# BINÁRIS FÁK

# Egyszerű műveletek bináris fákon (folyt.)

- `fulltree` $n$ mélységű *teljes bináris fát* épít, és a fa csomópontjait $1$-től $2^n - 1$-ig beszámozza. Egy teljes bináris fában minden csomópontból pontosan két él indul ki, és minden levelének ugyanaz a szintje.

```
(* fulltree : int -> 'a tree
   fulltree n = n mélységű teljes fa *)
fun fulltree n =
      let fun ftree (_, 0) = L
            | ftree (k, n) = N(k, ftree(2*k, n-1), ftree(2*k+1, n-1))
      in
          ftree(1, n)
      end
```

- `reflect` a fát a függőleges tengelye mentén tükrözi.

```
(* reflect : 'a tree -> 'a tree
   reflect t = a függőleges tengelye mentén tükrözött t fa *)
fun reflect L = L
  | reflect (N(v,t1,t2)) = N(v, reflect t2, reflect t1)
```

# Lista előállítása bináris fa elemeiből

- Mindhárom függvény *bináris fából listát* állít elő. Abban különböznek egymástól, hogy a csomópontokban tárolt értékeket mikor veszik ki, és milyen sorrendben járják be a részfákat:
  - `preorder` először az értéket veszi ki, majd bejárja a bal, és azután a jobb részfát;
  - `inorder` először bejárja a bal részfát, majd kiveszi az értéket, végül bejárja a jobb részfát;
  - `postorder` először bejárja a bal, majd a jobb részfát, és utoljára veszi ki az értéket.
- Az akkumulátort nem használó változatok egyszerűek, érthetőek, de nem elég hatékonyak a @ operátor használata miatt.

```
(* preorder : 'a tree -> 'a list
   preorder f = az f fa elemeinek preorder sorrendű listája *)
fun preorder L = []
  | preorder (N(v,t1,t2)) = v :: preorder t1 @ preorder t2
(* inorder : 'a tree -> 'a list
   inorder f = az f fa elemeinek inorder sorrendű listája *)
fun inorder L = []
  | inorder (N(v,t1,t2)) = inorder t1 @ (v :: inorder t2)
(* postorder : 'a tree -> 'a list
   postorder f = az f fa elemeinek postorder sorrendű listája *)
fun postorder L = []
  | postorder (N(v,t1,t2)) = postorder t1 @ (postorder t2 @ [v])
```

# Lista előállítása bináris fa elemeiből (folyt.)

- Ha `inorder` előző változatában az `inorder t1 @ (v :: inorder t2)` kifejezésben a `v :: inorder t2` részkifejezést nem tesszük zárójelbe, a fordító hibát jelez, mivel `::` és `@` azonos precedenciájú, és ezért zárójelek nélkül a nyilvánvalóan hibás `inorder t1 @ v` részkifejezést akarná kiértékelni.
- `inorder` előző megvalósításával kb. egyenértékű a következő változata, amelyben a `v` elem helyett az egyelemű `[v]` listát fűzzük `inorder t2` elé:

```
fun inorder L = []
  | inorder (N(v,t1,t2)) = inorder t1 @ ([v] @ inorder t2)
```

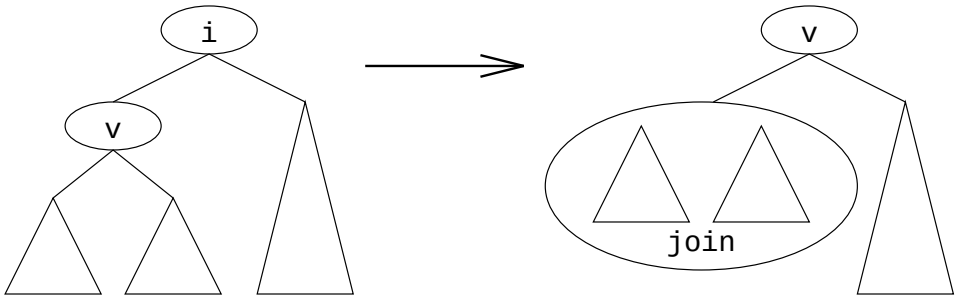
  Ez a változat azonban *roppant sérülékeny*, ugyanis a hatékonysága függ a zárójelek kirakásától. Ha a `[v] @ inorder t2` részkifejezést nem tesszük zárójelbe, akkor a fordító először a `inorder t1 @ [v]` részkifejezést fogja kiértékelni, azaz egy egyelemű listához fűz egy (általában) jóval hosszabbat!
- Az elmondottakhoz hasonló okból `postorder` bemutatott változata is *rendkívül sérülékeny!* Ha ugyanis a `postorder t1 @ (postorder t2 @ [v])` kifejezésben az amúgyis rossz hatékonyságú `postorder t2 @ [v]` részkifejezést nem tesszük zárójelbe, akkor a fordító először a `postorder t1 @ postorder t2` részkifejezést értékeli ki, azaz a két, feltehetően hosszú listát fűzi egybe, majd a létrehozott eredménylistát fűzi az egyelemű listához!

