VI. rész

Haladó Erlang

1. Bevezetés
2. Cékla: deklaratív programozás C++-ban
3. Prolog alapok
4. Erlang alapok
5. Haladó Prolog
6. Haladó Erlang

Tartalom

6. Haladó Erlang
   - Rekurzív adatstruktúrák
   - Pontos megoldás funkcionális megközelítésben
   - Listák használata: futamok
   - Rekurzió fajtái
   - Halmazműveletek (rendezetlen listával)
   - Generikus keresőfák
   - Mohó és lusta kiértékelés

Lineáris rekurzív adatstruktúrák – Verem (Stack)

- Lista: rekurzív adatstruktúra: `@type list() = [] | [any()|list()]`
- Verem: ennessel valósítjuk meg, listával triviális lenne
- Műveletek: üres verem létrehozása, verem üres voltának vizsgálata, egy elem berakása, utoljára berakott elem leválasztása

stack.erl

```
%% @type stack() = empty | {any(),stack()}

empty() -> empty.

is_empty(empty) -> true;
is_empty({_,_}) -> false.

push(X, empty)     -> {X,empty};
push(X, {_X,_S}=S) -> {X,S}.      % {_X,_S}=S: réteges minta

pop(empty) -> error;
pop({X,S}) -> {X,S}.
```


Verem példák

```
2> S1 = stack:push(1, stack:empty()).
{1,empty}
3> S2 = stack:push(2, S1).
{2,{1,empty}}
4> S3 = stack:push(3, S2).
{3,{2,{1,empty}}}
```

- Pl. megfordíthatunk egy listát; 1. lépés: verembe tesszük az elemeket

```
5> Stack = lists:foldl(fun stack:push/2, stack:empty(), "szoveg").
{103,{101,{118,{111,{122,{115,empty}}}}}}
```

- 2. lépés: a verem elemeit sorban kivesszük és listába fűzzük

stack.erl – folytatás

```
% to_list(S) az S verem elemeit tartalmazó lista LIFO sorrendben.
to_list(empty) -> [];
to_list({X,S}) -> [X|to_list(S)].
```

```
6> stack:to_list(Stack).
"gevozs"
```

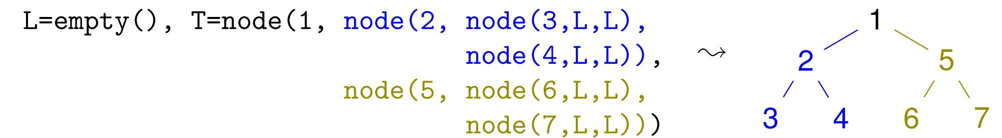
Elágazó rekurzív adatstruktúrák (pl. bináris fa)

- Műveletek bináris fákon: létrehozása, mélysége, leveleinek száma

`tree.erl` – Műveletek bináris fákon: létrehozása, mélysége, leveleinek száma

```
% @type btree() = leaf | {any(),btree(),btree()}.

empty() -> leaf.                   % Üres fa.

node(V, Lt, Rt) -> {V,Lt,Rt}.  % Lt és Rt fák összekapcsolása
                               % egy új V értékű csomóponttal.
max(X, Y) when X>Y -> X;
max(_X, Y)         -> Y.

depth(leaf)       -> 0;            % Fa legnagyobb mélysége.
depth({_,Lt,Rt}) -> 1 + max(depth(Lt), depth(Rt)).

leaves(leaf)       -> 1;           % Fa leveleinek száma.
leaves({_,Lt,Rt}) -> leaves(Lt) + leaves(Rt).
```


Bináris fa (folyt.): listából fa, fából lista



T ↦ {1,{2,{3,leaf,leaf},{4,leaf,leaf}},{5,{6,leaf,leaf},{7,leaf,leaf}}}

`tree.erl` – folytatás

```
to_list_prefix(leaf)       -> [];
to_list_prefix({V,Lt,Rt}) ->
    [V] ++ to_list_prefix(Lt) ++ to_list_prefix(Rt).

to_list_infix(leaf)       -> [];
to_list_infix({V,Lt,Rt}) ->
    to_list_infix(Lt) ++ [V] ++ to_list_infix(Rt).

from_list([]) -> empty();
from_list(L)  -> {L1,[X|L2]} = lists:split(length(L) div 2, L),
                 node(X, from_list(L1), from_list(L2)).
```


Elágazó rekurzív adatstruktúrák – könyvtárszerkezet

```
2> Home = {d,"home",                 %  home
            [{d,"kitti",             %  home/kitti
                [{d,".firefox",[]},  %  home/kitti/.firefox
                 {f,"dir.erl"},      %  home/kitti/dir.erl
                 {f,"khf1.erl"},     %  home/kitti/khf1.pl
                 {f,"khf1.pl"}]},    %  home/kitti/khf1.erl
             {d,"ludvig",[]}]}.      %  home/ludvig
```

`dir.erl` – Könyvtárszerkezet kezelése

```
% @type tree()      = file() | directory().
% @type file()      = {f, name()}.
% @type directory() = {d, name(), [tree()]}.
% @type name()      = string().

% Fa mérete (könyvtárak és fájlok számának összege).
count({f,_})   -> 1;
count({d,_,L}) -> 1 + lists:sum([count(I) || I <- L]).
```


Könyvtárszerkezet – folytatás

`dir.erl` – Könyvtárszerkezet kezelése (folytatás)

```
% @spec subtree(Path::[name()], Tree::tree()) -> tree() | notfound.
% Tree fa Path útvonalon található részfája.
subtree([Name], {f,Name} = Tree)           -> Tree;
subtree([Name], {d,Name,_} = Tree)         -> Tree;
subtree([Name|[Sub|_]=SubPath], {d,Name,L}) ->
    case lists:keyfind(Sub, 2, L) of
        false -> notfound;
        Tree  -> subtree(SubPath, Tree)
    end;
subtree(_, _)                              -> notfound.
```

```
3> dir:subtree(string:tokens("home/kitti/.firefox", "/"), Home).
{d,".firefox",[]}
4> dir:subtree(string:tokens("home/kitti/firefox", "/"), Home).
notfound
```

Tartalom

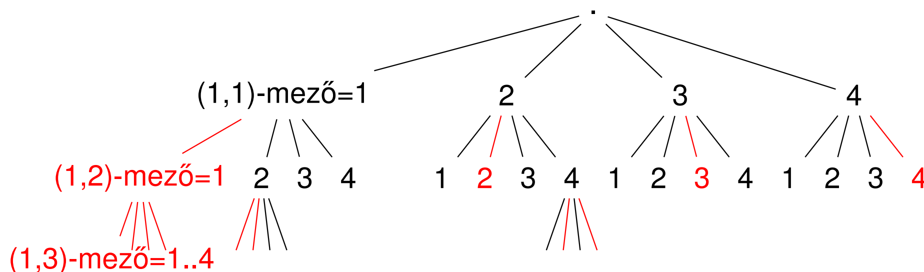
6 Haladó Erlang
- Rekurzív adatstruktúrák
- Pontos megoldás funkcionális megközelítésben
- Listák használata: futamok
- Rekurzió fajtái
- Halmazműveletek (rendezetlen listával)
- Generikus keresőfák
- Mohó és lusta kiértékelés

Pontos megoldás (Exact solution)

- Kombinatorikában sokszor *optimális megoldás* (optimal solution)
- Egy probléma pontos (egzakt) megoldása
- Nem közelítő (approximáció), nem szuboptimális (bizonyos heurisztikák)
- Keresési feladat: valamilyen *értelmezési tartomány* azon elemeit keressük, melyek megfelelnek a kiírt *feltételeknek*
  - lehetséges megoldás = *jelölt*
  - értelmezési tartomány = *keresési tér (search space)*, jelöltek halmaza
  - feltételek = *korlátok* vagy *kényszerek (constraints)*
- Pl. egy 16 mezős Sudoku-feladvány helyes megoldásai, 8 királynő egy sakktáblán, Hamilton-kör egy gráfban, Imre herceg nagyszülei ...
- A Prolog végrehajtási algoritmusa képes egy predikátumokkal és egy célsorozattal leírt probléma összes megoldását felsorolni (!)
- Funkcionális megközelítésben a megoldások felsorolását a programozónak meg kell írnia (logikaiban is megírható természetesen)

Keresési tér bejárása

- Itt csak véges keresési térrel foglalkozunk
- A megoldás keresését esetekre bonthatjuk, azokat alesetekre stb. ⇝ Ilyenkor egy *keresési fát* járunk be
- Pl. 16 mezős Sudoku (1. sor, 1. oszlop) mezeje lehet 1,2,3,4
  Ezen belül (1. sor, 2. oszlop) mezeje lehet 1,2,3,4 stb.



