ABSZTRAKCIÓ FÜGGVÉNYEKKEL (ELJÁRÁSOKKAL)

Elágazó rekurzió

- Korábban lineáris-rekurzív, ill. lineáris-iteratív folyamatokra láttunk példákat (faktoriális kiszámítása kétféleképpen).
- Most *elágazó rekurzióra* nézzünk példát: állítsuk elő a Fibonacci-számok sorozatát.
- Egy Fibonacci-számot az előző két Fibonacci-szám összege adja:

```
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...
```

- A Fibonacci-számok matematikai definíciója könnyen átírható SML-függvénnyé:

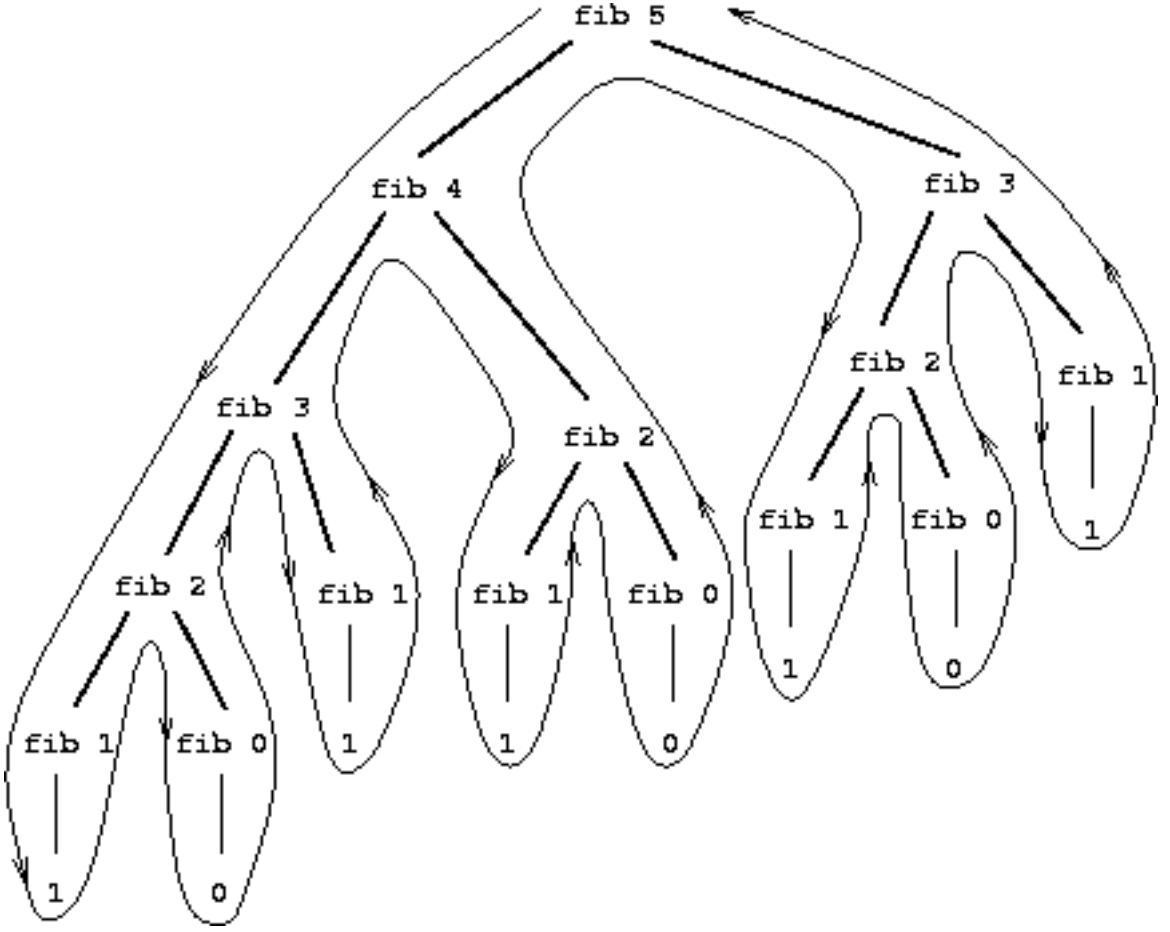
$F(0) = 0$
$F(1) = 1$
$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$, ha $n > 1$

```
fun fib 0 = 0
  | fib 1 = 1
  | fib n = fib(n-1) + fib(n-2)
```

Emlékeztetőül: a `fib` függvény definíciójában a 3. klóznak az utolsónak kell lennie, mert az `n` minta minden argumentumra illeszkedik.