# Lista előállítása bináris fa elemeiből (folyt.)

Az akkumulátort használó változatok nehezebben érthetőek meg, de *hatékonyabbak*, elsősorban a veremhasználat szempontjából.

```
(* preord : 'a tree * 'a list -> 'a list
   preord(f, vs) = az f fa elemeinek a vs lista elé fűzött,
                   preorder sorrendű listája *)
fun preord (L, vs) = vs
  | preord (N(v,t1,t2), vs) = v::preord(t1, preord(t2,vs))

(* inord : 'a tree * 'a list -> 'a list
   inord(f, vs) = az f fa elemeinek a vs lista elé fűzött,
                  inorder sorrendű listája *)
fun inord (N(v,t1,t2), vs) = inord(t1, v::inord(t2,vs))
  | inord (L, vs) = vs

(* postord : 'a tree * 'a list -> 'a list
   postord(f, vs) = az f fa elemeinek a vs lista elé fűzött,
                    postorder sorrendű listája *)
fun postord (N(v,t1,t2), vs) = postord(t1, postord(t2, v::vs))
  | postord (L, vs) = vs
```

# Bináris fa előállítása lista elemeiből: `balPreorder`

- Listát *kiegyensúlyozott* (**bal**anced) *bináris fává* alakítanak a következő függvények: `balPreorder`, `balInorder` és `balPostorder`; a különbség közöttük most is a bejárási sorrendben van.
- ```
  (* balPreorder: 'a list -> 'a tree
     balPreorder xs = az xs lista elemeiből álló, preorder
                      bejárású, kiegyensúlyozott fa
  *)
  fun balPreorder [] = L
    | balPreorder (x::xs) =
        let val k = length xs div 2
        in
           N(x, balPreorder(List.take(xs, k)),
                balPreorder(List.drop(xs, k)))
        end
  ```
- A hatékonyságot kisebb mértékben rontja, hogy `List.take` és `List.drop` egymástól függetlenül *kétszer* mennek végig a lista első felén.
  ```

# take és drop egyetlen függvénnyel: take'ndrop

- Írjunk take'ndrop néven olyan függvényt, amelynek egy xs listából és egy k egészből álló pár az argumentuma, és egy olyan pár az eredménye, amelynek első tagja a lista első k db eleme, második tagja pedig a lista többi eleme.

```
(* take'ndrop : 'a list * int -> 'a list * 'a list
   take'ndrop(xs, k) = olyan pár, amelynek
                       első tagja xs első k db eleme,
                       második tagja pedig xs maradéka
*)
fun take'ndrop (xs, k) =
      let fun td (xs, 0, ts) = (rev ts, xs)
            | td ([], _, ts) = (rev ts, [])
            | td (x::xs, k, ts) = td(xs, k-1, x::ts)
      in
          td(xs, k, [])
      end
```

- take'ndrop felhasználása, nevezetesen az eredményül átadott pár miatt módosítani kell balpreorder felépítésén.

# Bináris fa előállítása lista elemeiből: `balPreorder`, újra

- Ez volt:

```
fun balPreorder [] = L
  | balPreorder (x::xs) =
      let val k = length xs div 2
      in  N(x, balPreorder(List.take(xs, k)),
               balPreorder(List.drop(xs, k)))
      end
```

- Ez lett:

```
(* balPreorder: 'a list -> 'a tree
    balPreorder xs = az xs lista elemeiből álló, preorder ... *)
fun balPreorder [] = L
  | balPreorder (x::xs) =
      let val k = length xs div 2
          val (ts, ds) = take'ndrop(xs, k)
      in  N(x, balPreorder ts, balPreorder ds)
      end
```

# Bináris fa előállítása lista elemeiből

```
(* balInorder: 'a list -> 'a tree
   balInorder xs = az xs lista elemeiből álló, inorder bejárású,
                   kiegyensúlyozott fa
*)
fun balInorder [] = L
  | balInorder (xxs as x::xs) =
      let val k = length xxs div 2
          val ys = List.drop(xxs, k)
      in
          N(hd ys, balInorder(List.take(xxs, k)),
                   balInorder(tl ys))
      end
```

```
(* balPostorder: 'a list -> 'a tree
   balPostorder xs = az xs lista elemeiből álló, postorder
                     bejárású, kiegyensúlyozott fa
*)
fun balPostorder xs = balPreorder(rev xs)
```

- `balInorder` `take'ndrop`-pal való definiálását meghagyjuk gyakorló feladatnak.

# Elem törlése bináris fából

- Adott értékű *elemet* rekurzív módszerrel *megkeresni* egyszerű feladat.
- *Új elemet beszúrni* sem nehéz: rekurzív módszerrel keresünk egy levelet, és ennek a helyére berakjuk az új értéket. Ha a fa rendezve van, ügyelnünk kell arra, hogy a rendezettség megmaradjon.
- Adott értékű *elemet* vagy *elemeket* rekurzív módszerrel *kitörölni* valamivel nehezebb: ha a törlendő érték az éppen vizsgált részfa gyökerében van, a két részre széteső fa részfáit *egyesíteni* kell, miután a törlést a két részfán már végrehajtottuk.




- Megtehetjük, hogy előbb egyesítjük a két részfát, majd az eredményül kapott fából töröljük az adott értékű elemet.

# Elem rekurzív törlése bináris fából (folyt.)

- A `join`-nal egyesítjük a törlés hatására létrejövő két részfát: a bal részfát lebontja, és közben az elemeit egyesével berakja a jobb részfába.

```
(* join : 'a tree * 'a tree -> 'a tree
   join(b, j) = a b és a j fák egyesítésével létrehozott fa *)
fun join (L, tr) = tr
  | join (N(v, lt, rt), tr) = N(v, join(lt, rt), tr)
```

- A `remove` rendezetlen bináris fából törli az `i` értékű elem *összes* előfordulását.