- Bizonyos eseteknél (piros) tudjuk, hogy nem lesz megoldás (ha egy sorban egy érték több mezőben is szerepel)
- Hatékony megoldás: a keresési fa részeit levágjuk (nem járjuk be)

Példa: Send + More = Money

- Feladat: Keressük meg azon (S,E,N,D,M,O,R,Y) számnyolcasokat, melyekre $0 \le$ S,E,N,D,M,O,R,Y ≤ 9 és S,M > 0, ahol az eltérő betűk eltérő értéket jelölnek, és

```
  S E N D
+ M O R E
---------
M O N E Y
```

a papíron történő összeadás szabályai szerint, vagyis

$$(1000S + 100E + 10N + D) + (1000M + 100O + 10R + E) =$$
$$= 10000M + 1000O + 100N + 10E + Y.$$

- Naív megoldásunk: járjuk be a teljes keresési teret, és szűrjük meg azon nyolcasokra, melyekre teljesülnek a feltételek
- Keresési tér $\subseteq \{0, 1, \dots, 9\}^8$, azaz egy 8-elemű Descartes-szorzat, mérete 10^8 (10 számjegy 8-adosztályú ismétléses variációi)
- Megoldás:

$$\{(S, E, N, D, M, O, R, Y) \mid \quad S, E, N, D, M, O, R, Y \in \{0..9\},\ \texttt{all_different},$$
$$S, M > 0,\ SEND + MORE = MONEY\}$$

Kimerítő keresés

Exhaustive search, Generate and test, Brute force

- Kimerítő keresés: teljes keresési tér bejárása, jelöltek szűrése

`sendmory.erl` – Send More Money megoldások, alapfogalmak

```
% @type d() = 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9.
% @type octet() = {d(),d(),d(),d(),d(),d(),d(),d()}.

% @spec num(Ns::[d()]) -> N::integer().
% Az Ns számjegylista decimális számként N.
num(Ns)-> lists:foldl(fun(X,E) -> E*10+X end, 0, Ns).

% @spec check_sum(octet()) -> bool().
% A jelölt teljesíti-e az összeadási feltételt.
check_sum({S,E,N,D,M,O,R,Y}) ->
    Send = num([S,E,N,D]),
    More = num([M,O,R,E]),
    Money = num([M,O,N,E,Y]),
    Send+More =:= Money.
```


Kimerítő keresés – folytatás

`sendmory.erl` – folytatás

```
% @spec all_different(Xs::[any()]) -> B::bool()
all_different(L) -> length(L) =:= length(lists:usort(L)).

% @spec smm0() -> [octet()].
smm0() ->  Ds = lists:seq(0, 9),
           [{S,E,N,D,M,O,R,Y} ||
               S <- Ds,
               E <- Ds,
               N <- Ds,
               D <- Ds,
               M <- Ds,
               O <- Ds,
               R <- Ds,
               Y <- Ds,
               all_different([S,E,N,D,M,O,R,Y]),
               S > 0, M > 0,
               check_sum({S,E,N,D,M,O,R,Y})].
```

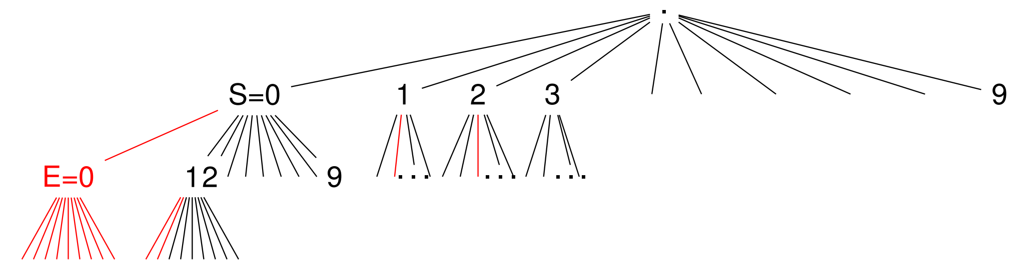

Keresési fa csökkentése (1)

- 10^8 eset ellenőrzése túl sokáig tart
- Ötlet: korábban, már generálás közben is szűrhetjük az egyezéseket

`sendmory.erl` – folytatás

```
% @spec smm1() -> [octet()].
smm1() ->
    Ds = lists:seq(0, 9),
    [{S,E,N,D,M,O,R,Y} ||
        S <- Ds,
        E <- Ds, E /= S,
        N <- Ds, not lists:member(N, [S,E]),
        D <- Ds, not lists:member(D, [S,E,N]),
        M <- Ds, not lists:member(M, [S,E,N,D]),
        O <- Ds, not lists:member(O, [S,E,N,D,M]),
        R <- Ds, not lists:member(R, [S,E,N,D,M,O]),
        Y <- Ds, not lists:member(Y, [S,E,N,D,M,O,R]),
        S > 0, M > 0,
        check_sum({S,E,N,D,M,O,R,Y})].
```


Keresési fa csökkentése (2)



- A keresési fában azon részfákat, amelyekben egyezés van (pirosak), már generálás közben elhagyhatjuk
- Ez már nem kimerítő keresés (nem járjuk be az összes jelöltet)
- A javulást annak köszönhetjük, hogy jelöltek tesztelését előrébb hoztuk
- Vegyük észre, hogy a keresési tér csökkentésével is ide juthatunk: új keresési tér $\subseteq$ {10 elem 8-adosztályú ismétlés nélküli variációi}
- Mérete $10!/(10-8)! = 1\,814\,400 \ll 100\,000\,000$

Variációk felsorolása listanézettel

```
1> Domain = [a,b,c,d].        % A halmaz.
[a,b,c,d]
2> IVar = [ {X,Y,Z} ||        % Ismétléses variációk.
              X <- Domain,
              Y <- Domain,
              Z <- Domain ].
[{a,a,a}, {a,a,b}, {a,a,c}, {a,a,d}, {a,b,a}, {a,b,b}, {...}|...]
3> length(IVar).
64                            % 4*4*4 = 64.
4> INVar = [ {X,Y,Z} ||       % Ismétlés nélküli variációk.
               X <- Domain,
               Y <- Domain -- [X],
               Z <- Domain -- [X,Y] ].
[{a,b,c}, {a,b,d}, {a,c,b}, {a,c,d}, {a,d,b}, {a,d,c},
 {b,a,c},
 {...}|...]
5> length(INVar).
24                            % 4!/1! = 24.
```


Keresési tér csökkentése

- Újból kimerítő keresés, de kisebb a keresési tér

`sendmory.erl` – folytatás

```
% @spec smm2() -> [octet()].
% Minden ellenőrzés a generálás után történik.
smm2() ->
    Ds = lists:seq(0, 9),
    [{S,E,N,D,M,O,R,Y} ||
        S <- Ds -- [],
        E <- Ds -- [S],
        N <- Ds -- [S,E],
        D <- Ds -- [S,E,N],
        M <- Ds -- [S,E,N,D],
        O <- Ds -- [S,E,N,D,M],
        R <- Ds -- [S,E,N,D,M,O],
        Y <- Ds -- [S,E,N,D,M,O,R],
        S > 0, M > 0,
        check_sum({S,E,N,D,M,O,R,Y})].
```


Kimerítő keresés újból: keresési tér explicit felsorolása

- Vajon érdemes-e a jelöltek generálását elválasztani a teszteléstől? Nem!

