja ki; elavult.** |
| `Overflow` | `~ + - * / div mod abs ceil floor round trunc` |
| `Size` | `^ array concat fromList implode tabulate translate vector` |
| `Subscript` | `copy drop extract nth sub substring take update` |

# Kivételkezelés (folyt.)

- Kivételt az `exception` kulcsszóval deklarálunk, a `raise` kulcsszóval jelzünk, a `handle` kulcsszóval bevezetett kifejezésben kezelünk.
- A kivételeket leggyakrabban hibák jelzésére használjuk.
- A kivételkonstruktor lehet állandó vagy függvény.
- A kivételkonstruktorállandó, ill. a kivételkonstruktorfüggvény típusa: `exn`.
- Az `exn` speciális típus:
  - a kivételkonstruktorok halmaza *bővíthető*,
  - az `exn` típust tartalmazó ún. *kivételcsomag* minden típussal kompatíbilis:

```
- fun // {den = 0, ...}   = raise Domain
    | // {num = n, den = d} = (real n) / (real d);
> val // = fn : {den : int, num : int} -> real
```

pedig

```
- Domain;
> val it = Domain : exn
```

# Kivételkezelés (folyt.)

- A `raise` kulcsszó olyan ***kivételcsomagot*** hoz létre, amelyben `exn` típusú érték is van.
- A kivétel kezelése a `case`-szerkezetre emlékeztet:

  `E handle P1 => E1 | ··· | Pn => En.`

- Ha `E` „közönséges” értéket ad eredményül, a kivételkezelő egyszerűen továbbadja az eredményt.
- Ha `E` ***kivételcsomagot*** eredményez, akkor az SML-futtatórendszer megpróbálja a `P1 ··· Pn` mintákra illeszteni.
  - Ha az első illeszkedő minta a `Pi` (`i = 1, 2, ..., n`) , akkor a kivételkezelő eredménye az `Ei` kifejezés eredménye.
  - Ha egyetlen minta sem illeszthető a kivételcsomagra, akkor a kivételkezelő továbbpasszolja a kivételcsomagot az előző hívási szintre.

# BINÁRIS FÁK

# Egyszerű műveletek bináris fákon (folyt.)

- `fulltree` $n$ mélységű ***teljes bináris fát*** épít, és a fa csomópontjait $1$-től $2^n - 1$-ig beszámozza. Egy teljes bináris fában minden csomópontból pontosan két él indul ki, és minden levelének ugyanaz a szintje.

```
(* fulltree n = n mélységű teljes fa
   fulltree : int -> 'a tree *)
fun fulltree n =
      let fun ftree (_, 0) = L
            | ftree (k, n) = N(k, ftree(2*k, n-1), ftree(2*k+1, n-1))
      in ftree(1, n)
      end;
```

- `reflect` a fát a függőleges tengelye mentén tükrözi.

```
(* reflect =
   reflect : 'a tree -> 'a tree *)
fun reflect (N(v,t1,t2)) = N(v, reflect t2, reflect t1)
  | reflect L = L;
```

# KIÍRÁS, NYOMKÖVETÉS

# Nyomkövetés: nodes (akkumulátort nem használ)

```
(* tab : string -> string
   tab i = a sorok behúzásához használandó i füzér szóközökkel kiegészítve
*)
fun tab i = i ^ "    ";

fun nodes f =
      let (* nodes0 i f = a csomópontok száma f-ben; i a behúzáshoz használt füzér
             nodes0 : string -> 'a tree -> int *)
          fun nodes0 i (N(a, t1, t2)) =
                (print("\n" ^ i ^ "<"); printVal a : int; print "> ";
                 printVal(1 +
                          nodes0 (tab i) (printVal t2 before print " *") +
                          nodes0 (tab i) (printVal t1 before print " %")
                          before print "$ "
                         )
                 before print(" #\n" ^ i)
                )
            | nodes0 i L = (print("\n" ^ i); 0)
      in
          nodes0 "" f
      end;
```

# Nyomkövetés: nodesa (akkumulátort használ)

```
fun nodesa f =
      let (* nodes0 i (f, n) = n + a csomópontok száma f-ben;
                                i a behúzáshoz használt füzér
             nodes0 : string -> 'a tree * int -> int
           *)
          fun nodes0 i (N(a, t1, t2), n) =
                (print("\n" ^ i ^ "<"); printVal a : int; print "> ";
                 nodes0 (tab i) (printVal t1 before print(" %\n" ^ (tab i)),
                                 nodes0 (tab i) (printVal t2 before print(" *\n" ^
                                                                         (tab i)),
                                                 printVal(n+1) before print " $"
                                                )
                                )
                 before print(" #" ^ i)
                )
            | nodes0 i (L, n) = (* (print("\n" ^ i); n) *) n
      in
          nodes0 "" (f, 0)
      end;
```

# `nodes` és `nodesa` alkalmazása hét csomópontból álló teljes fára

```
f7 = N(1, N(2, N(4, L, L), N(5, L, L)), N(3, N(6, L, L), N(7, L, L))) : int tree

- nodes f7;                          | - nodesa f7;
                                     |
<1> N(3, N(6, L, L), N(7, L, L)) *   | <1> N(2, N(4, L, L), N(5, L, L)) %
    <3> N(7, L, L) *                 |     N(3, N(6, L, L), N(7, L, L)) *
        <7> L *                      |     1 $
            L %                      |     <3> N(6, L, L) %
            $ 1 #                    |         N(7, L, L) *
        N(6, L, L) %                 |         2 $
        <6> L *                      |         <7> L %
            L %                      |             L *
            $ 1 #                    |             3 $ #
        $ 3 #                        |         <6> L %
    N(2, N(4, L, L), N(5, L, L)) %   |             L *
                                     |             4 $ #         #
```

- **Folytatása a következő lapon.**

# nodes és nodesa alkalmazása . . . (folyt.)

```
f7 = N(1, N(2, N(4, L, L), N(5, L, L)), N(3, N(6, L, L), N(7, L, L))) : int tree

 (nodes f7)                          |  (nodesa f7)
                                     |
    <2> N(5, L, L) *                 |     <2> N(4, L, L) %
        <5> L *                      |         N(5, L, L) *
            L %                      |         5 $
            $ 1 #                    |         <5> L %
        N(4, L, L) %                 |             L *
        <4> L *                      |             6 $ #
            L %                      |         <4> L %
            $ 1 #                    |             L *
        $ 3 #                        |             7 $ #         #     #
    $ 7 #                            |
                                     |
> val it = 7 : int                   | > val it = 7 : int
```

# Nyomkövetés: `depth` (akkumulátort nem használ)

```
fun depth f =
      let (* depth0 i f = az f fa mélysége; i a behúzáshoz használt füzér
             depth0 : string -> 'a tree -> int
          *)
          fun depth0 i (N(a : int, t1, t2)) =
                (print("\n" ^ i ^ "<"); printVal a : int; print "> ";
                 printVal(1 +
                          Int.max(depth0 (tab i) (printVal t2 before print " *"),
                                  depth0 (tab i) (printVal t1 before print " %")
                                 )
                         )
                 before print(" #\n" ^ i))
            | depth0 i L = (print( "\n" ^ i) ; 0)
      in
          depth0 "" f
      end;
```

- *Megjegyzés:* **Az itt alkalmazott** `nodes`, `nodesa`, `depth` **és** `deptha` **függvények nyomkövetés nélküli változatát az előző előadásokon ismertettük.**

# Nyomkövetés: `deptha` (akkumulátort használ)

```
fun deptha f =
      let (* depth0 i (f, d) = d + az f fa mélysége; i a behúzáshoz használt füzér
             depth0 : string -> 'a tree * int -> int *)
          fun depth0 i (N(a : int, t1, t2), d) =
                (print("\n" ^ i ^ "<"); printVal a : int; print "> ";
                 printVal(Int.max(depth0 (tab i) (printVal t2 before print(" *\n" ^
                                                                           (tab i)),
                                                   printVal(d+1) before print " $ "
                                                  ),
                                  depth0 (tab i) (printVal t1 before print(" %\n" ^
                                                                           (tab i)),
                                                   printVal(d+1) before print " & "
                                                  )
                                 )
                         )
                 before print(" #\n" ^ i)
                )
            | depth0 i (L, d) = (print( "\n" ^ i) ; d);
      in  depth0 "" (f, 0)
      end;
```

# depth és deptha alkalmazása hét csomópontból álló teljes fára

```
f7 = N(1, N(2, N(4, L, L), N(5, L, L)), N(3, N(6, L, L), N(7, L, L))) : int tree

- depth f7;                         | - deptha f7;
                                    |
<1> N(3, N(6, L, L), N(7, L, L)) *  |<1> N(3, N(6, L, L), N(7, L, L)) *
    <3> N(7, L, L) *                |    1 $
        <7> L *                     |    <3> N(7, L, L) *
            L %                     |        2 $
            1 #                     |        <7> L *
        N(6, L, L) %                |            3 $
        <6> L *                     |            L %
            L %                     |            3 &
            1 #                     |            3 #
        2 #                         |        N(6, L, L) %
    N(2, N(4, L, L), N(5, L, L)) %  |        2 &
                                    |        <6> L *
                                    |            3 $
                                    |            L %
                                    |            3 &
                                    |            3 #
                                    |        3 #
                                    |    N(2, N(4, L, L), N(5, L, L)) %
                                    |    1 &
```