```
(* remove : 'a * 'a tree -> 'a tree
   remove(i, f) = i összes előfordulását törli f-ből *)
fun remove (i, L) = L
  | remove (i, N(v,lt,rt)) =
      if i<>v
      then N(v, remove(i,lt), remove(i,rt))
      else join(remove(i,lt), remove(i,rt))
```

# Bináris keresőfák: `blookup`, `binsert`

- Rendszerint adott kulcsú elemet keresünk egy rendezett bináris fában, ehhez értékeket kell összehasonlítanunk egymással, ehhez a keresett kulcsnak *egyenlőségi típusúnak* kell lennie (a példában a `string` típust használjuk).
- A függvények *kivételt* jeleznek, ha a keresett kulcsú elem nincs a keresőfában: `exception Bsearch of string`.
- A `blookup` függvény adott kulcshoz tartozó értéket ad vissza:

```
(* blookup : (string * 'a) tree * string -> 'a
   blookup(f, b) = az f fában a b kulcshoz tartozó érték
*)
fun blookup (L, b) = raise Bsearch("LOOKUP: " ^ b)
  | blookup (N((a,x), t1, t2), b) =
      if b < a      then blookup(t1,b)
      else if a < b then blookup(t2, b)
      else x
```

# Bináris keresőfák: `bupdate`

- A `binsert` függvény egy új kulcsú elemet rak be egy rendezett bináris fába, ha még nincs benne:

```
(* binsert : (string * 'a) tree * (string * 'a) -> (string * 'a) tree
   binsert(f, (b,y)) = az új (b,y) kulcs-érték párral bővített f fa *)
fun binsert (L, (b,y)) = N((b,y), L, L)
  | binsert (N((a, x), t1, t2), (b,y)) =
      if b < a      then N((a, x), binsert(t1, (b,y)), t2)
      else if a < b then N((a, x), t1, binsert(t2, (b,y)))
      else (* a=b *) raise Bsearch("INSERT: " ^ b)
```

- A `bupdate` függvény meglévő kulcsú elembe új értéket ír be egy rendezett bináris fában:

```
(* bupdate : (string * 'a) tree * (string * 'a) -> (string * 'a) tree
   bupdate(f, (b,y)) = az f fa, a b kulcshoz tartozó érték helyén
                       az y értékkel *)
fun bupdate (L, (b,y)) = raise Bsearch("UPDATE: " ^ b)
  | bupdate (N((a,x), t1, t2), (b,y)) =
      if b < a      then N((a,x), bupdate(t1, (b,y)), t2)
      else if a < b then N((a,x), t1, bupdate(t2, (b,y)))
      else (* a=b *) N((b,y), t1, t2)
```

- A függvények *generikussá* tételét meghagyjuk gyakorló feladatnak.

# KIVÉTELKEZELÉS

# Kivételkezelés

- Kivételt az `exception` kulcsszóval deklarálunk, a `raise` kulcsszóval jelzünk, a `handle` kulcsszóval bevezetett kifejezésben kezelünk.
- A kivételt általában hibák jelzésére használjuk, de használhatjuk visszalépés kezelésére is (az utóbbira példa a `valtas` függvényben látható a következő fóliák egyikén).
- A kivételdeklaráció az adattípus-deklarációra (`datatype`-deklarációra) emlékeztet: `exception` *`name`*`; exception` *`name`* `of` *`ty`*.
- Példák kivétel deklarálására: `exception Valt; exception Hiba of char * int`.
- A kivételkonstruktor állandó vagy függvény lehet. Példák: `Valt : exn`, `Hiba : char * int -> exn`.
- A kivételdeklaráció speciális adattípus-deklaráció, ui. az utóbbival ellentétben dinamikusan *bővíti* a kivételkonstruktorok halmazát.
- Kivétel jelzésére a `raise` kulcsszóval kezdődő speciális kifejezést kell használunk.
- Példák kivétel jelzésére: `raise Valt`, `raise Hiba(#"N", 4)`.
- `raise` (hipotetikus) típusa: `exn -> 'a`.

# Kivételkezelés (folyt.)

- `raise` alkalmazásának eredménye az ún. *kivételcsomag*. Mivel a kivételcsomag polimorf típusú, bármely más típussal kompatíbilis.
- A kivétel kezelése a `case`-szerkezetre emlékeztet: `E handle P1 => E1 | ··· | Pn => En`
- Ha `E` „közönséges” értéket ad eredményül, a kivételkezelő egyszerűen továbbadja az eredményt.
- Ha `E` eredménye *kivételcsomag*, az SML megpróbálja illeszteni a `P1, ···, Pn` mintákra.
  - Ha `Pi` (`1 <= i <= n`) az első illeszkedő minta, akkor `Ei` a kivételkezelő eredménye.
  - Ha egyetlen minta sem illeszkedik a kivételcsomagra, a kivételkezelő továbbpasszolja.
- Példák kivétel kezelésére:
  - ```
    erme :: valtas (erme::ermelista) (osszeg-erme)
                handle Valt => valtas ermelista osszeg
    ```
  - `(fn i => kivKez i handle Hiba(c, i) => (print(str c); i-1)) 0`
- `handle` (hipotetikus) típusa: `exn -> 'a`.
- Legyen `Ex` `exn` típusú kivétel, `e` pedig tetszőleges kifejezés; ekkor az `e handle Ex => c` (kivételkezelőt tartalmazó) kifejezésben `c`-nek `e`-vel azonos típusúnak kell lennie.
    ```

# Kivételkezelés (folyt.)

- A következő programrészlet példa kivétel deklarálására, jelzésére és kezelésére

```
exception Hiba of char * int;

fun kivKez  0 = raise Hiba(#"N", 4)
  | kivKez ~9 = raise Hiba(#"M", 9)
  | kivKez  n = n;

fun kivKezel i =
        kivKez i handle Hiba(#"N", i) => (print "N"; i)
                      | Hiba(#"M", i) => (print "M"; i-1);

kivKezel 0  = 4;
kivKezel ~9 = 8;
kivKezel 7  = 7;
```