- A következő lapon látható ábra illusztrálja az elágazóan rekurzív folyamatot `fib 5` kiszámítása esetén.

Elágazó rekurzió (folyt.)



- `fib 5`-öt `fib 4` és `fib 3`, `fib 4`-et `fib 3` és `fib 2` kiszámításával stb. kapjuk.

Elágazó rekurzió (folyt.)

- Az előző program alkalmas az elágazó rekurzió lényegének bemutatására, de szinte alkalmatlan a Fibonacci-számok előállítására!
- Vegyük észre, hogy pl. `fib 3`-at kétszer is kiszámítjuk, azaz a munkának ezt a részét kb. a harmadát) feleslegesen végezzük el.
- Belátható, hogy $F(n)$ meghatározásához pontosan $F(n+1)$ levélből álló fát kell bejárni, azaz ennyiszer kell meghatározni $F(0)$-t vagy $F(1)$-et.
- $F(n)$ exponenciálisan nő n-nel.

  Pontosabban, $F(n)$ a $\Phi^n/\sqrt{5}$-höz közel eső egész, ahol $\Phi = (1-\sqrt{5})/2 \approx 1.61803$, az ún. *aranymetszés* arányszáma. Φ kielégíti a $\Phi^2 = \Phi + 1$ egyenletet.
- A megteendő lépések száma tehát $F(n)$-nel együtt exponenciálisan nő n-nel. Ugyanakkor a tárigény csak lineárisan nő n-nel, mert csak azt kell nyilvántartani, hogy hányadik szinten járunk a fában.
- Általában is igaz, hogy elágazó rekurzió esetén a lépések száma a fa csomópontjainak a számával, a tárigény viszont a fa maximális mélységével arányos.

Elágazó rekurzió (folyt.)

- A Fibonacci-számok lineáris-iteratív folyamattal is előállíthatók.

  Ha az a és b változók kezdőértéke rendre $F(1) = 1$ és $F(0) = 0$, és ismétlődően alkalmazzuk az $a \leftarrow a + b$, $b \leftarrow a$ transzformációkat, akkor n lépés után $a = F(n + 1)$ és $b = F(n)$ lesz. Az iteratív folyamatot létrehozó SML-függvény egy változata:

```
fun fib n = let fun fibIter (i, b, a) =
                      if i = n then b
                      else fibIter(i+1, a, a+b)
            in
                fibIter(0, 0, 1)
            end
```

- *Mintaillesztést* használhatunk, ha `i`-t nem növeljük, hanem `n`-től 0-ig csökkentjük.

  Figyelem: a klózok sorrendje, mivel nem egymást kizáróak a minták, lényeges!

```
fun fib n = let fun fibIter (0, b, a) = b
                  | fibIter (i, b, a) = fibIter(i-1, a, a+b)
            in
                fibIter(n, 0, 1)
            end
```

Elágazó rekurzió (folyt.)

- A Fibonacci-példában a lépések száma elágazó rekurziónál tehát n-nel exponenciálisan, lineáris rekurziónál n-nel arányosan nőtt, kis n-ekre is hatalmas a nyereség!
- Téves lenne azonban azt a következtetést levonni, hogy az elágazó rekurzió használhatatlan. Amikor hierarchikusan strukturált adatokon kell műveleteket végezni, pl. egy fát kell bejárni, akkor az elágazó rekurzió (angolul: *tree recursion)* nagyon is természetes és hasznos eszköz.
- Az elágazó rekurzió numerikus számításoknál az algoritmus első megfogalmazásakor is hasznos lehet: gondoljunk csak arra, hogy milyen könnyű volt átírni a Fibonacci-számok matematikai definícióját programmá.
- Ha már értjük a feladatot, az első, rossz hatékonyságú változatot könnyebb átírni jó, hatékony programmá. Az elágazó rekurzió segíthet a feladat megértésében.

Az iteratív Fibonacci-algoritmushoz csak egy aprócska ötlet kellett. A következő feladatra azonban nem lenne könnyű iteratív algoritmust írni.