- **Folytatása a következő lapon.**

# depth és deptha alkalmazása hét csomópontból álló teljes fára

```
f7 = N(1, N(2, N(4, L, L), N(5, L, L)), N(3, N(6, L, L), N(7, L, L))) : int tree

 (depth f7)                            |  (deptha f7)
                                       |
    <2> N(5, L, L) *                   |    <2> N(5, L, L) *
        <5> L *                        |        2 $
            L %                        |        <5> L *
            1 #                        |            3 $
        N(4, L, L) %                   |            L %
        <4> L *                        |            3 &
            L %                        |            3 #
            1 #                        |        N(4, L, L) %
        2 #                            |        2 &
    3 #                                |        <4> L *
                                       |            3 $
                                       |            L %
                                       |            3 &
                                       |            3 #
                                       |        3 #
                                       |    3 #
                                       |
> val it = 3 : int                     | > val it = 3 : int
```

# BINÁRIS FÁK

# Lista előállítása bináris fa elemeiből

- `preorder`, `inorder` és `postorder` ***bináris fából listát*** állít elő. A három függvény abban különbözik egymástól, hogy az egy csomópontból az ott tárolt értéket mikor veszik ki, és milyen sorrendben járják be a bal, ill. a jobb részfát.
  - `preorder` először az értéket veszi ki, majd bejárja a bal, és azután a jobb részfát.
  - `inorder` először bejárja a bal részfát, majd kiveszi az értéket, és végül bejárja a jobb részfát.
  - `postorder` először bejárja a bal, majd a jobb részfát, és utoljára veszi ki az értéket.
- A következő megvalósítások egyszerűek, érthetőek, de nem elég hatékonyak a `@` operátor használata miatt.

# Lista előállítása bináris fa elemeiből (folyt.)

- **Akkumulátor nem használó változatok**
  - ```
    (* preorder f = az f fa elemeinek preorder sorrendű listája
       preorder : 'a tree -> 'a list *)
    fun preorder (N(v,t1,t2)) = v :: preorder t1 @ preorder t2
      | preorder L = [];
    ```
  - ```
    (* inorder f = az f fa elemeinek inorder sorrendű listája
       inorder : 'a tree -> 'a list *)
    fun inorder (N(v,t1,t2)) = inorder t1 @ (v :: inorder t2)
      | inorder L = [];
    ```
  - ```
    (* postorder f = az f fa elemeinek postorder sorrendű listája
       postorder : 'a tree -> 'a list *)
    fun postorder (N(v,t1,t2)) = postorder t1 @ postorder t2 @ [v]
      | postorder L = [];
    ```
- **Az akkumulátort használó változatok nehezebben érthetőek, de *hatékonyabbak*.**
    ```

# Lista előállítása bináris fa elemeiből (folyt.)

- ```
  (* preord(f, vs) = az f fa elemeinek a vs lista elé fűzött,
                     preorder sorrendű listája >>> rev postord !
     preord : 'a tree * 'a list -> 'a list *)
  fun preord (N(v,t1,t2), vs) = v::preord(t1, preord(t2,vs))
    | preord (L, vs) = vs;
  ```
- ```
  (* inord(f, vs) = az f fa elemeinek a vs lista elé fűzött,
                    inorder sorrendű listája
     inord : 'a tree * 'a list -> 'a list *)
  fun inord (N(v,t1,t2), vs) = inord(t1, v::inord(t2,vs))
    | inord (L, vs) = vs;
  ```
- ```
  (* postord(f, vs) = az f fa elemeinek a vs lista elé fűzött,
                      postorder sorrendű listája
     postord : 'a tree * 'a list -> 'a list *)
  fun postord (N(v,t1,t2), vs) = postord(t1, postord(t2, v::vs))
    | postord (L, vs) = vs;
  ```
  ```

# Bináris fa előállítása lista elemeiből: `balPreorder`

- **Listát *kiegyensúlyozott* (balanced) *bináris fává* alakítanak a következő függvények: `balPreorder`, `balInorder` és `balPostorder`; a különbség közöttük most is a bejárási sorrendben van.**

- ```
  (* balPreorder xs = az xs lista elemeiből álló, preorder
                      bejárású, kiegyensúlyozott fa
      balPreorder: 'a list -> 'a tree
  *)
  fun balPreorder (x::xs) =
        let val k = length xs div 2
        in
           N(x, balPreorder(List.take(xs, k)),
                balPreorder(List.drop(xs, k)))
        end
    | balPreorder [] = L;
  ```

- **A hatékonyságot kisebb mértékben rontja, hogy `List.take` és `List.drop` egymástól függetlenül *kétszer* mennek végig a lista első felén.**
  ```

# Bináris fa előállítása lista elemeiből: take'ndrop

- Írjunk take'ndrop néven olyan függvényt, amelynek egy xs listából és egy k egészből álló pár az argumentuma, és egy olyan pár az eredménye, amelynek első tagja a lista első k db eleme, második tagja pedig a lista többi eleme.

```
(* take'ndrop(xs, k) = olyan pár, amelynek első tagja xs első k db
                       eleme, második tagja pedig xs maradéka
   take'ndrop : 'a list * int -> 'a list * 'a list
*)
fun take'ndrop (xs, k) =
      let fun td (xs, 0, ts) = (rev ts, xs)
            | td (x::xs, k, ts) = td(xs, k-1, x::ts)
            | td ([], _, ts) = (rev ts, [])
      in
          td(xs, k, [])
      end;
```

- take'ndrop felhasználása, nevezetesen az eredményül átadott pár miatt módosítani kell balpreorder felépítésén.

# Bináris fa előállítása lista elemeiből: `balPreorder`, újra

- **Ez volt:**

```
fun balPreorder (x::xs) =
      let val k = length xs div 2
      in N(x, balPreorder(List.take(xs, k)), balPreorder(List.drop(xs, k)))
      end
  | balPreorder [] = L;
```

- **Ez lett:**

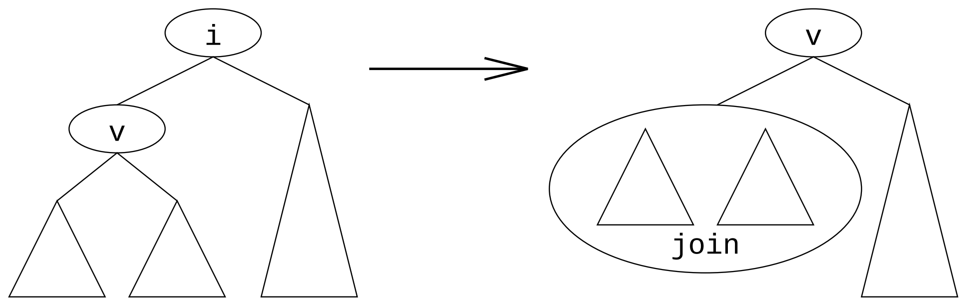
```
(* balPreorder xs = az xs lista elemeiből álló, preorder bejárású, ...
    balPreorder: 'a list -> 'a tree *)
fun balPreorder (x::xs) =
      let val k = length xs div 2
          val (ts, ds) = take'ndrop(xs, k)
      in N(x, balPreorder ts, balPreorder ds)
      end
  | balPreorder [] = L;
```

# Bináris fa előállítása lista elemeiből

- ```
  (* balInorder xs = az xs lista elemeiből álló, inorder bejárású,
                     kiegyensúlyozott fa
      balInorder: 'a list -> 'a tree
  *)
  fun balInorder (xxs as x::xs) =
        let val k = length xxs div 2
            val ys = List.drop(xxs, k)
        in N(hd ys, balInorder(List.take(xxs, k)), balInorder(tl ys))
        end
    | balInorder [] = L;
  ```
- ```
  (* balPostorder xs = az xs lista elemeiből álló, postorder
                       bejárású, kiegyensúlyozott fa
      balPostorder: 'a list -> 'a tree
  *)
  fun balPostorder xs = balPreorder(rev xs);
  ```
- `balInorder take'ndrop`-pal való definiálását meghagyjuk gyakorló feladatnak.

# Elem törlése bináris fából

- Adott értékű *elemet* rekurzív módszerrel *megkeresni* egyszerű feladat.
- *Új elemet beszúrni* sem nehéz: rekurzív módszerrel keresünk egy levelet, és ennek a helyére berakjuk az új értéket. Ha a fa rendezve van, ügyelnünk kell arra, hogy a rendezettség megmaradjon.
- Adott értékű *elemet* vagy *elemeket* rekurzív módszerrel *kitörölni* valamivel nehezebb: ha a törlendő érték az éppen vizsgált részfa gyökerében van, a két részre széteső fa részfáit *egyesíteni* kell, miután a törlést a két részfán már végrehajtottuk.




- Megtehetjük, hogy előbb egyesítjük a két részfát, majd az eredményül kapott fából töröljük az adott értékű elemet.

# Elem törlése bináris fából (folyt.)

- A `remove` rendezetlen bináris fából törli az `i` értékű elem *összes* előfordulását.
- A `join`-nal egyesítjük a törlés hatására létrejövő két részfát: a bal részfát lebontja, és közben az elemeit egyesével berakja a jobb részfába.