# Kivételkezelés (folyt.)

- Példa visszalépés programozására kivételkezeléssel

```
exception Valt;

(* valtas : int list -> int -> int list
   valtas ermelista osszeg = a lehető legkevesebb érmét tartalmazó olyan
                             érmelista, amely elemeinek összege osszeg
   PRE : ermelista = a váltásra használható érmék csökkenő értéksorrendben
         osszeg >= 0
*)
fun valtas _ 0  = []
  | valtas [] _ = raise Valt
  | valtas (erme::ermelista) osszeg =
      if (* ha az adott érme túl nagy, a következővel próbálkozunk *)
         erme > osszeg then valtas ermelista osszeg
         (* ha az adott érmétől kezdve sikerül felváltani, az jó;
            ha nem, a következő érmével kezdjük újra az adott ponttól *)
      else erme :: valtas (erme::ermelista) (osszeg-erme)
                                  handle Valt => valtas ermelista osszeg;

valtas [50, 20, 10, 5, 2] 197 = [50, 50, 50, 20, 20, 5, 2];
```

# Kivételkezelés (folyt.)

- A leggyakoribb belső kivételek

| *Név* | *Művelet, amely a kivételt kiválthatja* |
|---|---|
| `Bind` | Értékdeklarációban a jobb oldali kifejezés nem illeszkedik a bal oldali mintára. |
| `Chr` | `chr pred succ` |
| `Div` | `/ div mod` |
| `Domain` | Az érték kilóg az értelmezési tartományból. |
| `Empty` | `hd tl last` |
| `Fail` | `compile load loadOne  Fail : string -> exn` |
| `Interrupt` | Megszakítás ctrl/c-vel. |
| `Io` | Ki/beviteli hiba. `Io : {cause : exn, function : string, name : string}` |
| `Match` | Mintaillesztési hiba `case` és `handle` kifejezésben, vagy függvényalkalmazásban. |
| `Option` | Hiba egy `Option` könyvtárbeli függvény alkalmazásakor. |
| `Overflow` | `~ + - * / div mod abs ceil floor round trunc` |
| `Size` | `^ array concat fromList implode tabulate translate vector` |
| `Subscript` | `copy drop extract nth sub substring take update` |

- `Fail` és `Io` kivételkonstruktorfüggvények, a többi `exn` típusú kivételkonstruktorállandó.
- `Option` csak `Option.Option` néven használható, ha nem nyitjuk meg az `Option` könyvtárat.

# VISSZALÉPÉSES PROGRAMOZÁS

# *n* vezér a sakktáblán

- Hányféleképpen rakható *n* vezér a sakktáblára úgy, hogy ne üssék egymást?
  - A vezéreket tartalmazó mezők sorának `j` sorszámát az egyes oszlopokon belül egy `n` hosszú sorvektor adott oszlophoz rendelt mezőjébe írt szám adja meg, ahol `j<=s< n`. Példa `n=4` esetén:

```
   +---+---+---+---+
   | 3 | 1 | 4 | 2 |
   +---+---+---+---+


     0   ---->  n-1
   +---+---+---+---+
 0 |   | q |   |   |
   +---+---+---+---+
 | |   |   |   | q |
 | +---+---+---+---+
 V | q |   |   |   |
   +---+---+---+---+
n-1|   |   | q |   |
   +---+---+---+---+
```

  - A sorvektort (egy egyre bővülő) listával valósítjuk meg. Egy listához balról könnyű új elemeket fűzni, ezért a táblát és a vezérek helyzetét leíró listát hossztengelye mentén tükrözzük.

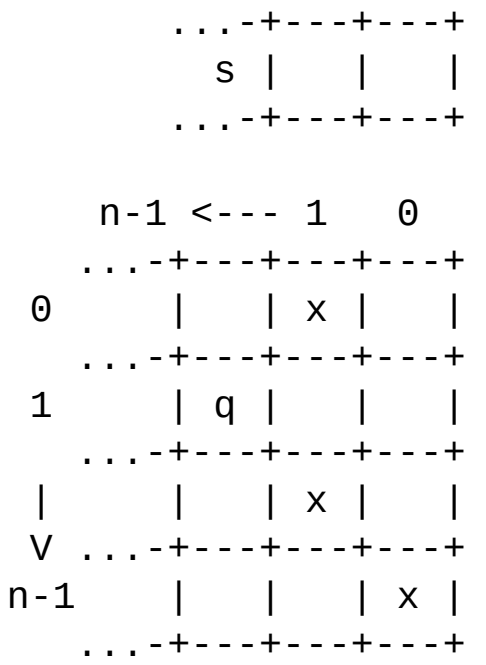
```
   ...-+---+---+---+
       | 4 | 1 | 3 |
   ...-+---+---+---+


    n-1  <----   0
   ...-+---+---+---+
 0     |   | q |   |
   ...-+---+---+---+
 |     |   |   |   |
 | ...-+---+---+---+
 V     |   |   | q |
   ...-+---+---+---+
n-1    | q |   |   |
   ...-+---+---+---+
```

# *n* vezér a sakktáblán (folyt.)

Azt, hogy az új vezért üti-e egy korábban a táblára rakott másik vezér, a sorvektor vizsgálatával dönthetjük el: a sorvektor azt adja meg, hogy a listaelem indexe által meghatározott oszlopban és a listaelem értéke által meghatározott sorban vezér van.