`sendmory.erl` – folytatás

```
% @spec perms() -> [octet()].
% Számjegyek ismétlés nélküli 8-adosztályú variációi
perms8() -> Ds = lists:seq(0,9),
            [{S,E,N,D,M,O,R,Y} ||
                S <- Ds -- [],
                E <- Ds -- [S],
                N <- Ds -- [S,E],
                D <- Ds -- [S,E,N],
                M <- Ds -- [S,E,N,D],
                O <- Ds -- [S,E,N,D,M],
                R <- Ds -- [S,E,N,D,M,O],
                Y <- Ds -- [S,E,N,D,M,O,R] ].

% @spec smm3() -> [octet()].
smm3() -> [Sol || {S,_E,_N,_D,M,_O,_R,_Y} = Sol <- perms8(),
                  S > 0, M > 0, check_sum(Sol)].
```


Kimerítő keresés újból: keresési tér explicit felsorolása (2)

- Tovább csökkenthető a keresési tér, ha előrébb mozgatunk feltételeket

`sendmory.erl` – folytatás

```
% @spec smm4() -> [octet()].
% További ellenőrzések generálás közben.
smm4() ->
    Ds = lists:seq(0,9),
    [{S,E,N,D,M,O,R,Y} ||
        S <- Ds -- [0],               % 0 kizárva
        E <- Ds -- [S],
        N <- Ds -- [S,E],
        D <- Ds -- [S,E,N],
        M <- Ds -- [0,S,E,N,D],       % 0 kizárva
        O <- Ds -- [S,E,N,D,M],
        R <- Ds -- [S,E,N,D,M,O],
        Y <- Ds -- [S,E,N,D,M,O,R],
        check_sum({S,E,N,D,M,O,R,Y})].
```

Vágások a keresési fában generálás közben

- Ötlet: építsük hátulról a számokat, és ellenőrizzük a részösszegeket még generálás közben

`sendmory.erl` – folytatás

```
smm5() ->                                   %%     S E N D
    Ds = lists:seq(0, 9),                   %%   + M O R E
    [{S,E,N,D,M,O,R,Y} ||                   %%   = M O N E Y
        D <- Ds -- [],
        E <- Ds -- [D],
        Y <- Ds -- [D,E],                   % <- lehetne javítani még...
        (D+E) rem 10 =:= Y,
        N <- Ds -- [D,E,Y],
        R <- Ds -- [D,E,Y,N],
        (num([N,D])+num([R,E])) rem 100 =:= num([E,Y]),
        O <- Ds -- [D,E,Y,N,R],
        (num([E,N,D])+num([O,R,E])) rem 1000 =:= num([N,E,Y]),
        S <- Ds -- [D,E,Y,N,R,O,0],
        M <- Ds -- [D,E,Y,N,R,O,S,0],
        check_sum({S,E,N,D,M,O,R,Y})].
```


Vágások a keresési fában generálás közben (2)

- A vágások eredményeképpen nagyságrendileg gyorsabb megoldást kapunk
- A generálás minél korábbi fázisában vágunk, annál jobb: a keresési fában nem a legalsó szintről kell *visszalépni*, hogy új megoldást keressünk
- Előzőből ötlet: építsünk részmegoldásokat, és minden építő lépésnél ellenőrizzük, hogy lehet-e értelme a részmegoldást bővíteni megoldássá

`sendmory.erl` – folytatás

```
% @type partial_solution() = {[d()], [d()], [d()]}.

% @spec smm6() -> [octet()].
smm6() ->
    smm6({[],[],[]}, 5, lists:seq(0,9)).
```

- `{[],[],[]}` a kiindulási részmegoldásunk
- `5` méretű megoldásokat kell építeni
- `lists:seq(0,9)` a változók tartománya

Vágások a keresési fában generálás közben (3)

- Egy `PartialSolution = {Sendlista, Morelista, Moneylista}` részmegoldás csak akkor bővíthető megoldássá, ha
  - A listák számjegyei jó pozícióban helyezkednek el: azonos betűk egyeznek, többi számjegy különbözik
  - A részletösszeg is helyes, csak az átvitelben térhet el

`sendmory.erl` – folytatás

```
% @spec check_equals(partial_solution()) -> bool().
check_equals(PartialSolution) ->
 case PartialSolution of
   {[D], [E], [Y]}                     -> all_different([D,E,Y]);
   {[N,D], [R,E], [E,Y]}               -> all_different([N,D,R,E,Y]);
   {[E,N,D], [O,R,E], [N,E,Y]}         -> all_different([O,N,D,R,E,Y]);
   {[S,E,N,D], [M,O,R,E], [O,N,E,Y]} -> all_different([S,M,O,N,D,R,E,Y]);
   {[0,S,E,N,D], [0,M,O,R,E], [M,O,N,E,Y]} ->
       all_different([S,M,O,N,D,R,E,Y]) andalso all_different([0,S,M]);
   _                                   -> false
 end.
```


Vágások a keresési fában generálás közben (4)

- Egy `PartialSolution = {Sendlista, Morelista, Moneylista}` részmegoldás csak akkor bővíthető megoldássá, ha
  - A listák számjegyei jó pozícióban helyezkednek el: azonos betűk egyeznek, többi számjegy különbözik
  - A részletösszeg is helyes, csak az átvitelben térhet el

`sendmory.erl` – folytatás

```
% @spec check_sum(partial_solution()) -> bool().
% Ellenőrzi, hogy aritmetikai szempontból helyes-e a részmegoldás.
% Az átvitellel (carry) nem foglalkozik, mert mindkettő helyes:
% {[1,2],[3,4],[4,6]} és {[9],[2],[1]},
% mert építhető belőlük teljes megoldás.
check_partialsum({Send, More, Money}) ->
    S = num(Send), M = num(More), My = num(Money),
    (S+M) rem round(math:pow(10,length(Send))) =:= My.
```

Vágások a keresési fában generálás közben (5)

sendmory.erl – folytatás

```
% @spec smm6(PS::partial_solution(), Num::integer(),
%           Domain::[integer()]) -> Sols::[octet()].
% Sols az összes megoldás, mely a PS részmegoldásból építhető,
% mérete (Send hossza) =< Num, a számjegyek tartománya Domain.
smm6({Send,_,_} = PS, Num, _Domain) when length(Send) =:= Num ->
  {[0,S,E,N,D], [0,M,O,R,E], [M,O,N,E,Y]} = PS,
  [{S,E,N,D,M,O,R,Y}];
smm6({Send,More,Money}, Num, Domain) ->
  [Solution ||
     Dsend <- Domain,
     Dmore <- Domain,
     Dmoney <- Domain,
     PSol1 <- [ {[Dsend|Send],[Dmore|More],[Dmoney|Money]} ],
         % pl. így tudunk lekötni változót: PSol1 <- [ Érték ],
     check_equals(PSol1),
     check_partialsum(PSol1),
     Solution <- smm6(PSol1, Num, Domain) ].
```


Korlát-Kielégítési Probléma (Constraint Satisfaction Problem)

- Eddig előre „könnyen” átlátható keresési fát terveztünk meg, vágtunk meg és jártunk be; de a végső cél nem az átlátható keresési fa
- CSP-megközelítés:
  - amíg lehet, szűkítsük a választási lehetőségeket a *korlátok* alapján
  - ha már nem lehet, bontsuk esetekre a választási lehetőségeket

SMM mint CSP probléma = (Változók, Tartományok, Korlátok)

- Változók: S,E,N,D,M,O,R,Y, segédváltozók: 0, C_1, C_2, C_3, C_4
-

Tartományok:	0	c_1	c_2	c_3	c_4	s	e	n	d	m	o	r	y
Alsó határ:	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
Felső határ:	0	1	1	1	1	9	9	9	9	9	9	9	9

- Korlátok:

```
  S E N D
+ M O R E
---------
M O N E Y
```

$d + e + 0 = y + 10\cdot c_1$
$n + r + c_1 = e + 10\cdot c_2$
$e + o + c_2 = n + 10\cdot c_3$
$s + m + c_3 = o + 10\cdot c_4$
$0 + 0 + c_4 = m + 10\cdot 0$

CSP tevékenységek – szűkítés

- **Szűkítés egy korlát szerint**: egy korlát egy változójának d_i értéke *felesleges*, ha nincs a korlát többi változójának olyan értékrendszere, amely d_i-vel együtt kielégíti a korlátot
  Pl. az utolsó korlát: $0 + 0 + c_4 = m + 10\cdot 0$, a változók tartománya: $0 \in [0]$, $c_4 \in [0,1]$, $m \in [1,2,3,4,5,6,7,8,9]$
  $m \in [2,3,4,5,6,7,8,9]$ értékek feleslegesek!
- Felesleges érték elhagyásával (szűkítéssel) ekvivalens CSP-t kapunk
- SMM kezdeti tartománya; és megszűkítve, tovább már nem szűkíthető:

```
c1: 01
c2: 01
c3: 01
c4: 01
s:   123456789
e: 0123456789
n: 0123456789
d: 0123456789
m:   123456789
o: 0123456789
r: 0123456789
y: 0123456789
```

szűkítés az összes lehetséges korláttal, ameddig sikerül:

```
c1: 01
c2: 01
c3: 01
c4:  1
s:          89
e: 0123456789
n: 0123456789
d: 0123456789
m:  1
o: 01
r: 0123456789
y: 0123456789
```


CSP tevékenységek – címkézés (labeling)

- Tovább már nem szűkíthető CSP esetén vizsgáljuk a többértelműséget:
- Többértelműség: van legalább két elemet tartalmazó tartomány, és egyik tartomány sem üres
- **Címkézés (elágazás)**:
  1. kiválasztunk egy többértelmű változót (pl. a legkisebb tartományút),
  2. a tartományt két vagy több részre osztjuk (választási pont),

```
c1: 01
c2: 01
c3: 01
c4:  1
s:          89
e: 0123456789
...
```

Két új CSP-t készítünk: c1=0 és c1>0 esetek:

```
c1: 0
c2: 01
c3: 01
c4:  1
s:          89
e: 0123456789
...
```

és

```
c1: 1
c2: 01
c3: 01
c4:  1
s:          89
e: 0123456789
...
```

  3. az egyes választásokat mind megoldjuk, mint új CSP-ket.