```
(* join(b, j) = a b és a j fák egyesítésével létrehozott fa
   join : 'a tree * 'a tree -> 'a tree *)
fun join (N(v, lt, rt), tr) = N(v, join(lt, rt), tr)
  | join (L, tr) = tr;
```

- ```
  (* remove(i, f) = i összes előfordulását törli f-ből
     remove : 'a * 'a tree -> 'a tree *)
  fun remove (i, N(v,lt,rt)) =
        if i<>v then N(v, remove(i,lt), remove(i,rt))
                else join(remove(i,lt), remove(i,rt))
    | remove (i, L) = L;
  ```
  ```

# LISTÁK HASZNÁLATA

## A „jó" számok" előállítása SML-függvénnyel

- „Jó" számok: keressük azokat a számokat, amelyek négyzete háromjegyű, és a szám fordítottjával kezdődnek (vö. Prolog-előadások).

```
(* joSzamok i = azoknak az i és 100 közötti kétjegyű számoknak a listája,
            amelyek négyzete háromjegyű, és a szám fordítottjával kezdődnek
   joSzamok : int -> int list
*)
fun joSzamok i =
       if i < 100
       then if i * i div 10 = i mod 10 * 10 + i div 10
            then i :: joSzamok (i+1)
            else joSzamok (i+1)
       else [];
```

```
joSzamok 10;
```

- Írjunk általánosabb megoldást: emeljük ki a szám jó voltának és a felső határ elérésének a vizsgálatát!

# A „jó” számok” előállítása SML-függvénnyel (folyt.)

- A `jsz` és a `lim` segédfügvények

```
(* jsz1 i = igaz, ha a kétjegyű i négyzete háromjegyű és a
            fordítottjával kezdődik
   jsz1 : int -> bool *)
fun jsz1 i = i * i div 10 = i mod 10 * 10 + i div 10;

(* jsz2 i = igaz, ha a háromjegyű i egyes és százas helyiértékű
            jegyei egyenlők
   jsz2 : int -> bool *)
fun jsz2 i = i > 100 andalso
             (i mod 10, i div 100) = (i div 100, i mod 10);

(* lim x i = igaz, ha i kisebb x-nél
   lim : int -> int -> bool *)
fun lim x i = i < x;
```

# A „jó” számok” előállítása SML-függvénnyel (folyt.)

- `joSzamok` egy szokásos megvalósítása

```
(* joSzamok lim f i = a (lim max)-ot és az f-et kielégítő i egészek
                      listája, ahol (lim max) a felső határ elérését,
                      f pedig i jó szám voltát vizsgálja
   joSzamok : (int -> bool) -> (int -> bool) -> int -> int list
*)
fun joSzamok lim f i =
       if lim i
       then if f i
            then i :: joSzamok lim f (i+1)
            else joSzamok lim f (i+1)
       else [];

joSzamok (lim 100) jsz1 10;
joSzamok (lim 300) jsz2 10;
```

# A „jó” számok” előállítása SML-függvénnyel (folyt.)

- `joSzamok` **jobbrekurzív változata**

```
(* joSzamok lim f i = a (lim max)-ot és az f-et kielégítő i egészek
                      listája, ahol (lim max) a felső határ elérését,
                      f pedig i jó szám voltát vizsgálja
   joSzamok : (int -> bool) -> (int -> bool) -> int -> int list *)
fun joSzamok lim f i =
      let fun jSz i zs =
                 if lim i
                 then jSz (i+1) (if f i then i :: zs else zs)
                 else rev zs
      in
          jSz i []
      end;

joSzamok (lim 100) jsz1 10;
joSzamok (lim 300) jsz2 10;
```

# LEÁLLÁSI FELTÉTEL KEZELÉSE

# Leállási feltétel kezelése

- Háromféle megoldást mutatunk be:
  - igazságérték – `true`, `false` – visszaadásával,
  - az `'a option` típus alkalmazásával,
  - kivételkezeléssel.
- Példa: „jó” számok előállítása
- A következő érték előállítására és a felső határ elérésének vizsgálatára *speciális* függvényt írunk, háromféle változatban:

  `kov x i` jelzi, hogy `i` kisebb-e az `x` felső határnál, és ha igen, az `i` után következő értéket adja eredményül, egyébként az eredmény tetszőleges.

# A `kov` függvény háromféle változatban

- **Igazságérték visszaadásával:**

```
(* kov11 x i = (i+1, true), ha i < x (felső határ), egyébként (i, false)
   kov11 : int -> int -> int * bool *)
fun kov11 x i = if i < x then (i+1, true) else (i, false);
```

- `int option` **alkalmazásával:**

```
(* kov21 x i = SOME(i+1), ha i < x (felső határ), egyébként NONE
   kov21 : int -> int -> int option *)
fun kov21 x i = if i < x then SOME(i+1) else NONE;
```

- **Kivételjelzéssel:**

```
exception Limit;
(* kov31 x i = i+1, ha i < x (felső határ), egyébként a Limit kivétel
   kov31 : int -> int -> int *)
fun kov31 x i = if i < x then i+1 else raise Limit;
```

# Leállási feltétel kezelése igazságértékkel

- `kov : 'a -> 'a -> 'a * bool          (* nxt = kov x *)`

```
(* findAll1 nxt f i = az f i összes megoldásának listája a felső határ elérését
          vizsgáló és a következő értéket eredményező nxt függvény segítségével
   findAll1 : ('a -> 'a * bool) -> ('a -> bool) -> 'a -> 'a list *)
fun findAll1 nxt f i =
      let fun fAll f z zs =
                let val (j, b) = nxt z
                in
                    if b then fAll f j (if f z then z::zs else zs)
                    else rev zs
                end
      in
          fAll f i []
      end;

findAll1 (kov11 100) jsz1 10;
findAll1 (kov11 300) jsz2 100;
```

# Leállási feltétel kezelése az 'a option típus alkalmazásával

- `kov : 'a -> 'a -> 'a option          (* nxt = kov x *)`

```
(* findAll2 nxt f i = az f i összes megoldásának listája a felső határ elérését
          vizsgáló és a következő értéket eredményező nxt függvény segítségével
   findAll2 : ('a -> 'a option) -> ('a -> bool) -> 'a -> 'a list
*)
fun findAll2 nxt f i =
      let fun fAll f z zs =
                case nxt z of
                    SOME j => fAll f j (if f z then z::zs else zs)
                  | NONE   => rev zs
      in
          fAll f i []
      end;

findAll2 (kov21 100) jsz1 10;
findAll2 (kov21 300) jsz2 100;
```

# Leállási feltétel kezelése kivételkezeléssel

- `kov : 'a -> 'a -> 'a          (* nxt = kov x *)`

```
(* findAll3 nxt f i = az f i összes megoldásának listája a felső határ elérését
          vizsgáló és a következő értéket eredményező nxt függvény segítségével
   findAll3 : ('a -> 'a) -> ('a -> bool) -> 'a -> 'a list
*)
fun findAll3 nxt f i =
      let fun fAll f z zs = fAll f (nxt z) (if f z then z::zs else zs)
                                handle Limit => rev zs
      in
          fAll f i []
      end;

findAll3 (kov31 100) jsz1 10;
findAll3 (kov31 300) jsz2 100;
```

# LISTÁK RENDEZÉSE

# Listák rendezése

- `inssort` (beszúró rendezés),
- `quicksort` (gyorsrendezés),
- `tmsort` (felülről lefelé haladó összefésülő rendezés),
- `bmsort` (alulról felfelé haladó összefésülő rendezés),
- `smsort` (simarendezés).

# Beszúró rendezés

- **Az `ins` segédfüggvény az `x` elemet a megfelelő helyre rakja be az `ys` listában:**

```
(* ins (x, ys) = az x értékkel a <= reláció szerint bővített ys
   ins : real * real list -> real list
   PRE: ys a <= reláció szerint rendezett *)
fun ins (x, y::ys) = if x <= y then x::y::ys else y::ins(x, ys)
  | ins (x : real, []) = [x];
```

- **`inssort`-tal rekurzívan rendezzük a lista maradékát; végrehajtási ideje $O(n^2)$:**

```
(* inssort f xs = az xs elemeinek az f függvény segíségével
                  rendezett listája
   inssort : ('a * 'b list -> 'b list) -> 'a list -> 'b list *)
fun inssort f (x::xs) = f(x, inssort f xs)
  | inssort _  [] = [];
```

- **Példa `inssort` alkalmazására:**

```
inssort ins [4.24, 4.1, 5.67, 1.12, 4.1, 0.33, 8.0];
```

# LISTÁK RENDEZÉSE

# Beszúró rendezés, generikus változat

- **Az `ins` függvényt generikussá tesszük:**

```
(* ins cmp (x, ys) = az x értékkel a cmp reláció szerint bővített ys
   ins : ('a * 'a -> bool) -> 'a * 'a list -> 'a list
   PRE: ys a cmp reláció szerint rendezve van *)
fun ins cmp (x, ys) =
      let fun ins0 (y::ys) = if cmp(x, y) then x::y::ys else y::ins0 ys
            | ins0 [] = [x]
      in  ins0 ys
      end;
```

- **Ezzel `inssort` egy újabb változata:**

```
(* inssort cmp xs = az xs elemeinek a cmp reláció szerint rendezett listája
   inssort : ('a * 'a -> bool) -> 'a list -> 'a list *)
fun inssort cmp (x::xs) = ins cmp (x, inssort cmp xs)
  | inssort _ [] = [];
```