- Hányféleképpen lehet felváltani *egy* dollárt 50, 25, 10, 5 és 1 centesekre?
- Általánosabban: adott összeget adott érmékkel hányféleképpen lehet felváltani?

Elágazó rekurzió (folyt.): pénzváltás

Tegyük föl, hogy n darab érme áll a rendelkezésünkre valamilyen (pl. nagyság szerint csökkenő) sorrendben. Ekkor az a összeg lehetséges felváltásainak számát úgy kapjuk meg, hogy

- kiszámoljuk, hogy az a összeg hányféleképpen váltható fel az első (d értékű) érmét kivéve a többi érmével, és ehhez
- hozzáadjuk, hogy az $a - d$ összeg hányféleképpen váltható fel az összes érmével, az elsőt is beleértve – más szóval azt, hogy az a összeget hányféleképpen tudjuk úgy felváltani, hogy a d érmét legalább egyszer felhasználjuk.

A feladat tehát rekurzióval megoldható, hiszen redukálható úgy, hogy kisebb összegeket kevesebb érmével kell felváltanunk. A következő alapeseteket különböztessük meg:

- Ha $a = 0$, a felváltások száma 1.

  (Ha az összeg 0, csak egyféleképpen, 0 db érmével lehet „felváltani”.)
- Ha $a < 0$, a felváltások száma 0.
- Ha $n = 0$, a felváltások száma 0.

A példában a `firstDenomination` (magyarul *első címlet)* függvényt felsorolással valósítottuk meg. Tömörebb és rugalmasabb lenne a megvalósítása lista alkalmazásával.

Elágazó rekurzió (folyt.): pénzváltás

```
fun countChange amount =
  let (* cC amount kindsOfCoins = az amount összes felváltásainak száma
                                  kindsOfCoins db érmével *)
      fun cC (amount, kindsOfCoins) =
            if amount < 0 orelse kindsOfCoins = 0 then 0
            else if amount = 0 then 1
            else cC (amount, kindsOfCoins - 1) +
                 cC (amount - firstDenomination kindsOfCoins, kindsOfCoins)
      and firstDenomination 1 = 1
        | firstDenomination 2 = 5
        | firstDenomination 3 = 10
        | firstDenomination 4 = 25
        | firstDenomination 5 = 50
  in
     cC(amount, 5)
  end;

countChange 10 = 4; countChange 100 = 292;
```

Gyakorló feladatok.

- Írja át a `firstDenomination` függvényt úgy, hogy a címleteket egy lista tartalmazza.
- Írja meg a `cC` függvény mintaillesztést használó változatát!

Hatványozás

- Az eddig látott folyamatokban a kiértékelési (végrehajtási) lépések száma az adatok n számával lineárisan, ill. exponenciálisan nőtt. Most olyan példa következik, amelyben a lépések száma az n logaritmusával arányos.
- A b szám n-edik hatványának definícióját ugyancsak könnyű átrakni SML-be.

$$b^0 = 1$$
$$b^n = b \cdot b^{n-1}$$

```
fun expt (b, 0) = 1
  | expt (b, n) = b * expt(b, n-1)
```

- A létrejövő folyamat lineáris-rekurzív. $O(n)$ lépés és $O(n)$ méretű tár kell a végrehajtásához.
- A faktoriálisszámításhoz hasonlóan könnyű felírni lineáris-iteratív változatát.

```
fun expt (b, n) =
      let fun exptIter (0, product) = product
            | exptIter (counter, product) =
                              exptIter (counter-1, b * product)
      in
          exptIter(n, 1)
      end
```

- $O(n)$ lépés és $O(1)$ – azaz konstans – méretű tár kell a végrehajtásához.

Hatványozás (folyt.)

- Kevesebb lépés is elég, ha kihasználjuk az alábbi egyenlőségeket:

$b^0 = 1$

$b^n = (b^{n/2})^2$, ha n páros

$b^n = b \cdot b^{n-1}$, ha n páratlan

```
fun expt (b, n) =
  let fun exptFast 0 = 1
        | exptFast n =
            if even n
            then square(exptFast(n div 2))
            else b * exptFast(n-1)
      and even i = i mod 2 = 0
      and square x = x * x
  in  exptFast n  end
```