CSP tevékenységek – visszalépés

- Ha nincs többértelműség, és a tartományok nem szűkíthetőek tovább, két eset lehet:
  - Ha valamely változó tartománya üres, nincs megoldás ezen az ágon
  - Ha minden változó tartománya egy elemű, előállt egy megoldás

Az SMM CSP megoldás folyamata összefoglalva:

1. Felvesszük a változók és segédváltozók tartományait, ez az első *állapotunk*, ezt betesszük az *S* listába
2. Ha az *S* lista üres, megállunk, nincs több megoldás
3. Az *S* listából kiveszünk egy állapotot, és szűkítjük, ameddig csak lehet
4. Ha van üres tartományú változó, akkor az állapotból nem jutunk megoldáshoz, folytatjuk a 2. lépéssel
5. Ha nincs többértelmű változó az állapotban, az állapot egy megoldás, eltesszük, folytatjuk a 2. lépéssel
6. Valamelyik többértelmű változó tartományát részekre osztjuk, az így keletkező állapotokat visszatesszük a listába, folytatjuk a 2. lépéssel

SMM CSP megoldással – részlet

smm99.erl – SMM CSP megoldásának alapjai

```
% @type state()   = {varname(), domain()}.
% @type varname() = any().
% @type domain()  = [d()].

% @spec initial_state() -> St::state().
% St describes the variables of the SEND MORE MONEY problem.
initial_state() ->
    VarNames = [0,c1,c2,c3,c4,s,e,n,d,m,o,r,y],
    From     = [0, 0, 0, 0, 0,1,0,0,0,1,0,0,0],
    To       = [0, 1, 1, 1, 1,9,9,9,9,9,9,9,9],
    [ {V,lists:seq(F,T)} ||
        {V,{F,T}} <- lists:zip(VarNames, lists:zip(From, To))].

% @spec smm() -> [octet()].
smm() ->
    St = initial_state(),
    process(St, [], []).
```


SMM CSP megoldással – részlet (2)

smm99.erl – SMM CSP megoldásának fő függvénye

```
% process(St0::state(),Sts::[state()],Sols0::[octet()])->Sols::[octet()].
% Sols = Sols1++Sols0 s.t. Sols1 are the sols obtained from [St0|Sts].
process(...) -> ...;
process(St0, Sts, Sols0) ->
    St = narrow_domains(St0),
    DomSizes = [ length(Dom) || {_,Dom} <- St ],
    Max = lists:max(DomSizes),
    Min = lists:min(DomSizes),
    if Min == 0 ->              % there are empty domains
            process(final, Sts, Sols0);
       (St =/= St0) ->          % state changed
            process(St, Sts, Sols0);
       Max == 1 ->              % all domains singletons, solution found
            Sol = [Val || {_,[Val]} <- problem_vars(St)],
            process(final, Sts, [Sol|Sols0]);
       true ->
            {CSt1, CSt2} = make_choice(St),   % labeling
            process(CSt1, [CSt2|Sts], Sols0)
    end.
```


Tartalom

6 Haladó Erlang
- Rekurzív adatstruktúrák
- Pontos megoldás funkcionális megközelítésben
- Listák használata: futamok
- Rekurzió fajtái
- Halmazműveletek (rendezetlen listával)
- Generikus keresőfák
- Mohó és lusta kiértékelés

Futam definíció

- *Futam*: olyan nem üres lista, amelynek szomszédos elemei adott feltételnek megfelelnek
- A feltételt az előző és az aktuális elemre alkalmazandó *predikátumként* adjuk át a futamot előállító fügvénynek
  - *Predikátum:* logikai függvény (igaz/hamis), példa:

```
1> P = fun erlang:'<'/2.
#Fun<erlang.<.2>
2> P(1, 2).
true
3> P(2, 2).
false
```

- Feladat: írjunk olyan Erlang-függvényt, amely egy lista egymás utáni elemeiből képzett (diszjunkt, tovább nem bővíthető) futamok listáját adja eredményül – az elemek eredeti sorrendjének megőrzésével
- Az első, naív változatban egy-egy segédfüggvényt írunk egy lista *első* (prefix) *futamának,* valamint a *maradéklistának* az előállítására (vö. `dp11a_gy3:rampa`, `lists:splitwith/2`)

Futamok előállítása – naív változat

- Példa:

```
4> futam:elso_futam(P, [1,3,9,5,7,2,5,9,1,6,0,0,3,5,6,2]).
[1,3,9]
```

`futam.erl` – Futamok felsorolása

```
% @type pred() = fun(elem(), elem()) -> bool().
% @type elem() = any().

% @spec elso_futam(P::pred(), List::[elem()]) -> Fs::[elem()].
% Fs a List P-t kielégítő első (prefix) futama.
elso_futam(_P, [X]) ->
    [X];
elso_futam(P, [X|Ys=[Y|_]]) ->
    case P(X, Y) of
        false -> [X];
        true  -> [X|elso_futam(P, Ys)]
    end.
```


Futamok előállítása – naív változat (2)

- Példa:

```
4> futam:elso_futam(P, [1,3,9,5,7,2,5,9,1,6,0,0,3,5,6,2]).
[1,3,9]
5> futam:maradek(P, [1,3,9,5,7,2,5,9,1,6,0,0,3,5,6,2]).
[5,7,2,5,9,1,6,0,0,3,5,6,2]
```

`futam.erl` – folytatás

```
% @spec maradek(P::pred(), List::[elem()]) -> Ms::[elem()].
% Ms a List P-t kielégítő első futam utáni maradéka.
maradek(_P, [_X]) ->
    [];
maradek(P, [X|Ys=[Y|_]]) ->
    case P(X, Y) of
        false -> Ys;
        true  -> maradek(P, Ys)
    end.
```


Futamok előállítása – naív változat (3)

- Példa:

```
6> futam:naiv_futamok(P, [1,3,9,5,7,2,5,9,1,6,0,0,3,5,6,2]).
[[1,3,9],[5,7],[2,5,9],[1,6],[0],[0,3,5,6],[2]]
7> futam:naiv_futamok(P, []).
[]
8> futam:naiv_futamok(P, [1]).
[[1]]
```

`futam.erl` – folytatás

```
% @spec naiv_futamok(Pred::pred(), List::[elem()])
%           -> Lists:[[elem()]].
% Lists a List szomszédos elemeiből álló, Pred-et kielégítő
% futamok listája.
naiv_futamok(_P, [])  -> [];
naiv_futamok(P, List) -> Fs = elso_futam(P, List),
                         Ms = maradek(P, List),
                         [Fs|naiv_futamok(P, Ms)].
```

Futamok előállítása – hatékonyabb változat

- Pazarlás kétszer megkeresni az első futamot, a korábbi példa:

```
4> futam:elso_futam(P, [1,3,9,5,7,2,5,9,1,6,0,0,3,5,6,2]).
[1,3,9]
5> futam:maradek(P, [1,3,9,5,7,2,5,9,1,6,0,0,3,5,6,2]).
[5,7,2,5,9,1,6,0,0,3,5,6,2]
```

- Kezeljük az első futamot és a maradékot *egyetlen párként*:

```
9> futam:futam_maradek(P, [1,3,9,5,7,2,5,9,1,6,0,0,3,5,6,2]).
{[1,3,9],[5,7,2,5,9,1,6,0,0,3,5,6,2]}
```

```
% @spec futam_maradek(P::pred(), L::[elem()]) ->
%    {Fs::[elem()],Ms::[elem()]}.
% Fs =:= elso_futam(P, L) és Ms =:= maradek(P, L).
futam_maradek(_P, [X])          -> {[X], []};
futam_maradek(P, [X|Ys=[Y|_]]) ->
    case P(X, Y) of
        true  -> {Fs, Ms} = futam_maradek(P, Ys),
                 {[X|Fs], Ms};
        false -> {[X], Ys}
    end.
```


Futamok előállítása – hatékonyabb változat (2)