1. Az új vezér sorának sorszáma, azaz az új listalem értéke nem fordulhat elő a lista már felépített részében.
2. Az új vezér átlós irányban sem lehet egy vonalban más vezérrel a táblán. Ez azt jelenti, hogy ha a sorvektort jelentő lista elejére az `s` sorindexet akarjuk rakni, akkor az `i`-edik elemének az értéke, ha van ilyen eleme, nem lehet `s-(i+1)`, ill. `s+(i+1)`.
3. A következő példa segít megvilágítani az esetet.

Ha a `2`-es oszlopba és az `s=1`-es sorba akarjuk lerakni az új vezért, akkor az `x`-szel jelölt mezőket kell megvizsgálnunk. Az eddig létrehozott listának (sorvektornak) két eleme van, ahol a lista fejének az indexe 0. A listafej értéke nem lehet s-1, sem s+1. A lista rekurzív algoritmussal dolgozható fel.



# *n* vezér a sakktáblán: „ütésben van”-vizsgálat

```
(* utesbenVan : int list -> bool
   utesbenVan zs = igaz, ha a (hd zs) vezért legalább egy
                   (tl zs)-beli vezér üti
*)
fun utesbenVan [] = false
  | utesbenVan (z::zs) =
      let (* uV : int -> int -> int list -> bool
             uV s1 s2 rs = igaz, ha a z vezért s1, s2 vagy r, vagy
                    egy másik rs-beli vezér közül legalább egy üti
          *)
          fun uV _ _ [] = false
            | uV s1 s2 (r::rs) = z = r orelse
                                 s1 = r orelse
                                 s2 = r orelse
                                 uV (s1-1) (s2+1) rs
      in
          uV (z-1) (z+1) zs
      end
```

# *n* vezér a sakktáblán: egy megoldás előállítása

```
exception Zsakutca

(* vezerek0 : int -> int list
   vezerek0 n = a feladvány egy megoldása n vezér esetén
*)
fun vezerek0 n =
  let (* vez: int -> int list -> int list
         vez z zs: egy megoldás n vezér esetén
      *)
      fun vez z zs =
            if z = 0 andalso utesbenVan zs orelse z = n
            then raise Zsakutca
            else if length zs = n
            then rev zs
            else vez 0 (z::zs) handle Zsakutca => vez (z+1) zs
  in
      vez 0 []
  end
```

# *n* vezér a sakktáblán: több megoldás előállítása visszalépéssel

```
(* vezerek1 : int -> int list list
   vezerek1 n = a feladvány összes megoldásának listája
                n vezér esetén
*)
fun vezerek1 n =
  let (* vez: int -> int list -> int list list
         vez z zs: az összes megoldás listája n vezér esetén
      *)
      fun vez z zs =
            if z = 0 andalso utesbenVan zs orelse z = n
            then raise Zsakutca
            else if length zs = n
            then [rev zs]
            else (vez 0 (z::zs) handle Zsakutca => []) @
                 (vez (z+1) zs handle Zsakutca => [])
  in
      vez 0 []
  end
```

# *n* vezér a sakktáblán: több megoldás előállítása listák listájával

```
(* vezerek2 : int -> int list list
   vezerek2 n = a feladvány összes megoldásának listája
                n vezér esetén
*)
fun vezerek2 n =
  let (* vez: int -> int list -> int list list
         vez z zs: az összes megoldás listája n vezér esetén
      *)
      fun vez z zs =
            if z = 0 andalso utesbenVan zs orelse z = n
            then []
            else if length zs = n
            then [rev zs]
            else vez 0 (z::zs) @ vez (z+1) zs
  in
      vez 0 []
  end
```

# *n* vezér a sakktáblán: több megoldás előállítása listák listájával (folyt.)

Akkumulátor alkalmazásával:

```
(* vezerek3 : int -> int list list
   vezerek3 n = a feladvány összes megoldásának listája
                n vezér esetén
*)
fun vezerek3 n =
  let (* vez: int -> int list -> int list list -> int list list
         vez z zs: az összes megoldás listája n vezér esetén
      *)
      fun vez z zs zss =
            if z = 0 andalso utesbenVan zs orelse z = n
            then zss
            else if length zs = n
            then rev zs :: zss
            else vez 0 (z::zs) (vez (z+1) zs zss)
  in
     vez 0 [] []
  end
```

# HALMAZMŰVELETEK

# Halmazműveletek: „benne van-e?” (`isMem`) és „ha új, tedd bele” (`newMem`)

- `isMem` igaz értéket ad eredményül, ha a keresett elem benne van a listában.

```
(* isMem : ''a * ''a list -> bool
   isMem(x, ys) = x eleme-e ys-nek
*)
fun isMem (_, []) = false
  | isMem (x, y::ys) = x = y orelse isMem(x, ys)

infix isMem
```

- `newMem` egy új elemet rak be egy listába, ha még nincs benne.

```
(* newMem : ''a * ''a list -> ''a list
   newMem(x, xs) = [x] és xs listaként ábrázolt uniója
*)
fun newMem (x, xs) = if x isMem xs
                     then xs
                     else x::xs
```

`newMem`, ha a sorrendtől eltekintünk, halmazt hoz létre.