- A lépések száma és a tár mérete $O(\lg n)$-nel arányos. Konstans tárigényű iteratív változata:

```
fun expt (b, 0) = 1  (* Nem hagyható el! Miért nem? *)
  | expt (b, n) = let fun exptFast (1, r) = r
                        | exptFast (n, r) =
                            if even n then exptFast(n div 2, r*r)
                            else           exptFast(n-1, r*b)
                      and even i = i mod 2 = 0
                  in  exptFast(n, b)  end
```

LISTÁK

Adott számú elem egy lista elejéről és végéről (`take`, `drop`)

- Legyen $xs = [x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}]$, akkor `take(xs, i)` $= [x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}]$ és `drop(xs, i)` $= [x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}]$.
- `take` egy megvalósítása (jobbrekurzív-e? jobbrekurzívvá tehető-e? robosztus-e?)

```
(* take : 'a list * int -> 'a list
   take (xs, i) = ha i < 0, xs;, ha i >= 0,
                  az xs első i db eleméből álló lista *)
fun take (_, 0)     = []
  | take ([], _)    = []
  | take (x::xs, i) = x :: take(xs, i-1)
```

- `drop` egy megvalósítása (jobbrekurzív-e? jobbrekurzívvá tehető-e? robosztus-e?)

```
(* drop : 'a list * int -> 'a list
   drop(xs, i) = ha i < 0, xs; ha i >= 0,
                 az xs első i db elemének eldobásával előálló lista *)
fun drop ([], _)    = []
  | drop (x::xs, i) = if i > 0 then drop (xs, i-1) else x::xs
```

- Könyvtári változatuk – `List.take`, ill. `List.drop` – ha az `xs` listára alkalmazzuk, $i < 0$ vagy $i >$ `length xs` esetén `Subscript` néven kivételt jelez.

Lista redukciója kétoperandusú művelettel

Idézzük föl az egészlista maximális értékét megkereső `maxl` függvény két változatát:

- `maxl` jobbról balra egyszerűsítő (nem jobbrekurzív) változata

```
(* maxl : int list -> int
   maxl ns = az ns egészlista legnagyobb eleme
*)
fun maxl [] = raise Empty
  | maxl [n] = n
  | maxl (n::ns) = Int.max(n, maxl ns)
```

- `maxl` balról jobbra egyszerűsítő (jobbrekurzív) változata:

```
(* maxl' : int list -> int
   maxl' ns = az ns egészlista legnagyobb eleme
*)
fun maxl' [] = raise Empty
  | maxl' [n] = n
  | maxl' (n::m::ns) = maxl'(Int.max(n,m)::ns)
```

- Amint ez a példa is mutatja, vissza-visszatérő feladat egy lista redukciója kétoperandusú művelettel.
- Közös bennük, hogy n db értékből egyetlen értéket kell előállítani, ezért is beszélünk *redukcióról*.

Lista redukciója kétoperandusú művelettel (`foldr`, `foldl`)

- `foldr` jobbról balra, `foldl` balról jobbra haladva egy kétoperandusú műveletet (pontosabban egy *párra alkalmazható*, *prefix* pozíciójú *függvényt*) alkalmaz egy listára. Példák szorzat és összeg kiszámítására:

```
foldr op* 1.0 [] = 1.0;                          foldl op+ 0 [] = 0;
foldr op* 1.0 [4.0] = 4.0;                       foldl op+ 0 [4] = 4;
foldr op* 1.0 [1.0, 2.0, 3.0, 4.0] = 24.0;       foldl op+ 0 [1, 2, 3, 4] = 10;
```

- Jelöljön $\oplus$ tetszőleges kétoperandusú infix operátort. Akkor

```
foldr op⊕ e [x1, x2, ..., xn] = (x1 ⊕ (x2 ⊕ ... ⊕ (xn ⊕ e) ...))
foldr op⊕ e [] = e
foldl op⊕ e [x1, x2, ..., xn] = (xn ⊕ ... ⊕ (x2 ⊕ (x1 ⊕ e)) ...)
foldl op⊕ e [] = e
```

- A $\oplus$ művelet `e` operandusa néhány gyakori műveletben – összeadás, szorzás, konjunkció (logikai „és”), alternáció (logikai „vagy”) – a (jobb oldali) *egységelem* szerepét tölti be.
- Asszociatív műveleteknél `foldr` és `foldl` eredménye azonos.