`futam.erl` – folytatás

```
% @spec *futamok(Pred::pred(), L::[elem()]) -> Lists:[[elem()]].
naiv_futamok(_P, []) ->
  [];
naiv_futamok(P, L) ->
  Fs = elso_futam(P, L),
  Ms = maradek(P, L),
  [Fs|naiv_futamok(P, Ms)].
```

```
futamok(_P, []) ->
  [];
futamok(P, L) ->
  {Fs, Ms} = futam_maradek(P, L),
  [Fs|futamok(P, Ms)].
```

- Példa `futam_maradek` felhasználására: számtani sorozatok gyűjtése

```
10> futam:difek([1,3,5,7,7,5,3,1,1,1,1,2]).
[[1,3,5,7],[7,5,3,1],[1,1,1],[2]]
```

```
% @spec difek(Xs::[number()]) -> Dss::[[number()]].
% Dss az Xs számtani sorozatot alkotó részlistáinak listája.
difek([X1,X2|_]=L) ->
    {Fs,Ms} = futam_maradek(fun(A, B) -> B-A=:=X2-X1 end, L),
    [Fs|difek(Ms)];
difek([_]=L) -> [L];  difek([]) -> [].
```


Tartalom

6 Haladó Erlang
- Rekurzív adatstruktúrák
- Pontos megoldás funkcionális megközelítésben
- Listák használata: futamok
- Rekurzió fajtái
- Halmazműveletek (rendezetlen listával)
- Generikus keresőfák
- Mohó és lusta kiértékelés

Rekurzió alapesetek

- Lineáris rekurzió
  Példa: lista összegének meghatározása

`rek.erl` – Rekurzió példák

```
sum([])    -> 0;
sum([H|T]) -> H + sum(T).
```

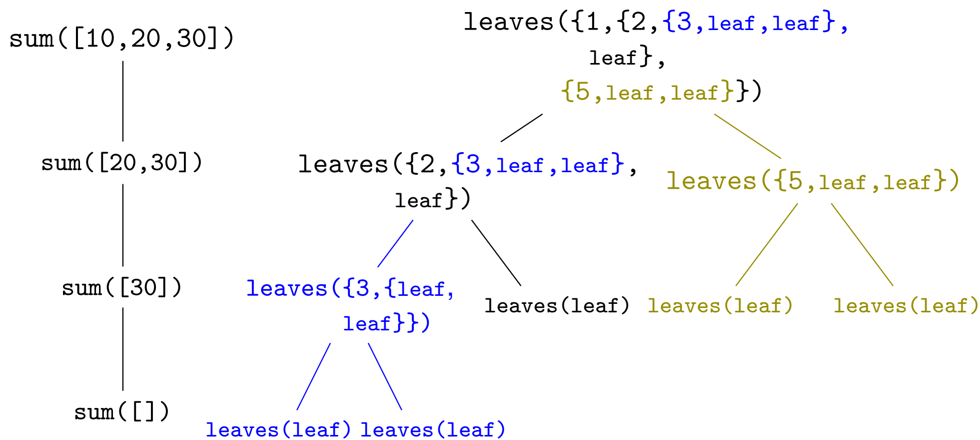
- Elágazó rekurzió (Tree recursion)
  Példa: bináris fa leveleinek száma

```
% @type btree() = leaf | {any(),btree(),btree()}.
leaves(leaf)       -> 1;
leaves({_,Lt,Rt}) -> leaves(Lt) + leaves(Rt).
```

- Mindkettőből *rekurzív folyamat* jön létre, ha alkalmazzuk: minden egyes rekurzív hívás mélyíti a vermet
- Például `sum/1` az egész listát kiteríti a vermen: `sum([1,2,3])` → `1 + sum([2,3])` → `1 + (2 + sum([3]))` → `1 + (2 + (3 + sum([])))`

Rekurzív folyamat erőforrásigénye

- Hívási fa (call graph, CG fa): futás során meghívott függvények



- A lépések száma főként a *CG méretének* függvénye
- A tárigény (veremigény) főként a *CG mélységének* függvénye[7]

[7] itt lineáris függvénye

Jobbrekurzió, iteráció

Gyakran érdemes akkumulátorok bevezetésével jobbrekurzióvá alakítani

- Példa: lista összegének meghatározása

```
sumi(L) -> sumi(L,0).

sumi([], N)     -> N;
sumi([H|T], N) -> sumi(T, N+H).
```

- A segédfüggvényt jobb nem exportálni, hogy elrejtsük az akkumulátort
- A jobbrekurzióból *iteratív folyamat* hozható létre, amely nem mélyíti a vermet: `sumi/2` tárigénye konstans: `sumi([1,2,3],0)` → `sumi([2,3],1)` → `sum([3],3)` → `sum([],6)`
- Ne tévesszük össze egymással a rekurzív számítási folyamatot és a rekurzív függvényt, eljárást!
  - Rekurzív függvény esetén csupán a szintaxisról van szó, arról, hogy hivatkozik-e a függvény, eljárás *önmagára*
  - Folyamat esetében viszont a folyamat menetéről, lefolyásáról beszélünk
- Ha egy függvény *jobbrekurzív (tail-recursive)*, a megfelelő folyamat – az értelmező/fordító jóságától függően – lehet iteratív

Rekurzív folyamat erőforrásigénye – Példák

Példa[8]	Lépések (CG méret)	CG mélység	Tárigény ≈ mélység∗|állapot|
`sum(lists:seq(1, n))`	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n) * \Theta(1)$
`sumi(lists:seq(1, n))`	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$ (konst.)	$\Theta(1) * \Theta(1)$
`SEND+MORE=MONEY` kimerítő keresés, itt $n = 8$	$\Theta(10^n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n) * \Theta(n) = \Theta(n * n)$
$(n * n)$-es Sudoku kimerítő keresés, tipikusan $n = 9$	$\Theta(n^{n*n})$	$\Theta(n * n)$	$\Theta(n^2) * \Theta(n^2) = \Theta(n^4)$

- A rekurzióból fakadó tárigény lehet jelentős is (vö `sum/1`, `sumi/1`), és lehet elhanyagolható is a lépésekhez képest (SMM, Sudoku)
- Az eljárások, függvények olyan *minták*, amelyek megszabják a számítási folyamatok, processzek menetét, *lokális* viselkedését
- Egy számítási folyamat *globális* viselkedését (pl. idő- és tárigény) általában nehéz megbecsülni, de törekednünk kell rá

[8] $f(n) = \Theta(g(n))$ jelentése: $g(n) \cdot k_1 \leq f(n) \leq g(n) \cdot k_2$ valamilyen $k_1, k_2 > 0$-ra

A jobbrekurzió mindig előnyösebb? Nem!

- A jobbrekurzív `sumi(L1)` össz-tárigénye konstans, a lineáris-rekurzív `sum(L1)` össz-tárigénye Θ(`length(L1)`)
- Melyiknek alacsonyabb az össz-tárigénye?
  - `bevezeto:append(L1,L2)`
  - `R1=lists:reverse(L1),bevezeto:revapp(R1,L2) % jobbrek.`
- `append` kiteríti `L1` elemeit a vermen, ennek tárigénye Θ(`length(L1)`), majd ezeket `L2` elé fűzi, így tárigénye Θ(`length(L1)+length(L2)`)
- `revapp(R1,L2)` iteratív számítási folyamat, nem mélyíti a vermet, de `revapp` felépíti az `L1++L2` akkumulátort, ennek tárigénye szintén Θ(`length(L1)+length(L2)`)
- A jobbrekurzív `revapp` össz-tárigénye hasonló, mint a lineáris-rekurzív `append` függvényé!
- Ha a jobbrekurzív esetben a `reverse` után nem törli *azonnal* a szemétgyűjtő (garbage collector) `L1`-et, akkor egyszerre kell tárolni az `L1`, `R1`, `L2`, `L1++L2` listákat, így tárigénye nagyobb is lehet (pl. Erlang R14B)
- Ha az akku. mérete nem konstans, meggondolandó a jobbrekurzió…

Elágazó rekurzió példa: Fibonacci-sorozat

- Amikor hierarchikusan strukturált adatokon kell műveleteket végezni, pl. egy fát kell bejárni, akkor az elágazó rekurzió nagyon is természetes és hasznos eszköz
- Az elágazó rekurzió numerikus számításoknál az algoritmus első megfogalmazásakor is hasznos lehet; példa: írjuk át a Fibonacci-számok matematikai definícióját programmá – 0,0,1,1,2,3,5,8,13,...