# Beszúró rendezés, generikus változat (folyt.)

- `inssort` eddigi változatai előbb elemeire szedik szét a rendezendő listát, majd hátulról visszafelé haladva, rendezés közben építik fel az újat.
- A jobbrekurziót és akkumulátort használó változatnak (`inssort2`) kisebb veremre van szüksége, mivel a listáról leválasztott elemeket balról jobbra haladva azonnal berakja a helyükre az eredménylistában. (A két megoldás futási idejét később összehasonlítjuk).

```
fun inssort2 cmp xs =
              (* sort xs zs = az xs már feldolgozott elemeinek a cmp
                              reláció szerint rendezett listája zs
                 sort :  'a list -> 'a list -> 'a list *)
      let fun sort (x::xs) zs = sort xs (ins cmp (x, zs))
            | sort [] zs = zs
      in
          sort xs []
      end;
```

# Beszúró rendezés `foldr`-rel és `foldl`-lel

- A második argumentumát akkumulátorként használó `foldl` kisebb vermet használ `foldr`-nél, ezért `inssortL` hosszabb listákat tud rendezni:

```
fun inssortR cmp = foldr (ins cmp) [];
fun inssortL cmp = foldl (ins cmp) [];
```

- Példák `insort`-tal és `insort2`-vel:

```
inssort op<= [4.24, 4.1, 5.67, 1.12, 4.1, 0.33, 8.0];
inssort2 op>= [4, 4, 5, 1, 0, 8];
inssort op< (explode "qwerty");
```

- Példák `foldr` és `foldl` felhasználásával:

```
fun inssortRi cmp = foldr (ins cmp)[];
fun inssortLr cmp = foldl (ins cmp)([] : real list);
```

```
inssortRi op>= [4, 4, 5, 1, 0, 8];
inssortLr op>= [4.24, 4.1, 5.67, 1.12, 4.1, 0.33, 8.0];
```

# A futási idők összehasonlítása

- 2000 elemet tartalmazó, véletlenszerűen előállított, illetve eredetileg éppen fordított sorrendű listák rendezéséhez szükséges futási időt mérünk.
  - Véletlen eloszlású egészlistát állít elő a `Random` könyvtárbeli `rangelist` függvény:

    ```
    val xs2000R = Random.rangelist (1, 100000) (2000, Random.newgen());
    ```

  - Növekvő sorrendű egészlistát állít elő a `--` operátor:

    ```
    infix --;
    fun fm -- to =
          let
              fun upto to zs = if to < fm then zs else upto (to-1) (to::zs)
          in
              upto to []
          end;

    val xs2000N = 1 -- 2000;
    ```

# A futási idők összehasonlítása (folyt.)

- **A futási időt az alábbi függvénnyel mérjük meg:**

```
fun futIdo (sort, sortFn) (cmp, cmpFn) (xs, kind) =
      let val starttime = Timer.startCPUTimer()
          val zs = sort cmp xs
          val {usr=tim,...} = Timer.checkCPUTimer starttime
      in
          "Int sort with " ^ sortFn ^ ", " ^ cmpFn ^
          ", length = " ^ Int.toString(length xs) ^ " (" ^
          kind ^ "), time = " ^ Time.fmt 2 tim ^ " sec\n"
      end;

val t1N = futIdo (inssort, "inssort") (op>=, "op>=") (xs2000N, "increasing");
val t2N = futIdo (inssort2, "inssort2") (op>=, "op>=") (xs2000N, "increasing");
val t1R = futIdo (inssort, "inssort") (op>=, "op>=") (xs2000R, "random");
val t2R = futIdo (inssort2, "inssort2") (op>=, "op>=") (xs2000R, "random");
```

# A futási idők összehasonlítása (folyt.)

- A 2000 elemű, fordított sorrendű lista rendezése az akkumulátort nem használó `inssort`-változatokkal több mint 5 s-ig, az akkumulátort használó változatokkal csak 0.01 s-ig tart (linux, 233 MHz-es Pentium).

```
Int sort with inssort, op>=, length = 2000 (increasing), time = 5.18 sec
Int sort with inssort2, op>=, length = 2000 (increasing), time = 0.01 sec
Int sort with inssortRi, op>=, length = 2000 (increasing), time = 5.14 sec
Int sort with inssortLi, op>=, length = 2000 (increasing), time = 0.01 sec
```

- Eltűnik a különbség, ha ugyanolyan hosszú, de véletlenszerűen előállított listákat rendezünk.

```
Int sort with inssort, op>=, length = 2000 (random), time = 2.39 sec
Int sort with inssort2, op>=, length = 2000 (random), time = 2.26 sec
Int sort with inssortRi, op>=, length = 2000 (random), time = 2.40 sec
Int sort with inssortLi, op>=, length = 2000 (random), time = 2.24 sec
```

# Gyorsrendezés, akkumulátor használata nélkül

```
(* quicksort1 cmp xs = az xs elemeinek cmp szerint rendezett listája
   quicksort1 : ('a * 'a -> order) -> 'a list -> 'a list *)
fun quicksort1 cmp xs =
      let (* qs : 'a list -> 'a list
             qs ys = az ys elemeinek cmp szerint rendezett listája *)
          fun qs (m::ys) =
                let (* partition : 'a list *  'a list * ' list -> 'a list
                       partition (xs, ls, rs) = ... *)
                    fun partition (x::xs, ls, rs) =
                          if cmp(x, m) = LESS then partition(xs, x::ls, rs)
                                              else partition(xs, ls, x::rs)
                      | partition ([], ls, rs) = qs ls @ (m::qs rs)
                in
                    partition (ys, [], [])
                end
            | qs [] = []
      in
         qs xs
      end;
```

# Gyorsrendezés, akkumulátor használatával

```
(* quicksort2 cmp xs = az xs elemeinek cmp szerint rendezett listája
   quicksort2 : ('a * 'a -> order) -> 'a list -> 'a list *)
fun quicksort2 cmp xs =
      let (* qs : 'a list -> 'a list
             qs ys = az ys elemeinek cmp szerint rendezett listája  *)
          fun qs (m::ys) zs =
                let (* partition : 'a list * a' list * 'a list -> 'a list
                       partition (xs, ls, rs) = ... *)
                    fun partition (x::xs, ls, rs) =
                          if cmp(x, m) = LESS then partition(xs, x::ls, rs)
                                              else partition(xs, ls, x::rs)
                      | partition ([], ls, rs) = qs ls (m :: qs rs zs)
                in
                    partition (ys, [], [])
                end
            | qs [] zs = zs
      in
          qs xs []
      end;
```

# A futási idők összehasonlítása

```
val t1 = futIdo (inssort2, "inssort2") (op>=, "op>=") (xs2000R, "random");
                                                   (* ~ 2 M összehasonlítás! *)
val t3 = futIdo (quicksort2, "quicksort2")
                (Int.compare, "Int.compare") (xs20000R, "random");
val t4 = futIdo (Listsort.sort, "Listsort.sort")
                (Int.compare, "Int.compare") (xs20000R, "random");
                                                   (* ~ 300 E összehasonlítás *)

Int sort with inssort2, op>=, length = 2000 (random), time = 2.30 sec

Int sort with quicksort1, Int.compare, length = 20000 (random), time = 2.18 sec
Int sort with quicksort2, Int.compare, length = 20000 (random), time = 1.72 sec
Int sort with Listsort.sort, Int.compare, length = 20000 (random), time = 1.76 sec

Int sort with quicksort2, Int.compare, length = 200000 (random), time = 27.13 sec
Int sort with quicksort1, Int.compare, length = 200000 (random), time = 32.59 sec

val t7 = futIdo (Listsort.sort, "Listsort.sort") (Int.compare, "Int.compare")
         (Random.rangelist (1, 100000) (200000, Random.newgen()), "random");
! Uncaught exception:
! Out_of_memory
```

# Összefésülő rendezések

- **Az összefésülő rendezéshez kell egy olyan függvény, amely két listát növekvő sorrendben egyesít:**

```
(* merge(xs, ys) = xs és ys elemeinek <= szerint egyesített listája
   merge : int list * int list -> int list
*)
fun merge (xxs as x::xs, yys as y::ys)=
      if x <= y
      then x::merge(xs, yys)
      else y::merge(xxs, ys)
  | merge ([], ys) = ys
  | merge (xs, []) = xs;
```

- **Hatékonyságromlást okoz, hogy a részeredményeket a veremben tároljuk. Iteratív megoldás esetén meg kell fordítani az eredménylistát.**

# Fölülről lefelé haladó összefésülő rendezés

- A fölülről lefelé haladó összefésülő rendezés *(top-down merge sort)* akkor hatékony, ha közel azonos hosszúságú az a két lista, amelyekre a rendezendő listát szétszedjük.

```
(* tmsort xs = az xs elemeinek a <= reláció szerint rendezett listája
   tmsort : int list -> int list
*)
fun tmsort xs = let val h = length xs
                    val k = h div 2
                in
                   if h > 1
                   then merge(tmsort(List.take(xs, k)),
                              tmsort(List.drop(xs, k)))
                   else xs
                end;
```

- A legrosszabb esetben $O(n \cdot log\, n)$ lépésre van szükség.