# Halmazműveletek: „listából halmaz” (`setof`)

- `setof` halmazt készít egy listából úgy, hogy kiszedi belőle az ismétlődő elemeket. Rossz hatékonyságú.

```
(* setof : ''a list -> ''a list
   setof xs = xs elemeinek listaként ábrázolt halmaza
*)
fun setof []      = []
  | setof (x::xs) = newMem(x, setof xs)
```

- Öt halmazműveletet definiálunk:
  - unió (`union`, $S \cup T$),
  - metszet (`inter`, $S \cap T$),
  - részhalmaza-e (`isSubset`, $T \subseteq S$),
  - egyenlők-e (`isSetEq`, $S = T$),
  - hatványhalmaz (`powerSet`, $pS$).

# Halmazműveletek: „unió” (union) és „metszet” (inter)

- Listaként kezeljük a halmazokat, később hatékonyabb ábrázolást választhatunk, pl. rendezett listát vagy bináris fát.
- Két halmaz uniója

```
(* union : ''a list * ''a list -> ''a list
   union(xs, ys) = az xs és ys elemeiből álló halmazok uniója
*)
fun union ([], ys)    = ys
  | union (x::xs, ys) = newMem(x, union(xs, ys))
```

- Két halmaz metszete

```
(* inter : ''a list * ''a list -> ''a list
   inter(xs, ys) = az xs és ys elemeiből álló halmazok metszete
*)
fun inter ([], _)     = []
  | inter (x::xs, ys) = let val zs = inter(xs, ys)
                        in
                           if x isMem ys then x::zs else zs
                        end
```

# Halmazműveletek: „részhalmaza-e” (`isSubset`) és „egyenlők-e” (`isSetEq`)

- Részhalmaza-e egy halmaz egy másiknak?

```
(* isSubset : ''a list * ''a list -> bool
   isSubset (xs, ys) = az xs elemeiből álló halmaz részhalmaza-e
                       az ys elemeiből álló halmaznak
*)
fun isSubset ([], _)      = true
  | isSubset (x::xs, ys) = (x isMem ys) andalso isSubset(xs, ys)

infix isSubset
```

- Két halmaz egyenlősége (a listák egyenlőségvizsgálata beépített művelet az SML-ben, halmazokra mégsem használható, mert pl. `[3, 4]` és `[4, 3]` listaként ugyan különböznek, de halmazként egyenlők)

```
(* isSetEq : ''a list * ''a list -> bool
   isSetEq(xs, ys) = az xs elemeiből álló halmaz egyenlő-e
                     az ys elemeiből álló halmazzal
*)
fun isSetEq (xs, ys) = (xs isSubset ys) andalso (ys isSubset xs)
```

# Halmazműveletek: „halmaz hatványhalmaza” (`powerSet`)

*A hatványhalmaz megvalósítása SML-ben ezen és a következő két fólián csak olvasmány haladóknak, nem vizsgaanyag.*

- Az $S$ halmaz hatványhalmaza *összes* részhalmazának a halmaza, az $S$-t és a $\{\}$-t is beleértve.
- $S$ hatványhalmaza úgy állítható elő, hogy kivesszük $S$-ből az $x$ elemet, majd *rekurzív módon* előállítjuk az $S - \{x\}$ hatványhalmazát.
- Ha tetszőleges $T$ halmazra $T \subseteq S - \{x\}$, akkor $T \subseteq S$ és $T \cup \{x\} \subseteq S$, így mind $T$, mind $T \cup \{x\}$ eleme $S$ hatványhalmazának.
- Miközben a fenti elvet rekurzív módon alkalmazzuk, tehát fölsoroltatjuk az $S - \{x\}$ stb. részhalmazait, gyűjtjük a *már kiválasztott* elemeket. Egy-egy rekurzív lépésben a gyűjtő vagy változatlan ($T$), vagy kiegészül az $x$ elemmel ($T \cup \{x\}$).
- A `pws` függvényben a `base` argumentumban gyűjtjük a halmaz *már kiválasztott* elemeit; kezdetben üres.
- pws(xs, base) = $\{S \cup$ `base` $\mid S \subseteq$ `xs`$\}$, azaz `xs` $\cup$ `base` azon részhalmazainak a listája, amelyek teljes egészében tartalmazzák a base halmazt.

# Halmazműveletek: „halmaz hatványhalmaza” (folyt.)

- Ezzel a `pws` függvény:

```
(* pws : 'a list * 'a list -> 'a list list
   pws(xs, base) = mindazon halmazok listája, amelyek előállnak xs egy
                   részhalmazának és a base halmaznak az uniójaként
*)
fun pws ([], base) = [base]
  | pws (x::xs, base) = pws(xs, base) @ pws(xs, x::base)
```

- `pws(xs, base)` valósítja meg az $S - \{x\}$ rekurzív hívást (hiszen `x::xs` felel meg $S$-nek), azaz állítja elő az összes olyan halmazt, amelyekben `x` nincs benne.
- `pws(xs, x::base)` rekurzív módon `base`-ben gyűjti az `x` elemeket, vagyis előállítja az összes olyan halmazt, amelyben `x` benne van.
- `powerSet`-nek már csak megfelelő módon hívnia kell `pws`-t:

```
(* powerSet : 'a list -> 'a list list
   powerSet xs = az xs halmaz hatványhalmaza
*)
fun powerSet xs = pws(xs, [])
```

# Halmazműveletek: „halmaz hatványhalmaza”, hatékonyabban

- `pws` rossz hatékonyságú, mert kétfelé ágazó rekurziót használ. Pl. egy 19 egész számból álló lista hatványhalmazának előállítását nem lehet kivárni. Írjunk hatékonyabb változatot.
- Az `insAll` segédfüggvény egy elemet szúr be egy listákból álló lista minden eleme elé.

```
(* insAll : 'a * 'a list list * 'a list list -> 'a list list
   insAll(x, yss, zss) = az yss lista ys elemeinek zss elé fűzött
                         listája, amelyben minden ys elem elé x van beszúrva *)
fun insAll (x, [], zss) = zss
  | insAll (x, ys::yss, zss) = insAll(x, yss, (x::ys)::zss)
```