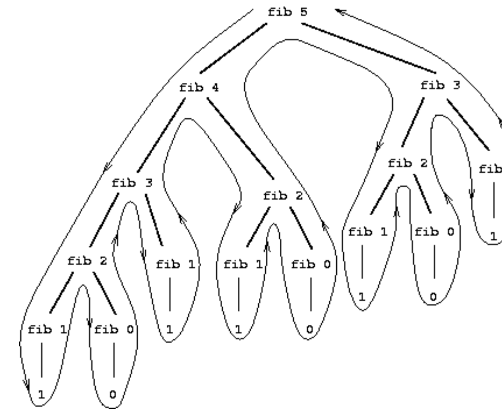
$$F(n) = \begin{cases} 0 & \text{ha } n = 0, \\ 1 & \text{ha } n = 1, \\ \mathtt{F(n-1)} + \mathtt{F(n-2)} & \text{különben.} \end{cases}$$

Naív Fibonacci, előfelt.: $N \in \mathcal{N}$

```
fib(0) -> 0;
fib(1) -> 1;
fib(N) -> fib(N-2) + fib(N-1).
```

- Ha már értjük a feladatot, az első, rossz hatékonyságú változatot könnyebb átírni jó, hatékony programmá. Az elágazó rekurzió segíthet a feladat megértésében.
- *Hivatkozás:* Structure and Interpretation of Computer Programs, 2nd ed., by H. Abelsson, G. J. Sussman, J. Sussman, The MIT Press, 1996

Elágazó rekurzió példa: Fibonacci-sorozat (2)



- Elágazóan rekurzív folyamat hívási fája `fib(5)` kiszámításakor
- Alkalmatlan a Fibonacci-számok előállítására
- A $F(n)$ meghatározásához pontosan $F(n+1)$ levélből álló fát kell bejárni, azaz ennyiszer kell meghatározni $F(0)$-at vagy $F(1)$-et
- $F(n)$ exponenciálisan nő n-nel: $\lim_{n\to\infty} \frac{F(n+1)}{F(n)} = \varphi$, ahol $\varphi = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1.61803$, az *aranymetszés* arányszáma

Elágazó rekurzió példa: Fibonacci-sorozat (3)

- A lépések száma tehát $F(n)$-nel együtt exponenciálisan nő n-nel
- A tárigény ugyanakkor csak lineárisan nő n-nel, mert csak azt kell nyilvántartani, hogy hányadik szinten járunk a fában
- A Fibonacci-számok azonban lineáris-iteratív folyamattal is előállíthatók: ha az A és B változók kezdőértéke rendre $F(1) = 1$ és $F(0) = 0$, és ismétlődően alkalmazzuk az $A \leftarrow A + B$, $B \leftarrow A$ transzformációkat, akkor N lépés után $A = F(N+1)$ és $B = F(N)$ lesz

```
fibi(0) -> 0;                    % fibi(N) az N. Fibonacci-szám.
fibi(N) -> fibi(N-1, 1, 0).

% fibi(N,A,B) az A←A+B, B←A trafó N-szeri ismétlése utáni A.
fibi(0, A, _B) -> A;
fibi(I, A, B)  -> fibi(I-1, B+A, A).
```

- A Fibonacci-példában a lépések száma elágazó rekurziónál n-nel exponenciálisan, lineáris rekurziónál n-nel arányosan nőtt!
- Pl. a `tree:leaves/1` függvény is lineáris rekurzióvá alakítható, de ezzel már nem javítható a hatékonysága: valamilyen LIFO tárolót kellene használni a mélységi bejáráshoz a rendszer stackje helyett

Programhelyesség informális igazolása

- Egy rekurzív programról is be kell látnunk, hogy
  - funkcionálisan helyes (azaz azt kapjuk eredményül, amit várunk),
  - a kiértékelése biztosan befejeződik (nem „végtelen” a rekurzió).
- Ellenpélda: `fib(-1)` „végtelen” ciklus; bár a paraméter csökken, az abszolút értéke nem csökken 0-ba, csak ha a paraméter nemnegatív
- Bizonyítása rekurzió esetén egyszerű, *strukturális indukcióval* lehetséges, azaz visszavezethető a teljes indukcióra valamilyen *strukturális tulajdonság* szerint
- Csak meg kell választanunk a strukturális tulajdonságot, amire vonatkoztatjuk az indukciót; pl. a `fib/1` az `N = 0` paraméterre leáll, de a 0 nem a legkisebb szám, de *abszolút értéke* a legkisebb → az indukciót `abs(N)`-re vonatkoztatjuk
- A `map` példáján mutatjuk be

Programhelyesség informális igazolása (folyt.)

```
% @spec map(fun(A) -> B, [A]) -> [B].
map(_F, [])    -> [];
map(F, [X|Xs]) -> [F(X)|map(F, Xs)].
```

1. A strukturális tulajdonság itt a lista hossza
2. A függvény funkcionálisan helyes, mert
   - belátjuk, hogy a függvény jól transzformálja az üres listát;
   - belátjuk, hogy az `F` jól transzformálja a lista első elemét (a fejét);
   - indukciós feltevés: a függvény jól transzformálja az eggyel rövidebb listát (a lista farkát);
   - belátjuk, hogy a fej transzformálásával kapott elem és a farok transzformálásával kapott lista összefűzése a várt listát adja.
3. A kiértekelés véges számú lépésben befejeződik, mert
   - a lista (mohó kiértékelés mellett!) véges,
   - a függvényt a *rekurzív ágban* minden lépésben egyre rövidülő listára alkalmazzuk (strukturális tulajdonság csökken), és
   - a rekurziót előbb-utóbb leállítjuk (ui. kezeljük az *alapesetet*, ahol a strukturális tulajdonság zérus, van rekurziót nem tartalmazó klóz).

Tartalom

6 Haladó Erlang
- Rekurzív adatstruktúrák
- Pontos megoldás funkcionális megközelítésben
- Listák használata: futamok
- Rekurzió fajtái
- Halmazműveletek (rendezetlen listával)
- Generikus keresőfák
- Mohó és lusta kiértékelés

Tagsági vizsgálat

- A halmazt itt egy rendezetlen listával ábrázoljuk
- A műveletek sokkal hatékonyabbak volnának rendezett adatszerkezettel (pl. rendezett lista, keresőfa, hash)
- STDLIB: sets, ordsets, gb_sets modulok

`set.erl` – Halmazkezelő függvények

```
% @type set() = list().

% empty() az üres halmaz.
empty() ->                    % Az absztrakció miatt szükséges:
    [].                       % ábrázolástól független interfész.

% isMember(X, Ys) igaz, ha az X elem benne van az Ys halmazban.
isMember(_, []) ->
    false;
isMember(X, [Y|Ys]) ->
    X=:=Y orelse isMember(X, Ys).
```

- *Megjegyzés:* `orelse` lusta kiértékelésű

Új elem berakása egy halmazba, listából halmaz

- `newMember` új elemet rak egy halmazba, *ha még nincs benne*

`set.erl` – folytatás

```
% @spec newMember(X::any(), Xs::set()) -> Xs2::set().
% Xs2 halmaz az Xs halmaz és az [X] halmaz uniója.
newMember(X, Xs) ->
    case isMember(X, Xs) of
        true -> Xs;
        false -> [X|Xs]
    end.
```

- `listToSet` listát halmazzá alakít a duplikátumok törlésével; naív (lassú)

```
% @spec listToSet(list()) -> set().
% listToSet(Xs) az Xs lista elemeinek halmaza.
listToSet([]) ->
    [];
listToSet([X|Xs]) ->
    newMember(X, listToSet(Xs)).
```

Halmazműveletek

- Öt ismert halmazműveletet definiálunk a továbbiakban (rendezetlen listákkal ábrázolt halmazokon):
  - unió (`union`, $S \bigcup T$),
  - metszet (`intersect`, $S \bigcap T$),
  - részhalmaza-e (`isSubset`, $T \subseteq S$),
  - egyenlők-e (`isEqual`, $S = T$),
  - hatványhalmaz (`powerSet`, 2^S).
- Otthoni gyakorlásra: halmazműveletek megvalósítása rendezett listákkal, illetve fákkal.
  A vizsgán lehetnek ilyen feladatok...