# Alulról fölfelé haladó összefésülő rendezés

- Az alulról fölfelé haladó összefésülő rendezés *(bottom-up merge sort)* legegyszerűbb változata az eredeti $k$ hosszúságú listát $k$ darab egyelemű listára bontja, majd a szomszédos listákat összefuttatja, így 2, 4, 8, 16 stb. elemű listákat állít elő.
- R. O´Keefe algoritmusa (1982) lépésről lépésre futtatja össze az egyforma hosszú részlistákat, de csak az utolsó lépésben rendezi az összeset. Az alábbi példában az összefuttatott részlistákat *egymás mellé írással* jelöljük:

```
AB  C D E F G H I J K
AB  CD  E F G H I J K
ABCD    E F G H I J K
ABCD    EF  G H I J K
ABCD    EF  GH  I J K
ABCD    EFGH    I J K
ABCDEFGH        I J K
ABCDEFGH        IJ  K
...
```

# Alulról fölfelé haladó összefésülő rendezés (folyt.)

- `bmsort` a `sorting` segédfüggvényt használja, amelynek
  - első argumentuma a rendezendő lista,
  - második argumentuma a már rendezett részlistákat gyűjti,
  - harmadik argumentuma az adott lépésben összefuttatandó elem sorszáma.

```
(* bmsort xs = az xs elemeinek a <= reláció szerint rendezett listája
   bmsort : int list -> int list
*)
fun bmsort xs = sorting(xs, [], 0);
```

# Alulról fölfelé haladó összefésülő rendezés (folyt.)

- Ha a rendezendő lista (`xs`) még nem fogyott el, soron következő eleméből `sorting` egyelemű listát (`[x]`) képez, és ezt a már rendezett részlisták listája (`lss`) elé fűzve meghívja a `mergepairs` segédfüggvényt. `mergepairs` az argumentumként átadott lista két azonos hosszúságú bal oldali részlistáját fűzi egybe, feltéve persze, hogy vannak ilyenek. `k` az éppen átadott elem sorszáma. Ha a rendezendő lista kiürült, `sorting` a kétszintű lista egyetlen elemét, a rendezett listát adja eredményül.

```
(* sorting(xs, lss, k) = a még rendezetlen xs lista elemeit berakja
                         a k elemet tartalmazó, már rendezett lss listába
   sorting : int list * int list list * int -> int list
   PRE: k >= 0
*)
fun sorting (x::xs, lss, k) = sorting(xs, mergepairs([x]::lss, k+1), k+1)
  | sorting ([], lss, k) = hd(mergepairs(lss, 0));
```

# Alulról fölfelé haladó összefésülő rendezés (folyt.)

- `mergepairs` egyetlen listában gyűjti a már összefuttatott részlistákat. Az éppen átadott elem `k` sorszámából dönti el, hogy mit kell csinálnia a következő részlistával.

```
(* mergepairs(llss, n)= az n elemet tartalmazó, már rendezett llss lista
              első két részlistáját, ha egyforma a hosszuk, összefuttatja
   mergepairs : int list list -> int list list
   PRE: n >= 0
*)
fun mergepairs (llss as ls1::ls2::lss, n) = (* legalább kételemű a lista *)
      if n mod 2 = 1 then llss
                     else mergepairs(merge(ls1, ls2)::lss, n div 2)
  | mergepairs (lss, _) = lss (* egyelemű a lista *)
```

- Ha `n` páratlan, `mergepairs` a listát változtatás nélkül adja vissza, ha páros, akkor az `llss` lista elején álló két, egyforma hosszú listát egyetlen rendezett listává futtatja össze. `n=0`-ra `mergepairs` az összes listák listáját olyan listává futtatja össze, amelynek egyetlen eleme maga is lista.

# Alulról fölfelé haladó összefésülő rendezés (folyt.)

- A legrosszabb esetben $O(n \cdot log\, n)$ lépésre van szükség.
- A függvények működését egy példán is bemutatjuk. A kezdőhívás legyen

```
bmsort [1,2,3,4,5,6,7,8,9] ---> sorting ([1,2,3,4,5,6,7,8,9], [], 0)
```

- Amíg `sorting` első argumentuma a nem üres `(x::xs)` lista, `sorting` saját magát hívja meg. A rekurzív hívás
  - első argumentuma a lépésenként egyre rövidülő `xs` lista,
  - második argumentuma a `mergepairs([x]::lss, k+1)` függvényalkalmazás eredménye, ahol kezdetben `lss = []`,
  - harmadik argumentuma (`k+1`) a már feldolgozott listaelemek száma.

```
fun sorting (x::xs, lss, k) = sorting(xs, mergepairs([x]::lss, k+1), k+1)
  | sorting ([], lss, k) = hd(mergepairs(lss, 0));
```

# Alulról fölfelé haladó összefésülő rendezés (folyt.)

- A következő táblázatos elrendezés
  - `mergepairs` mindkét argumentumát,
  - a rekurzív `sorting` hívás itt `j`-vel jelölt 3. argumentumát, `k+1`-et, és
  - bináris számként `k`-t mutatja lépésről lépésre.
- A `sorting` függvény hívja `mergepairs`-t azokban a sorokban, amelyekben a `j` új értéket vesz föl, a többi helyen `mergepairs` hívása rekurzív.
- Ne feledjük, hogy `mergepairs`-nek listák listája az első argumentuma!
- A táblázat utolsó oszlopa a vonatkozó magyarázatra hivatkozik.
- Vegyük észre, hogy kapcsolat van az `llss` első eleme utáni listaelemek hossza és a `k` bitjei között! Ha `k` valamelyik bitje 1, akkor (balról jobbra haladva) az `llss` megfelelő listaelemének a hossza az adott bit helyiértékével egyenlő. A 0 értékű biteknek megfelelő listaelemek „hiányoznak” `llss`-ből.

```
fun sorting (x::xs, lss, k) = sorting(xs, mergepairs([x]::lss, k+1), k+1)
  | sorting ([], lss, k) = hd(mergepairs(lss, 0));
```

# Alulról fölfelé haladó összefésülő rendezés (folyt.)

| llss | n | j | k | |
|---|---|---|---|---|
| [[1]] | 1 | 1 | 0 | m1 |
| [[2],[1]] | 2 | 2 | 1 | m2 |
| [[1,2]] | 1 | | | m3 |
| [[3],[1,2]] | 3 | 3 | 10 | m3 |
| [[4],[3],[1,2]] | 4 | 4 | 11 | m2 |
| [[3,4],[1,2]] | 2 | | | m2 |
| [[1,2,3,4]] | 1 | | | m3 |
| [[5],[1,2,3,4]] | 5 | 5 | 100 | m3 |
| [[6],[5],[1,2,3,4]] | 6 | 6 | 101 | m2 |
| [[5,6],[1,2,3,4]] | 3 | | | m3 |
| [[7],[5,6],[1,2,3,4]] | 7 | 7 | 110 | m3 |
| [[8],[7],[5,6],[1,2,3,4]] | 8 | 8 | 111 | m2 |
| [[7,8],[5,6],[1,2,3,4]] | 4 | | | m2 |
| [[5,6,7,8],[1,2,3,4]] | 2 | | | m2 |
| [[1,2,3,4,5,6,7,8]] | 1 | | | m3 |
| [[9],[1,2,3,4,5,6,7,8]] | 9 | 9 | 1000 | m3 |
| [[9],[1,2,3,4,5,6,7,8]] | 0 | 0 | | m4 |
| [[1,2,3,4,5,6,7,8,9]] | | | | |

```
fun sorting (x::xs, lss, k) =
      sorting(xs,
              mergepairs([x]::lss, k+1),
              k+1)
  | sorting ([], lss, k) =
      hd(mergepairs(lss, 0));
```

**m1:** Az argumentumként átadott listának egyetlen eleme van (maga is lista), ezért az argumentumot mergepairs második klóza változtatás nélkül visszaadja az őt hívó `sorting`-nak.

**m2:** `n` páros, ez azt jelzi, hogy az argumentumként átadott lista első két eleme egyforma hosszú lista, amelyeket `merge` egyetlen rendezett listává futtat össze, majd az eredménnyel `mergepairs` első klóza meghívja saját magát.

**m3:** `n` páratlan, ez azt jelzi, hogy az argumentumként átadott lista első két eleme nem egyforma hosszú lista, ezért az argumentumot `mergepairs` első klóza változtatás nélkül visszaadja az őt hívó `sorting`-nak.

**m4:** `n=0`, az összes listák listáját olyan listává kell összefuttatni, amelynek egyetlen lista az eleme.

# Simarendezés

- Az applikatív simarendezés (*smooth sort)* algoritmusa O'Keefe alulról fölfelé haladó rendezéséhez hasonló, de nem egyelemű listákat, hanem növekvő *futamokat* állít elő.
- Ha a futamok száma $n$-től független, azaz a lista majdnem rendezve van, akkor az algoritmus végrehajtási ideje $O(n)$, és a legrosszabb esetben is legfeljebb csak $O(n \cdot log\, n)$.

```
(* nextrun : int list * int list -> int list * int lis
   nextrun (run, xs) = ... *)
fun nextrun (run, x::xs) =
      if x < hd run then (rev run, x::xs) else nextrun(x::run, xs)
  | nextrun (run, []) = (rev run, []);
```

- `nextrun` eredménye egy pár, ennek
  - első tagja a futam (egy növekvő számsorozat),
  - a második tagja pedig a rendezendő lista maradéka.