Példák `foldr` és `foldl` alkalmazására

- `isum` egy egészlista elemeinek összegét, `rprod` egy valóslista elemeinek szorzatát adja eredményül.

```
val isum = foldr op+ 0;          val rprod = foldr op+ 1.0;
val isum = foldl op+ 0;          val rprod = foldl op+ 1.0;
```

- A `length` függvény is definiálható `foldl`-lel vagy `foldr`-rel. Kétoperandusú műveletként olyan segédfüggvényt (`inc`) alkalmazunk, amelyik *nem használja* az első paraméterét.

```
(* inc : 'a * int -> int
   inc (_, n) = n + 1 *)
fun inc (_, n) = n + 1;

(* lengthl, lengthr : 'a list -> int *)
val lengthl = fn ls => foldl inc 0 ls;
fun lengthr ls = foldr inc 0 ls;

lengthl (explode "tengertanc");
lengthr (explode "hajdu sogor");
```

Lista: `foldr` és `foldl` definíciója

- `foldr op⊕ e [x1, x2, ..., xn] = (x1 ⊕ (x2 ⊕ ... ⊕ (xn ⊕ e) ...))`
  `foldr op⊕ e [] = e`

```
(* foldr f e xs = az xs elemeire jobbról balra haladva
                  alkalmazott, kétoperandusú, e egységelemű
                  f művelet eredménye
   foldr : ('a * 'b -> 'b) -> 'b -> 'a list -> 'b *)
fun foldr f e (x::xs) = f(x, foldr f e xs)
  | foldr f e [] = e;
```

- `foldl op⊕ e [x1, x2, ..., xn] = (xn ⊕ ... ⊕ (x2 ⊕ (x1 ⊕ e)) ...)`
  `foldl op⊕ e [] = e`

```
(* foldl f e xs = az xs elemeire balról jobbra haladva
                  alkalmazott, kétoperandusú, e egységelemű
                  f művelet eredménye
   foldl : ('a * 'b -> 'b) -> 'b -> 'a list -> 'b *)
fun foldl f e (x::xs) = foldl f (f(x, e)) xs
  | foldl f e [] = e;
```

További példák `foldr` és `foldl` alkalmazására

- Egy lista elemeit egy másik lista elé fűzi `foldr` és `foldl`, ha kétoperandusú műveletként a *cons* konstruktorfüggvényt – azaz az `op::`-ot – alkalmazzuk.

  `foldr op:: ys [`x_1`, `x_2`, `x_3`] = (`x_1` :: (`x_2` :: (`x_3` :: ys)))`

  `foldl op:: ys [`x_1`, `x_2`, `x_3`] = (`x_3` :: (`x_2` :: (`x_1` :: ys)))`

- A `::` nem asszociatív, ezért `foldl` és `foldr` eredménye különböző!

```
(* append : 'a list -> 'a list -> 'a list
   append xs ys = az xs ys elé fűzésével előálló lista *)
fun append xs ys = foldr op:: ys xs;

(* revApp : 'a list -> 'a list -> 'a list
   revApp xs ys = a megfordított xs ys elé fűzésével
                  előálló lista *)
fun revApp xs ys = foldl op:: ys xs;
```

`append [1, 2, 3] [4, 5, 6] = [1, 2, 3, 4, 5, 6];` (vö. Prolog: `append`)

`revApp [1, 2, 3] [4, 5, 6] = [3, 2, 1, 4, 5, 6];` (vö. Prolog: `revapp`)

További példák `foldr` és `foldl` alkalmazására

- `maxl` két megvalósítása

```
(* maxl : ('a * 'a -> 'a) -> 'a list -> 'a
   maxl max ns = az ns lista max szerinti legnagyobb eleme
*)

(* nem jobbrekurzív *)

fun maxl max []      = raise Empty
  | maxl max (n::ns) = foldr max n ns

(* jobbrekurzív *)

fun maxl' max []      = raise Empty
  | maxl' max (n::ns) = foldl max n ns
```

Példák listák használatára: futamok előállítása

A futam olyan elemekből álló lista, amelynek szomszédos elemei kielégítenek egy predikátumot. Írjon olyan SML függvényt `futamok` néven, amelynek egy lista futamaiból álló lista az eredménye.