Unió, metszet

`set.erl` – folytatás

```
% @spec union(Xs::set(), Ys::set()) -> Zs::set().
% Zs az Xs és Ys halmazok uniója.

union([], Ys)      -> Ys;
union([X|Xs], Ys) ->
  newMember(X, union(Xs, Ys)).
```

```
union2(Xs, Ys) ->
  foldr(fun newMember/2, Ys, Xs).
```

```
% @spec intersect(Xs::set(), Ys::set()) -> Zs::set().
% Zs az Xs és Ys halmazok metszete.

intersect([], _) ->
    [];
intersect([X|Xs], Ys) ->
    Zs = intersect(Xs, Ys),
    case isMember(X, Ys) of
        true  -> [X|Zs];
        false -> Zs
    end.
```

```
intersect3(Xs, Ys) ->
    [ X || X <- Xs,
           isMember(X, Ys)
    ].
```


Részhalmaza-e, egyenlők-e

`set.erl` – folytatás

```
%  @spec isSubset(Xs::set(), Ys::set()) -> B::bool().
% B igaz, ha Xs részhalmaza Ys-nek.
isSubset([], _) ->
    true;
isSubset([X|Xs], Ys) ->
    isMember(X, Ys) andalso isSubset(Xs, Ys).

% @spec isEqual(Xs::set(), Ys::set()) -> B::bool().
% B igaz, ha Xs és Ys elemei azonosak.
isEqual(Xs, Ys) ->
    isSubset(Xs, Ys) andalso isSubset(Ys, Xs).
```

- `isSubset` lassú a rendezetlenség miatt
- `andalso` lusta kiértékelésű
- A listák egyenlőségének vizsgálata ugyan beépített művelet az Erlangban, halmazokra mégsem használható, mert pl. `[3,4]` és `[4,3]` listaként különböznek, de halmazként egyenlők.

Halmaz hatványhalmaza

- Az S halmaz hatványhalmazának nevezzük az S *összes* részhalmazának a halmazát, jelölés itt: 2^S
- S hatványhalmazát *rekurzívan* például úgy állíthatjuk elő, hogy kiveszünk S-ből egy x elemet, majd előállítjuk az $S \setminus \{x\}$ hatványhalmazát
- Például $S = \{10, 20, 30\}$, $x \leftarrow 10$, $2^{S \setminus \{x\}} = \{\{\}, \{20\}, \{30\}, \{20, 30\}\}$
- Ha tetszőleges T halmazra $T \subseteq S \setminus \{x\}$, akkor $T \subseteq S$ és $T \bigcup \{x\} \subseteq S$, azaz mind T, mind $T \bigcup \{x\}$ eleme S hatványhalmazának
- Vagyis $2^{\{10,20,30\}} =$

$$\Big\{\{\}, \{20\}, \{30\}, \{20, 30\}\Big\} \bigcup \Big\{\{\}\cup\{10\}, \{20\}\cup\{10\}, \{30\}\cup\{10\}, \{20, 30\}\cup\{10\}\Big\}$$

```
% powerSet*(S) az S halmaz hatványhalmaza.

powerSet1([]) ->
 [[]];
powerSet1([X|Xs]) ->
 P = powerSet1(Xs),
 P ++ [ [X|Ys] || Ys <- P ].
```

```
powerSet2(Xs) -> % jobbrekurzívan
 foldl(fun(X, P) ->
        P ++ [ [X|Ys] || Ys <- P ]
       end,
       [[]],
       Xs).
```

Halmaz hatványhalmaza – hatékonyabb változat

- A `P ++ [ [X|Ys] || Ys <- P ]` művelet hatékonyabbá tehető

`set.erl` – folytatás

```
% @spec insAll(X::any(), Yss::[[any()]], Zss::[[any()]]) -> Xss::[[a
% Xss az Yss lista Ys elemeinek Zss elé fűzött
% listája, amelyben minden Ys elem elé X van beszúrva.
insAll(_X,[],Zss) ->
    Zss;
insAll(X,[Ys|Yss],Zss) ->
    insAll(X,Yss,[[X|Ys]|Zss]).

powerSet3([]) ->
    [[]];
powerSet3([X|Xs]) ->
    P = powerSet3(Xs),
    insAll(X,P,P).   % [ [X|Ys] || Ys <- P ] ++ P kiváltására
```


Tartalom

6 Haladó Erlang
- Rekurzív adatstruktúrák
- Pontos megoldás funkcionális megközelítésben
- Listák használata: futamok
- Rekurzió fajtái
- Halmazműveletek (rendezetlen listával)
- Generikus keresőfák
- Mohó és lusta kiértékelés

Generikus keresőfák Erlangban

Lásd a leírást a `http://dp.iit.bme.hu/dp08a/gtree.pdf`,
a futtatható példaprogramokat a `http://dp.iit.bme.hu/dp08a/gtree.erl` fájlban.

Megjegyzések:

- `gtree:set_to_list/1` funkcióban azonos `tree:to_list_infix/1` függvénnyel, de hatékonyabb: nincs benne összefűzés (`L1++L2`), csak építés (`[H|T]`)
-

```
1> gtree:list_to_set([3,1,5,4,2,1]).
{3,{1,leaf,{2,leaf,leaf}},{5,{4,leaf,leaf},leaf}}
2> io:format("~10p~n",
       [gtree:list_to_map([{3,a},{1,a},{5,a},{4,b},{2,b},{1,x}])]).
{{3,a},
 {{1,x},
  leaf,
  {{2,b},
   leaf,
   leaf}},
 ...
```


Tartalom

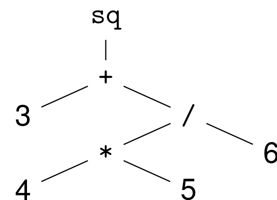
6 Haladó Erlang
- Rekurzív adatstruktúrák
- Pontos megoldás funkcionális megközelítésben
- Listák használata: futamok
- Rekurzió fajtái
- Halmazműveletek (rendezetlen listával)
- Generikus keresőfák
- Mohó és lusta kiértékelés

Összetett kifejezés kiértékelése

- Egy összetett kifejezést az Erlang két lépésben értékel ki, mohó kiértékeléssel; az alábbi rekurzív kiértékelési szabállyal:
  1. Először kiértékeli az operátort (műveleti jelet, függvényjelet) és az argumentumait,
  2. majd ezután alkalmazza az operátort az argumentumokra.
- A kifejezéseket *kifejezésfával* ábrázolhatjuk
  - Hasonló a Prolog-kifejezés ábrázolásához:

```
| ?- write_canonical(sq(3+4*5/6)).
sq(+(3,/(*(4,5),6)))
```

  - A mohó kiértékelés során az operandusok alulról fölfelé „terjednek”



- Felhasználói függvény mohó alkalmazása (fent 2. pont):
  1. a függvény törzsében a formális paraméterek összes előfordulását lecseréli a megfelelő aktuális paraméterre,
  2. majd kiértékeli a függvény törzsét.

Függvényalkalmazás mohó kiértékelése

Tekintsük a következő egyszerű függvények definícióját:

```
sq(X) -> X * X.
sumsq(X, Y) -> sq(X) + sq(Y).
f(A) -> sumsq(A+1, A*2).
```

Mohó kiértékelés esetén minden lépésben egy részkifejezést egy vele egyenértékű kifejezéssel helyettesítünk. Pl. az `f(5)` mohó kiértékelése:

```
f(5) → sumsq(5+1, 5*2) → sumsq(6, 5*2) → sumsq(6, 10) → sq(6) +
sq(10) → 6*6 + sq(10) → 36 + sq(10) → 36 + 10*10 → 36 + 100 → 136
```

- A függvényalkalmazás itt bemutatott *helyettesítési modellje*, az „egyenlők helyettesítése egyenlőkkel” *(equals replaced by equals)* segíti a függvényalkalmazás *jelentésének* megértését
- Olyan esetekben alkalmazható, amikor egy függvény *jelentése független* a környezetétől (pl. ha minden mellékhatás kizárva)
- Az fordítók rendszerint bonyolultabb modell szerint működnek

Lusta kiértékelés

- Az Erlang tehát először kiértékeli az operátort és az argumentumait, majd alkalmazza az operátort az argumentumokra
- Ezt a kiértékelési sorrendet *mohó* (eager) vagy *applikatív sorrendű* (applicative order) kiértékelésnek nevezzük
- Van más lehetőség is: a kiértékelést addig halogatjuk, ameddig csak lehetséges: ezt *lusta* (lazy), *szükség szerinti* (by need) vagy *normál sorrendű* (normal order) kiértékelésnek nevezzük
- Példa: az `f(5)` lusta kiértékelése:

```
f(5) → sumsq(5+1, 5*2) → sq(5+1) + sq(5*2) → (5+1)*(5+1) +
(5*2)*(5*2) → 6*(5+1) + (5*2)*(5*2) → 6*6 + (5*2)*(5*2) → 36 +
(5*2)*(5*2) → 36 + 10*(5*2) → 36 + 10*10 → 36 + 100 → 136
```

- Példa: a `false andalso f(5) > 100` lusta kiértékelése:

```
false andalso f(5) > 100 → false
```


Mohó és lusta kiértékelés

- Igazolható, hogy olyan függvények esetén, amelyek jelentésének megértésére a helyettesítési modell alkalmas, a kétféle kiértékelési sorrend azonos eredményt ad
- Vegyük észre, hogy lusta (szükség szerinti) kiértékelés mellett egyes részkifejezéseket néha többször is ki kell értékelni
- A többszörös kiértékelést jobb értelmezők/fordítók (pl. Alice, Haskell) úgy kerülik el, hogy az azonos részkifejezéseket megjelölik, és amikor egy részkifejezést először kiértékelnek, *az eredményét megjegyzik,* a többi előfordulásakor pedig ezt az eredményt veszik elő. E módszer hátránya a nyilvántartás szükségessége. Ma általában ezt nevezik *lusta* kiértékelésnek.