# Simarendezés (folyt.)

- A futam csökkenő sorrendben bővül, kilépéskor a futamot meg kell fordítani. `smsorting` a futamokat ismételten előállítja és összefuttatja:

```
(* smsorting : int list * int list list * int -> int list
   smsorting (xs, lss, k) = ... *)
fun smsorting (x::xs, lss, k) =
          let val (run, tail) = nextrun([x], xs)
          in
             smsorting(tail, mergepairs(run::lss, k+1), k+1)
          end
  | smsorting ([], lss, k) = hd(mergepairs(lss, 0));
```

- ```
  (* smsort : int list -> int list
     smsort xs = az xs elemeinek a <= reláció szerint rendezett listája *)
  fun smsort xs = smsorting(xs, [], 0);
  ```

- A simarendezés egy változata `sort` néven megtalálható a `Listsort` könyvtárban.
  ```

# A futási idők összehasonlítása

```
fun futIdo2 (sort, sortFn) (xs, kind) =
      let val starttime = Timer.startCPUTimer()
          val zs = sort xs
          val {usr=tim,...} = Timer.checkCPUTimer starttime
      in  "Int sort with " ^ sortFn ^ ", length = " ^ Int.toString(length xs) ^
          " (" ^kind ^ "), time = " ^ Time.fmt 2 tim ^ " sec\n"
      end;

val t101 = futIdo2 (tmsort, "tmsort")
             ((Random.rangelist (1, 100000) (100000, Random.newgen())), "random");
val t102 = futIdo2 (bmsort, "bmsort")
             ((Random.rangelist (1, 100000) (100000, Random.newgen())), "random");
val t103 = futIdo2 (smsort, "smsort")
             ((Random.rangelist (1, 100000) (100000, Random.newgen())), "random");

Int sort with tmsort, length = 100000 (random), time = 10.96 sec
Int sort with bmsort, length = 100000 (random), time = 7.69 sec
Int sort with smsort, length = 100000 (random), time = 7.70 sec
Int sort with quicksort2, Int.compare, length = 100000 (random), time = 11.98 sec
Int sort with Listsort.sort, Int.compare, length = 100000 (random), time = 14.17 sec
```

# LISTÁK HASZNÁLATA

# *n* vezér a sakktáblán

- Hányféleképpen rakható *n* vezér a sakktáblára úgy, hogy ne üssék egymást?

A vezéreket tartalmazó mezők sorának számát az egyes oszlopokon belül egy `n` hosszú sorvektor adott oszlophoz rendelt mezőjébe írt `<= s < n` szám adja meg. Példa `n = 4` esetén:

```
   +---+---+---+---+
   |   |   |   |   |
   +---+---+---+---+


     0   ---->  n-1
   +---+---+---+---+
 0 |   |   |   |   |
   +---+---+---+---+
 | |   |   |   |   |
 | +---+---+---+---+
 V |   |   |   |   |
   +---+---+---+---+
n-1|   |   |   |   |
   +---+---+---+---+
```

A sorvektort (egy egyre bővülő) listával valósítjuk meg. Egy listához balról könnyű új elemeket fűzni, a táblát és a vezérek helyzetét leíró listát hossztengelye mentén tükrözzük.

```
     ...-+---+---+---+
             |   |   |   |
     ...-+---+---+---+


      n-1  <----     0
     ...-+---+---+---+
  0      |   |   |   |
     ...-+---+---+---+
  |      |   |   |   |
  |  ...-+---+---+---+
  V      |   |   |   |
     ...-+---+---+---+
 n-1     |   |   |   |
     ...-+---+---+---+
```

# $n$ vezér a sakktáblán (folyt.)

- Azt, hogy az új vezért üti-e a már táblára rakott másik vezér, a sorvektor vizsgálatával dönthetjük el, amely tehát azt adja meg, hogy a listaelemek indexe által meghatározott oszlopban és a listaelem értéke által meghatározott sorban vezér van.

  1. Az új vezér sorának száma, azaz az új listalem értéke nem fordulhat elő a lista már felépített részében.
  2. Az új vezér átlós irányban sem lehet egy vonalban más vezérrel a táblán. Ez azt jelenti, hogy ha a sorvektort jelentő lista elejére az `s` sorindexet akarjuk rakni, akkor az `i`-edik elemének az értéke, ha van ilyen eleme, nem lehet `s-(i+1)`, ill. `s+(i+1)`.
  3. A következő példa segít megvilágítani az esetet.

## $n$ vezér a sakktáblán (folyt.)

- Ha a 2-es oszlopba és az s=1-es sorba akarjuk lerakni az új vezért, akkor az x-szel jelölt mezőket kell megvizsgálnunk. Az eddig létrehozott listának (sorvektornak) két eleme van, ahol a lista fejének az indexe 0. A listafej értéke nem lehet s-1, sem s+1. A lista rekurzív algoritmussal dolgozható fel.

```
            ...-+---+---+
              s |   |   |
            ...-+---+---+

         n-1  <----     0
        ...-+---+---+---+
      0     |   | x |   |
        ...-+---+---+---+
      |     | q |   |   |
      | ...-+---+---+---+
      V     |   | x |   |
        ...-+---+---+---+
     n-1    |   |   | x |
        ...-+---+---+---+
```

# *n* vezér a sakktáblán (folyt.)

- „Ütésben van”-vizsgálat

```
(* utesbenVan : int list -> bool
   utesbenVan zs = igaz, ha a (hd zs) vezér nincs ütésben
   egyetlen (tl zs)-beli vezérrel sem
*)
fun utesbenVan [] = false
  | utesbenVan (z::zs) =
      let fun uV _ _ [] = false
            | uV s1 s2 (r::rs) =
                 z = r orelse s1 = r orelse s2 = r orelse
                 uV (s1-1) (s2+1) rs
      in
          uV (z-1) (z+1) zs
      end;
```

# *n* vezér a sakktáblán (folyt.)

- Egy megoldás előállítása

```
exception Zsakutca;

(* vezerek0 : int -> int list
   vezerek0 n = a feladvány egy megoldása n vezér esetén
*)
fun vezerek0 n =
      let
          fun vez0 z zs =
                if z = 0 andalso utesbenVan zs orelse z = n then
                                                       raise Zsakutca
                else if length zs = n then rev zs
                else vez0 0 (z::zs) handle Zsakutca => vez0 (z+1) zs
      in
          vez0 0 []
      end;
```

# $n$ vezér a sakktáblán (folyt.)

- Több megoldás előállítása visszalépéssel

```
(* vezerek : int -> int list list
   vezerek n = a feladvány összes megoldásának listája n vezér esetén
*)
fun vezerek n =
      let
          fun vez0 z zs =
                if z = 0 andalso utesbenVan zs orelse z = n
                                                  then raise Zsakutca
                else if length zs = n then [rev zs]
                else (vez0 0 (z::zs) handle Zsakutca => []) @
                     (vez0 (z+1) zs handle Zsakutca => [])
      in
          vez0 0 []
      end;
```

# *n* vezér a sakktáblán (folyt.)

- **Több megoldás előállítása listák listájával**

```
fun vezerek n =
      let fun vez0 z zs =
                if z = 0 andalso utesbenVan zs orelse z = n then []
                else if length zs = n then [rev zs]
                else vez0 0 (z::zs) @ vez0 (z+1) zs
      in  vez0 0 [] end;
```

- **Több megoldás előállítása listák listájával, akkumulátor alkalmazásával**

```
fun vezerek n =
      let fun vez0 z zs ws =
                if z = 0 andalso utesbenVan zs orelse z = n then ws
                else if length zs = n then rev zs :: ws
                else vez0 0 (z::zs) (vez0 (z+1) zs ws)
      in  vez0 0 [] [] end;
```

# BINÁRIS FÁK

# Bináris keresőfák

- Rendszerint adott kulcsú elemet keresünk, ehhez értékeket kell összehasonlítanunk egymással: a keresett kulcsnak *egyenlőségi típusúnak* kell lennie.
- A példákban a `string` típust használjuk.
- A függvények *kivételt* jeleznek, ha a keresett kulcsú elem nincs a keresőfában.

```
exception Bsearch of string;
```

- Szebb lenne, ha *generikus függvényeket* írnánk; ezt gyakorló feladatnak hagyjuk.

# Bináris keresőfák: blookup

- **A `blookup` függvény adott kulcshoz tartozó értéket ad vissza egy rendezett bináris fából:**

```
(* blookup(f, b) = az f fában a b kulcshoz tartozó érték
   blookup : (string * 'a) tree * string -> 'a *)
fun blookup (N((a,x), t1, t2), b) =
      if b < a
      then blookup(t1,b)
      else if a < b
      then blookup(t2, b)
      else x
  | blookup (L, b) = raise Bsearch("LOOKUP: " ^ b);
```

# Bináris keresőfák: `binsert`

**A `binsert` függvény egy új kulcsú elemet rak be egy rendezett bináris fába, ha még nincs benne:**

```
(* binsert(f, (b,y)) = az új (b,y) kulcs-érték párral bővített f fa
    binsert : (string * 'a) tree * (string * 'a) -> (string * 'a) tree *)
fun binsert (N((a, x), t1, t2), (b,y)) =
      if b < a
      then N((a, x), binsert(t1, (b,y)), t2)
      else if a < b
      then N((a, x), t1, binsert(t2, (b,y)))
      else (* a=b *) raise Bsearch("INSERT: " ^ b)
  | binsert (L, (b,y)) = N((b,y), L, L);
```

# Bináris keresőfák: `bupdate`

- A `bupdate` függvény meglévő kulcsú elembe új értéket ír be egy rendezett bináris fában:

```
(* bupdate(f, (b,y)) = az f fa, a b kulcshoz tartozó érték helyén az y értékkel
   bupdate : (string * 'a) tree * (string * 'a) -> (string * 'a) tree *)
fun bupdate (N((a,x), t1, t2), (b,y)) =
      if b < a
      then N((a,x), bupdate(t1, (b,y)), t2)
      else if a < b
      then N((a,x), t1, bupdate(t2, (b,y)))
      else (* a=b *) N((b,y), t1, t2)
  | bupdate (L, (b,y)) = raise Bsearch("UPDATE: " ^ b);
```

# LUSTA LISTÁK

# Lusta lista

- Olyan lista, amelynek a farka függvény, ezáltal késleltetjük a kiértékelését.
- Ily módon *végtelen listákat* hozhatunk létre.
- A lusta listának hátrányai, veszélyei is vannak, pl.
  - egy lusta lista bármely részét megjeleníthetjük, de sohasem az egészet;
  - két lusta lista elemeiből páronként képezhetünk egy harmadikat, de nem számíthatjuk ki egy lusta lista elemeinek az összegét, nem kereshetjük meg benne a legkisebbet, nem fordíthatjuk meg az elemek sorrendjét;
  - úgy kell rekurziót definiálnunk, hogy nincs alapeset;
  - egy program befejeződése helyett csak azt igazolhatjuk, hogy az eredmény tetszőleges véges része véges idő alatt előáll.
- A lusta listát sorozatnak *(sequence)* nevezzük, és a `seq` típusoperátort használjuk a létrehozására.