- `powerSet` `insAll`-t használó rekurzív változata

```
fun powerSet [] = [[]]
  | powerSet (x::xs) = let val pws = powerSet xs
                       in  pws @ insAll(x, pws, [])
                       end
```

- `powerSet` `insAll`-t használó iteratív változata

```
fun powerSet [] = [[]]
  | powerSet (x::xs) = let val pws = powerSet xs
                       in insAll(x, pws, pws)
                       end
```

# EGYIDEJŰ DEKLARÁCIÓ

# Egyidejű deklaráció

- Típusok, ill. értékek *egyidejűleg* is deklarálhatók az `and` kulcsszó alkalmazásával.
- Vegyük a következő deklarációsorozatokat:

```
type sor = int; type osz = int;
datatype fa = L | B of fa * fa;
    datatype 'a verem = >| | >> of 'a * 'a verem;
val v1 = "a"; val v2 = "z";
fun f1 i = i +1; fun f2 i = i - 1;
```

Ezeket a deklarációkat az SML-értelmező a *megadott sorrendben* értékeli ki.

```
type sor = int and osz = int;
datatype fa = L | B of fa * fa and
    'a verem = >| | >> of 'a * 'a verem;
val v1 = "a" and v2 = "z";
fun f1 i = i +1 and f2 i = i - 1;
```

Az `and` szócskával elválasztott deklarációkat az SML-értelmező *egyidejűleg* értékeli ki.

# Egyidejű deklaráció (folyt.)

- Egyidejű deklarációt kell használnunk kölcsönösen rekurzív függvények definiálására. Példa:

```
fun even 0 = true | even n = odd(n-1)
and odd 0 = false | odd n = even(n-1);
```

- Egyidejű deklarációt használhatunk két vagy több kötés egyidejű felcserélésére. Példa:

```
val v1 = "a"; val v2 = "z"; val v1 = v2 and v2 = v1;
```

- Egyidejű deklarációt használhatunk, ha fölülről lefelé haladva akarunk programot írni. Példa:

```
fun length zs = len zs 0
and len [] i = i | len (_ :: xs) i = len xs (i+1);
```

- A polimorf függvényeket a szekvenciális és az egyidejű deklaráció eltérően kezeli, mivel a típuslevezetést az SML-értelmező a teljes kifejezésre alkalmazza. Példa:

```
fun id x = x; fun hi () = id 3; fun nr () = id 4.0;
fun id x = x  and hi () = id 3  and nr () = id 4.0;
```

Az első sor kiértékelésekor `id 'a -> 'a` típusú. A második sor kiértékelésekor `id int -> int` és `real -> real` típusú lenne egyszerre, ami lehetetlen.

# AZ ORDER TÍPUS

# Az `order` típus

Az `order` típus definíciója (ld. `General.sig`)

```
datatype order = LESS | EQUAL | GREATER

[order] is used as the return type of comparison functions.
```

Példák az SML-alapkönyvtárból (SML Basis Library)

```
Int.compare     : int * int -> order
Char.compare    : char * char -> order
Real.compare    : real * real -> order
String.compare  : string * string -> order
Time.compare    : time * time -> order
```

# LISTÁK RENDEZÉSE

# Listák rendezése

- **`inssort` (beszúró rendezés),**
- **`selsort` (kiválasztó rendezés),**
- **`quicksort` (gyorsrendezés),**
- **`tmsort` (felülről lefelé haladó összefésülő rendezés),**
- `bmsort` (alulról felfelé haladó összefésülő rendezés),
- `smsort` (simarendezés).

# Beszúró rendezés

- Az `ins` segédfüggvény az `x` elemet a megfelelő helyre rakja be az `ys` listában:

```
(* ins : real * real list -> real list
   ins (x, ys) = ys kibővítve x-szel a <= reláció szerint
   PRE: ys a <= reláció szerint rendezve van *)
fun ins (x, y::ys) = if x <= y then x::y::ys else y::ins(x, ys)
  | ins (x : real, []) = [x]
```

- `inssort`-tal rekurzívan rendezzük a lista maradékát; végrehajtási ideje $O(n^2)$:

```
(* inssort : ('a * 'b list -> 'b list) -> 'a list -> 'b list
   inssort f xs = az xs elemeiből álló, az f felhasználásával
                  rendezett lista *)
fun inssort f (x::xs) = f(x, inssort f xs)
  | inssort _  [] = []
```

- Példa `inssort` alkalmazására:

```
inssort ins [4.24, 4.1, 5.67, 1.12, 4.1, 0.33, 8.0]
```

# Beszúró rendezés, generikus változat

- Az `ins` függvényt generikussá tesszük:

```
(* ins : ('a * 'a -> bool) -> 'a * 'a list -> 'a list
   ins cmp (x, ys) = ys kibővítve x-szel a cmp reláció szerint
   PRE: ys a cmp reláció szerint rendezve van *)
fun ins cmp (x, ys) =
      let fun ins0 (y::ys) =
                 if cmp(x, y) then x::y::ys else y::ins0 ys
            | ins0 [] = [x]
      in  ins0 ys
      end
```