Lusta kiértékelés Erlangban: lusta farkú lista

- Ismétlés: `% @type erlang:list() = [] | [any()|list()].`
- A `[H|T]` egy speciális szintaxisú kételemű ennes, nemcsak listákra használhatjuk:

```
1> [1|[2]].
[1,2]    % Lista, mert a | utáni rész lista.
2> [1|[2|[]]].
[1,2]    % Lista, mint az előző.
3> [1|2].
[1|2]    % Egy kételemű ennes, mert a | utáni rész nem lista.
```

- A következő fóliákon az átláthatóság kedvéért a listaszintaxist használjuk egy kételemű ennesre, a lusta listára

`lazy.erl` – Lusta farkú lista

```
% @type lazy:list() = [] | [any()|fun() -> lazy:list()].
```

- A fenti szerkezetben a második tag (farok) *késleltett kiértékelésű* (delayed evaluation)
- Teljesen lusta lista: `verylazy.erl` (nem tananyag)
  `% @type verylazy:list() = fun() -> ([] | [any()|verylazy:list()]).`

Haladó Erlang Mohó és lusta kiértékelés

Lusta farkú lista építése

- Végtelen számsorozat:

`lazy.erl` – folytatás

```
% @spec infseq(N::integer())
%         -> lazy:list().
infseq(N) ->
  [N|fun() -> infseq(N+1) end].
```

- Példák:

```
1> lazy:infseq(0).
[0|#Fun<lazy.1.65678590>]
2> T1 = tl(lazy:infseq(0)).
#Fun<lazy.1.65678590>
3> T1().
[1|#Fun<lazy.1.65678590>]
```

- Véges számsorozat:

`lazy.erl` – folytatás

```
% @spec seq(M::integer(),
%            N::integer())
%         -> lazy:list().
seq(M, N) when M =< N ->
  [M|fun() -> seq(M+1, N) end];
seq(_, _) ->
  [].
```

- Példák:

```
1> lazy:seq(1,1).
[1|#Fun<lazy.0.35745118>]
2> tl(lazy:seq(1,1)).
#Fun<lazy.0.35745118>
3> (tl(lazy:seq(1,1)))().
[]
```


Haladó Erlang Mohó és lusta kiértékelés

Erlang-lista konvertálása

Erlang-listából lusta lista:

- Nagyon gyors: egyetlen függvényhívás

```
% @spec cons(erlang:list())
%         -> lazy:list().
cons([]) ->
    [];
cons([H|T]) ->
    [H|fun() -> cons(T) end].
```

```
1> lazy:cons([1,2]).
[1|#Fun<lazy.10.66878903>]
2> T2 = tl(lazy:cons([1,2])).
#Fun<lazy.10.66878903>
3> T2().
[2|#Fun<lazy.10.66878903>]
4> (tl(T2()))().
[]
```

Lusta listából Erlang-lista:

- Csak az első `N` elemét értékeljük ki: lehet, hogy végtelen

```
% @spec take(lazy:list(),
%            N::integer())
%         -> erlang:list().
take(_, 0)      -> [];
take([], _)     -> [];
take([H|_], 1)  -> [H]; % optim.
take([H|T], N) ->
    [H|take(T(), N-1)].
```

```
1> lazy:take(lazy:infseq(0), 5).
[0,1,2,3,4]
2> lazy:take(lazy:cons([1,2]), 5).
[1,2]
```

- 3. klózban `T()` felesleges lenne

Haladó Erlang Mohó és lusta kiértékelés

Eddig bemutatott függvények lusta listára – iteratív `sum`

- Lista összegzése (csak véges listára)

`lazy.erl` – folytatás

```
sum(L) -> sum(L, 0).

% @spec sum(lazy:list(), number()) -> number().
sum([], X)    -> X;
sum([H|F], X) -> sum(F(), H+X).   % jobbrekurzív!
```

- Összehasonlítás:
  - `lists:sum(lists:seq(1,N=10000000))`
    mohó, gyors, tárigénye lineáris `N`-ben
  - `lazy:sum(lazy:seq(1,N=10000000))`
    lusta, kicsit lassabb, tárigénye kb. konstans (korlátos számok esetén)
- Általánosabban a lusta lista és a mohó Erlang-lista összehasonlítása:
  - Tárigénye csak a kiértékelt résznek van
  - Lusta lista *teljes* kiértékelése sokkal lassabb is lehet (késleltetés)
  - De időigénye alacsonyabb *lehet, ha* nem kell teljesen kiértékelni

Eddig bemutatott függvények lusta listára – `filter`, `append`

- Motiváció: listanézet, ++ nem alkalmazható; a lusta szintaxis elrejtése

`lazy.erl` – folytatás

```
% filter(fun(any()) -> bool(), lazy:list()) -> lazy:list().
% Kicsit mohó, az eredménylista fejéig kiértékeli a listát
filter(_, []) ->
    [];
filter(P, [H|T]) ->
    case P(H) of
        true  -> [H|fun() -> filter(P, T()) end];
        false -> filter(P, T()) % megkeressük az eredmény fejét
    end.

% @spec append(lazy:list(), lazy:list()) -> lazy:list().
append([], L2)    -> L2;
append([H|T], L2) -> [H|fun() -> append(T(), L2) end].
```


Nevezetes számsorozatok

- Fibonacci-sorozat

```
% @spec fibs(integer(), integer()) -> lazy:list.
fibs(Cur, Next)  ->  [Cur|fun() -> fibs(Next, Cur+Next) end].
```

```
1> lazy:take(lazy:fibs(0,1),10).
[0,1,1,2,3,5,8,13,21,34]
```

- Eratosztenészi szita

```
% @spec sift(Prime::integer(), L::lazy:list()) -> L2::lazy:list().
% L2 lista L lista azon elemei, melyek nem oszthatóak Prime-mal.
sift(Prime, L)  ->  filter(fun(N) -> N rem Prime =/= 0 end, L).

% @spec sieve(L1::lazy:list()) -> L2::lazy:list().
% L2 lista az L1 végtelen lista szitálása (üres listára hibát ad).
sieve([H|T])  ->  [H|fun() -> sieve(sift(H, T())) end].
```

```
1> lazy:take(lazy:sieve(lazy:infseq(2)),10).
[2,3,5,7,11,13,17,19,23,29]
```


Lusta `append` alkalmazása: lusta `qsort`

```
% Csak emlékeztetőül: @spec eqsort(erlang:list()) -> erlang:list().
eqsort([])          -> [];
eqsort([Pivot|Xs]) -> eqsort([X || X <- Xs, X < Pivot])
                      ++ [Pivot|eqsort([X || X <- Xs, X >= Pivot])].

% @spec qsort(lazy:list()) -> lazy:list().
qsort([])          -> [];
qsort([Pivot|Xs]) ->
  io:format("hivas: qsort(~w)~n", [take([Pivot|Xs], 100)]),
  Low = fun(X) -> X < Pivot end, High = fun(X) -> X >= Pivot end,
  append(qsort(filter(Low, Xs())),
         [Pivot|fun() -> qsort(filter(High, Xs())) end]).
```

```
1> L=cons([5,3,6,8,1,7]).
[5|#Fun<lazy.10.7...>]
2> take(qsort(L), 1).
hivas: qsort([5,3,6,8,1,7])
hivas: qsort([3,1])
hivas: qsort([1])
[1]
```

```
3> take(qsort(L), 2).
hivas: qsort([5,3,6,8,1,7])
hivas: qsort([3,1])
hivas: qsort([1])
[1,3]
```

```
4> take(qsort(L), 6).
hivas: qsort([5,3,...])
hivas: qsort([3,1])
hivas: qsort([1])
hivas: qsort([6,8,7])
hivas: qsort([8,7])
hivas: qsort([7])
[1,3,5,6,7,8]
```