```
datatype 'a seq = Nil | Cons of 'a * (unit -> 'a seq)
```

# Lusta lista (folyt.)

- Egy sorozat fejét adja eredményül a `head` függvény; abortál, ha üres sorozatra alkalmazzuk.

```
(* head : 'a seq -> 'a *)
fun head (Cons(x, _)) = x;
```

- Egy sorozat farkát adja eredményül a `tail` függvény; abortál, ha üres sorozatra alkalmazzák.

```
(* tail : 'a seq -> 'a seq *)
fun tail (Cons(_, xf)) = xf();
```

A sorozat farka `unit -> 'a seq` típusú ***függvény***, erre illesztjük az `xf` mintát `tail` fejében; `tail` törzsében `xf`-et a `()` argumentumra kell alkalmazni.

# Lusta lista (folyt.)

- `consq(x, xq)` x-et berakja az `xq` sorozatba:

```
(* consq : 'a * 'a seq -> 'a seq *)
fun consq (x, xq) = Cons(x, fn () => xq);
```

  - Ha a `consq` függvényt alkalmazzuk, mondjuk, az `(x, E)` argumentumra, az SML a `consq(x, E)` kifejezést ***nem lustán*** értékeli ki, hiszen alapvetően mohó kiértékelésű.
  - Ha `E` kiértékelésének eredményét `xq`-val jelöljük, akkor `consq(x, E)` kiértékelése a fenti definíció szerint `Cons(x, fn () => xq)`-t eredményez.
  - A `consq`-beli `fn () => xq` függvény nem késlelteti a farok (a példában `E`) kiértékelését `consq` alkalmazásakor.
  - A lusta kiértékelés érdekében a híváskor is a `Cons(x, fn () => E)` alakot kell használnunk, `consq(x,E)` nem jó.
  - Az explicit `fn () => E` késlelteti a kiértékelést, és ezzel ***szükség szerinti hivatkozást*** valósít meg.

# Lusta lista (folyt.)

- Példaként a korábban megismert `from` és `take` függvények lusta változatait mutatjuk be.
- A `fromq k` sorozat egészek `k`-tól induló végtelen sorozata.

```
(* fromq : int -> int seq *)
fun fromq k = Cons(k, fn () => fromq(k+1));
```

- `takeq(xq, n)` az `xq` sorozat első `n` eleméből képzett listát adja vissza:

```
(* takeq : 'a seq * int -> 'a list *)
fun takeq (xq, 0) = []
  | takeq (Cons(x, xf), n) = x :: takeq(xf(), n-1)
  | takeq (Nil, n) = [];
```

- Az `'a seq` típus nem egészen lusta kiértékelésű: egy nemüres sorozat fejét a rendszer mindig feldolgozza.

# Egyszerű függvények lusta listákra

- A kiszámíthatóság érdekében egy függvény eredményének tetszőleges véges része az argumentum véges részétől függhet csak.
- Amikor az eredményre szükség van, akkor ez az igény váltja ki az argumentum feldolgozását.
- Első példánkban egészeket egyesével emelünk négyzetre. Amikor szükség van rá, az eredmény farka (egy függvény) alkalmazza a `squareq` függvényt az argumentum farkára.

```
(* squareq : int seq -> int seq *)
fun squareq Nil: int seq = Nil
  | squareq (Cons (x, xf)) = Cons(x * x, fn () => squareq(xf()));
```

- Két lusta lista hasonlóan adható össze.

```
(* addq : (int seq * int seq) -> int seq *)
fun addq (Cons (x, xf), Cons(y, yf)) = Cons(x+y, fn () => addq(xf(), yf()))
  | addq _: int seq = Nil;
```

# Egyszerű függvények lusta listákra (folyt.)

- Az `appendq` függvény addig nem nyúl `yq`-hoz, amíg `xq` ki nem ürül – vagyis csak akkor nyúl hozzá, ha `xq` véges. Véges sorozatot `consq`-val készíthetünk.

```
(* appendq : 'a seq * 'a seq -> 'a seq *)
fun appendq (Cons (x, xf), yq) = Cons(x, fn () => appendq (xf(), yq))
  | appendq (Nil, yq) = yq;
```

- Most érthetjük meg, hogy miért kellett a típusdefinícióban a `Nil` konstruktorállandót definiálni.

# Magasabb rendű függvények lusta listákra

- A `map` lusta változata:

```
(* mapq : ('a -> 'b) -> 'a seq -> 'b seq *)
fun mapq f (Cons (x, xf)) = Cons(f x, fn () => mapq f (xf()))
  | mapq f Nil = Nil;
```

- A `filter` lusta változata:

```
(* filterq : ('a -> bool) -> 'a seq -> 'a seq *)
fun filterq p (Cons (x, xf)) = if p x
                               then Cons(x, fn () => filterq p (xf()))
                               else filterq p (xf())
  | filterq p Nil = Nil;
```

- `squareq` a korábban látottnál sokkal egyszerűbben definiálható `mapq`-val:

```
val squareq = mapq (fn i => i * i);
```

# Magasabb rendű függvények lusta listákra (folyt.)

- Olyan számsorozatot állítunk elő, amelyben 50-nél nagyobb, 7-esre végződő egészek vannak:

```
filterq (fn n => n mod 10 = 7) (fromq 50);
```

- Az `iterateq` függvény – a `fromq` egy általánosítása – a következő sorozatot állítja elő (vö. `repeat`-tel): $[x, f(x), f(f(x)), \cdots, f^k(x), \cdots]$.

```
(* iterateq : ('a -> 'a) -> 'a -> 'a seq *)
fun iterateq f x = Cons(x, fn () => iterateq f (f x));
```

- `fromq`-t `iterateq`-val így definiálhatjuk:

```
(* fromq : int -> int seq *)
val fromq = iterateq (fn i => i+1);
```

# Álvéletlen számok

- Hagyományos álvéletlenszám-generátorok: olyan eljárások, amelyek egy ***frissíthető változóban*** tárolják a *seed* (mag) értéket – ebből állítják elő egy következő hívásnál a következő álvéletlen számot.
- Lusta listaként megvalósítva: a következő álvéletlen szám csak szükség esetén áll elő.

```
(* randseq : int -> real seq *)
local val a = 16807.0 and m = 2147483647.0
      (* nextrandom : real -> real
      *)
      fun nextrandom seed =
            let val t = a * seed
            in t - real(floor(t/m)) * m
            end
in
   fun randseq s = mapq (secr op/ m) (iterateq nextrandom (real s))
end;
```

# Álvéletlen számok (folyt.)

- Ha a `nextrandom`-ot 1.0 és 21474836467.0 közötti `seed`-re alkalmazzuk, ugyanebbe a tartományba eső más értéket állít elő az `a * seed mod m` művelettel. (A valós számokat a túlcsordulás elkerülésére használjuk.)
- A lusta lista előállítására `iterateq`-t `nextrandom`-ra és `seed` valós számmá alakított kezdőértékére alkalmazzuk. `mapq` gondoskodik arról, hogy a lusta listában minden értéket elosszunk `m`-mel, és így `randseq` 0.0-nál nem kisebb és 1.0-nél kisebb értékeket adjon eredményül. Látható, hogy a lusta lista a megvalósítás részleteit szépen elrejti a felhasználó elől.
- Az előállított álvéletlen-számok 0.0-nál nem kisebb és 1.0-nél kisebb valós számok; `mapq`-val alakíthatjuk át őket 0 és 1 közötti egészekké:

```
mapq (floor o secl 10.0 op*) (randseq 1);
```

# Prímszámok előállítása *eratosztenészi szitával*

- Az algoritmus:
  1. Vegyük az egészek 2-vel kezdődő sorozatát: (2, 3, 4, 5, 6, 7, ...).
  2. Töröljük az összes 2-vel osztható számot: (3, 5, 7, 9, 11, ...).
  3. Töröljük az összes 3-mal osztható számot: (5, 7, 11, 13, 17, 19, ...).
  4. Töröljük az összes 5-tel osztható számot: (7, 11, 13, 17, 19, ...).
  5. Töröljük az összes ...
- A sorozat első eleme mindig a következő prím. A sorozatban azok a számok maradnak benne, amelyek az eddig előállított prímekkel nem oszthatók.