- Első változat: futam és maradék előállítása két függvénnyel

```
(* futam : ('a * 'a -> bool)  -> ('a * 'a list) -> 'a list
   futam p (x, ys) = az x::ys p-t kielégítő első futama (prefixuma) *)
fun futam p (x, [])    = [x]
  | futam p (x, y::ys) = if p(x, y) then x :: futam p (y, ys) else [x]

(* maradek : ('a * 'a -> bool) ->  ('a * 'a list) -> 'a list
   maradek p (x, ys) = az x::ys p-t kielegítő futama utáni maradéka *)
fun maradek p (x, [])           = []
  | maradek p (x, yys as y::ys) = if p(x ,y) then maradek p (y, ys) else yys

(* futamok1 : ('a * 'a -> bool) -> 'a list -> 'a list list
   futamok1 p xs = az xs p-t kielégítő futamaiból álló lista *)
fun futamok1 p []      = []
  | futamok1 p (x::xs) =
      let val fs = futam p (x, xs)
          val ms = maradek p (x, xs)
      in
          if null ms then [fs] else fs :: futamok1 p ms
      end
```

Példák listák használatára: futamok előállítása (folyt.)

- Példák:

```
futam   op<= (1, [9,19,3,4,24,34,4,11,45,66,13,45,66,99]);
maradek  op<= (1, [9,19,3,4,24,34,4,11,45,66,13,45,66,99]);
futamok1 op<= [1,9,19,3,4,24,34,4,11,45,66,13,45,66,99];
futamok1 op<= [99,1];
futamok1 op<= [99];
futamok1 op<= [];
```

- Hatékonyságot rontó tényezők
  1. `futamok1` kétszer megy végig a listán: először `futam`, azután `maradek`,
  2. `p`-t paraméterként adjuk át `futam`-nak és `maradek`-nak,
  3. egyik függvény sem használ akkumulátort.
- Javítási lehetőség
  1. `futam` egy párt adjon eredményül, ennek első tagja legyen a futam, második tagja pedig a maradék; a futam elemeinek gyűjtésére használjunk akkumulátort,
  2. `futam` legyen lokális `futamok2`-n belül,
  3. az `if null ms then [fs] else` szövegrész törölhető: a rekurzió egy hívással később mindenképpen leáll.

Példák listák használatára: futamok előállítása (folyt.)

- Második változat: futam és maradék előállítása egy lokális függvénnyel

```
(* futamok2 : ('a * 'a -> bool) -> 'a list -> 'a list list
   futamok2 p xs = az xs p-t kielégítő futamaiból álló lista
*)
fun futamok2 p []      = []
  | futamok2 p (x::xs) =
      let (* futam : ('a * 'a list) -> 'a list * 'a list
             futam (x, ys) zs = olyan pár, amelynek első tagja az x::ys p-t
                                kielégítő első futama (prefixuma) a zs elé
                                fűzve, második tagja pedig az x::ys maradéka
          *)
          fun futam (x, []) zs           = (rev(x::zs), [])
            | futam (x, yys as y::ys) zs = if p(x, y)
                                           then futam (y, ys) (x::zs)
                                         else (rev(x::zs), yys);
          val (fs, ms) = futam (x, xs) []
      in
          fs :: futamok2 p ms
      end
```

Példák listák használatára: futamok előállítása (folyt.)

- Harmadik változat: az egyes futamokat és a futamok listáját is gyűjtjük

```
(* futamok3 : ('a * 'a -> bool) -> 'a list -> 'a list list
   futamok3 p xs = az xs p-t kielégítő futamaiból álló lista
*)
fun futamok3 p []      = []
  | futamok3 p (x::xs) =
      let (* futamok : ('a * 'a list) -> 'a list -> 'a list * 'a list
             futamok (x, ys) zs zss = az x::ys p-t kielégítő futamaiból álló
                                      lista zss elé fűzve
          *)
          fun futamok (x, []) zs zss           = rev(rev(x::zs)::zss)
            | futamok (x, yys as y::ys) zs zss =
                if p(x, y)
                    then futamok (y, ys) (x::zs) zss
                else futamok (y, ys) [] (rev(x::zs)::zss)
      in
          futamok (x, xs) [] []
      end
```

Nagyzárthelyi feladatsorainak megbeszélése

A 7. előadáson 2004. november 2-án az október 28-ai nagyzárthelyi feladatainak megoldását beszéltük meg.

A javítási útmutató a tárgy honlapján <http://dp.iit.bme.hu/dp04a> található meg.