```
(* sift : int -> int seq -> int seq *)
fun sift p = filterq (fn n => n mod p <> 0);
```

- A `sift` a `p` argumentum többszöröseit törli egy lusta listából.

# Prímszámok előállítása *eratosztenészi szitával* (folyt.)

- **A `sieve`-nek már csak ismételten alkalmaznia kell `sift`-et a megfelelő lusta listára. Mivel ez a lusta lista sohasem üres, nem kell az üres lusta listára illeszkedő változatot írnunk.**

```
(* sieve : int seq -> int seq *)
fun sieve (Cons (p, nf)) = Cons(p, fn () => sieve(sift p (nf())))
  | sieve Nil = Nil;
```

# Négyzetgyökvonás Newton-Raphson módszerrel

- `nextapprox` $x_k$-ból $x_{k+1}$-et számítja ki az $x_{k+1} = \frac{\frac{a}{x_k}+x_k}{2}$ képlet alapján.

```
(* nextapprox : real -> real -> real *)
fun nextapprox a x = (a/x + x)/2.0;
```

- A befejeződés megállapítására egyszerű tesztet írunk:

```
(* within : real -> real seq -> real *)
fun within (eps: real) (Cons (x, xf)) =
      let val Cons (y, yf) = xf()
      in
         if abs (x-y) <= eps then y else within eps (Cons (y, yf))
      end;
```

A `(Cons (y, yf))` és az `xf()` lusta lista ugyanaz: az `else`-ágban azért használjuk az elsőt, mert `xf()` meghívása költségesebb.

# Négyzetgyökvonás Newton-Raphson módszerrel (folyt.)

- Ezzel

```
(* qroot : real -> real *)
fun qroot a = within 1E~6 (iterateq (nextapprox a) 1.0);
```

- A példában világosan különválasztjuk a leállásvizsgálatot (termination test) a következő jelölt előállításától.

  Most az abszolút különbséget ($\mid \mathrm{x} - \mathrm{y} \mid < \varepsilon$) teszteljük, de vizsgálhatnánk pl. a relatív különbséget ($\mid \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}} - 1 \mid < \varepsilon$) vagy az $\frac{|\mathrm{x}-\mathrm{y}|}{\frac{|\mathrm{x}|+|\mathrm{y}|}{2}+1} < \varepsilon$ feltételt.

  A feladat többi része független attól, hogy milyen leállásvizsgálatot alkalmazunk, és így is kell megfogalmazni a megoldást.

# Négyzetgyökvonás Newton-Raphson módszerrel (folyt.)

- Írjunk függvényt a következő jelölt előállítására, és rejtsük el a részleteket:

```
(* approxq : real -> real seq *)
fun approxq a =
      let (* nextapprox : real -> real
          *)
      fun nextapprox x = (a/x + x) / 2.0
      in iterateq nextapprox 1.0
      end;
```

- Ezzel `qroot` egy „tisztább” változata:

```
(* qroot : real -> real *)
val qroot = within 1E~6 o approxq;
```

# Keresztszorzatokból álló lista

- Legyen `xq` és `yq` egy-egy sorozat. Képezzünk új sorozatot az $(\mathtt{x}_i, \mathtt{y}_j)$ párokból, ahol $\mathtt{x}_i \in \mathtt{xq}$ és $\mathtt{y}_j \in \mathtt{yq}$!
- Először hagyományos listákra oldjuk meg a feladatot `map` és `pair` alkalmazásával.
- `xs` és `ys` egy-egy lista. Képezzünk listát az $(\mathtt{x}_i, \mathtt{y}_j)$ párokból, ahol $\mathtt{x}_i \in \mathtt{xs}$ és $\mathtt{y}_j \in \mathtt{ys}$!
- `map`-et, `pair`-t és `List.concat`-ot alkalmazva juthatunk el a keresett függvényhez.

```
(* pair : 'a -> 'b -> ('a * 'b) *)
fun pair x y = (x, y);
```

- A `pair`-t a `map`-pel az `ys` lista elemeire alkalmazva olyan párokból álló listát kapunk eredményül, amelyben a párok első tagja a rögzített `x` érték, a második tagja pedig az `ys` egy-egy eleme.

```
map (pair x) ys
```

# Keresztszorzatokból álló lista (folyt.)

- **Hogyan érhetjük el, hogy az `x` végigfusson az `xs` lista összes elemén? Az eddig szabad `x`-et kössük le egy függvény argumentumaként:**

  ```
  fn x => map (pair x) ys
  ```

  **majd alkalmazzuk újból a `map`-et erre a függvényre és `xs`-re:**

  ```
  map (fn x => map (pair x) ys) xs
  ```

- **Listák listáját kapjuk eredményül, mert a belső `map` már listát adott vissza, amelynek minden eleméből újabb listát képeztünk a külső `map`-pel. `List.concat` elvégzi a szükséges simítást:**

  ```
  (* pairs : 'a list -> 'b list -> ('a * 'b) list *)
  fun pairs xs ys = flat (map (fn x => map (pair x) ys) xs);
  ```

# Keresztszorzatokból álló lusta lista

- A `pairss`-hez hasonlóan állíthatjuk elő párok lusta listájának lusta listáját:

```
(* pairqq : 'a seq -> 'b seq -> ('a * 'b) seq seq *)
fun pairqq xq yq = mapq (fn x => mapq (pair x) yq) xq;
```

- Az eredmény véges része kiíratható `takeqq`-val, amely a bal felső saroktól számított első `m` sorból és `n` oszlopból álló téglalapot jeleníti meg az `xqq` lusta listából:

```
(* 'a takeqq : (int * int) * 'a seq seq -> 'a list list *)
fun takeqq ((m, n), xqq) = map (secl n takeq) (takeq(m, xqq));
```

- Példa: olyan lusta lista, amelyben a párok első tagja az egymás után következő egészek 30-tól kezdve, második tagja pedig a prímszámok 2-től kezdve:

```
- pairqq (fromq 30) primes;
> val it = Cons (Cons ((30, 2), fn), fn): (int * int) seq seq
```

# Keresztszorzatokból álló lusta lista (folyt.)

- ```
  - takeqq((3, 5), it);
  > val it = [[(30, 2), \ldots,  (30, 11)],
              [(31, 2), \ldots,  (31, 11)],
              [(32, 2), \ldots,  (32, 11)]] : (int * int) list list
  ```
- **Ha ki akarjuk símítani a lusta listát, egy `List.concat`-hoz hasonló, lusta listákra alkalmazható függvénnyel nem megyünk semmire: ha `xq` végtelen, `appendq (xq, yq) = xq`. Azonban két lusta lista elemei páronként egymásba ékelhetők:**

  ```
  (* interleaveq : 'a seq * 'a seq -> 'a seq *)
  fun interleaveq (Nil, yq) = yq
    | interleaveq (Cons (x, xf), yq) = Cons(x, fn () => interleaveq(yq, xf()));
  ```
- `interleaveq` **a rekurzív hívásban váltogatja a két lusta listát.**
- ```
  - takeq(10, interleaveq(fromq 0, fromq 50));
  > val it = [0, 50, 1, 51, 2, 52, 3, 53, 4, 54] : int list
  ```

# Keresztszorzatokból álló lusta lista (folyt.)

- `enumerate`: **lusta listák lusta listájából egyetlen lusta listát állít elő. Legyen a kétszeres mélységű lusta lista feje** `xq` **és a farka** `xqf`**; alkalmazzuk** `enumerate`**-et rekurzívan** `xqf`**-re, majd az eredményt ékeljük** `xq`**-ba:**

```
(* enumerate : 'a seq seq -> 'a seq *)
fun enumerate Nil = Nil
  | enumerate (Cons (xq, xqf)) = interleaveq (xq, enumerate(xqf()));
```

**Ez a „megoldás" nem jó, mert a „ végtelen" lusta lista miatt a rekurzió nem ér véget: az SML-ben, amely alapvetően mohó kiértékelésű, a rekurzív hívást késleltetni kell.**

- **Több esetet kell megkülönböztetnünk:**

```
(* 'a enumerate : 'a seq seq -> 'a seq *)
fun enumerate Nil = Nil
  | enumerate (Cons (Nil, xqf)) = enumerate (xqf())
  | enumerate (Cons (Cons (x, xf), xqf)) =
                 Cons(x, fn () => interleaveq(enumerate(xqf()),xf()));
```

# Keresztszorzatokból álló lusta lista (folyt.)

- Ha a bemenő lusta lista üres, készen vagyunk. Ha nem üres, meg kell vizsgálni a lusta lista fejét: ha ez üres, akkor folytatni kell a rekurzív hívást, ha nem üres, akkor az explicit `fn () => ...` függvénydefinícióval ***késleltetni kell*** a rekurziót.
- Példa: pozitív egészekből álló párok egy lusta listáját!

```
- val posintqq = pairqq (fromq 1) (fromq 1);
> val posintqq = Cons (Cons ((1, 1), fn), fn):(int * int) seq seq
- takeq(15, enumerate posintqq);
> val it = [(1,1), (2,1), (1,2), (3,1), (1,3), (2,2),
            (1,4), (4,1), (1,5), (2,3), (1,6), (3,2),
            (1,7), (2,4), (1,8)] : (int * int) list
```