- Ezzel `inssort` egy újabb változata:

```
(* inssort : ('a * 'a -> bool) -> 'a list -> 'a list
   inssort cmp xs = az xs elemeiből álló, a cmp reláció
                    szerint rendezett lista *)
fun inssort cmp (x::xs) = ins cmp (x, inssort cmp xs)
  | inssort _ [] = []
```

# Beszúró rendezés, generikus változat (folyt.)

- `inssort` eddigi változatai előbb elemeire szedik szét a rendezendő listát, majd hátulról visszafelé haladva, rendezés közben építik fel az újat.
- A jobbrekurziót és akkumulátort használó változatnak (`inssort2`) kisebb veremre van szüksége, mivel a listáról leválasztott elemeket balról jobbra haladva azonnal berakja a helyükre az eredménylistában. (A két megoldás futási idejét később összehasonlítjuk).

```
(* inssort2 : ('a * 'a -> bool) -> 'a list -> 'a list
   inssort2 cmp xs = az xs elemeiből álló, a cmp reláció
                     szerint rendezett lista *)
fun inssort2 cmp xs =
      let (* sort :  'a list -> 'a list -> 'a list
             sort xs zs = zs kibővítve az xs-nek a cmp reláció
                          szerint rendezett elemeivel
             PRE: zs cmp szerint rendezve van *)
          fun sort (x::xs) zs = sort xs (ins cmp (x, zs))
            | sort [] zs = zs
      in
          sort xs []
      end
```

# Beszúró rendezés `foldr`-rel és `foldl`-lel

- A második argumentumát akkumulátorként használó `foldl` kisebb vermet használ `foldr`-nél, ezért `inssortL` hosszabb listákat tud rendezni:

```
fun inssortR cmp = foldr (ins cmp) []
fun inssortL cmp = foldl (ins cmp) []
```

- Példák `insort`-tal és `insort2`-vel:

```
inssort op<= [4.24, 4.1, 5.67, 1.12, 4.1, 0.33, 8.0];
inssort2 op>= [4, 4, 5, 1, 0, 8];
inssort op< (explode "qwerty")
```

- Példák `foldr` és `foldl` felhasználásával:

```
fun inssortRi cmp = foldr (ins cmp)[];
fun inssortLr cmp = foldl (ins cmp)([] : real list)

inssortRi op>= [4, 4, 5, 1, 0, 8];
inssortLr op>= [4.24, 4.1, 5.67, 1.12, 4.1, 0.33, 8.0]
```

# A futási idők mérése, összehasonlítása

- 2000 elemet tartalmazó, véletlenszerűen előállított, illetve eredetileg éppen fordított sorrendű listák rendezéséhez szükséges futási időt mérünk.
  - Véletlen eloszlású egészlistát állít elő a `Random` könyvtárbeli `rangelist` függvény:

```
val xs2000R =
      Random.rangelist (1, 100000) (2000, Random.newgen());
```

  - Növekvő sorrendű egészlistát állít elő a `--` operátor:

```
infix --;
fun fm -- to =
      let fun upto to zs =
                if to < fm then zs else upto (to-1) (to::zs)
      in
          upto to []
      end;

val xs2000N = 1 -- 2000;
```

# A futási idők mérése, összehasonlítása (folyt.)

- A futási időt az alábbi függvénnyel mérhetjük:

```
fun futIdo (sort, sortFn) (cmp, cmpFn) (xs, kind) =
      let val starttime = Timer.startCPUTimer()
          val zs = sort cmp xs
          val usr=tim,... = Timer.checkCPUTimer starttime
      in
          "Int sort with " ^ sortFn ^ ", " ^ cmpFn ^
          ", length = " ^ Int.toString(length xs) ^ " (" ^
          kind ^ "), time = " ^ Time.fmt 2 tim ^ " sec\n"
      end;

val t1N =
     futIdo (inssort, "inssort") (op>=, "op>=") (xs2000N, "increasing");
val t2N =
     futIdo (inssort2, "inssort2") (op>=, "op>=") (xs2000N, "increasing");
val t1R =
     futIdo (inssort, "inssort") (op>=, "op>=") (xs2000R, "random");
val t2R =
     futIdo (inssort2, "inssort2") (op>=, "op>=") (xs2000R, "random");
```

# A futási idők mérése, összehasonlítása (folyt.)

- A 2000 elemű, fordított sorrendű lista rendezése az akkumulátort nem használó `inssort`-változatokkal több mint 5 s-ig, az akkumulátort használó változatokkal csak 0.01 s-ig tart (linux, 233 MHz-es Pentium).

```
Int sort with inssort, op>=, length = 2000 (increasing), time = 5.18 sec
Int sort with inssort2, op>=, length = 2000 (increasing), time = 0.01 sec
Int sort with inssortRi, op>=, length = 2000 (increasing), time = 5.14 sec
Int sort with inssortLi, op>=, length = 2000 (increasing), time = 0.01 sec
```

- Eltűnik a különbség, ha ugyanolyan hosszú, de véletlenszerűen előállított listákat rendezünk.

```
Int sort with inssort, op>=, length = 2000 (random), time = 2.39 sec
Int sort with inssort2, op>=, length = 2000 (random), time = 2.26 sec
Int sort with inssortRi, op>=, length = 2000 (random), time = 2.40 sec
Int sort with inssortLi, op>=, length = 2000 (random), time = 2.24 sec
```

# Kiválasztó rendezés

```
(* selsort : ('a * 'a -> order) -> 'a list -> 'a list
   selsort cmp xs = az xs elemei cmp szerint növekvő sorrendben
*)
fun selsort cmp xs =
      let
          (* max : 'a * 'a -> 'a
             max (x, y) = x és y közül cmp szerint a nagyobb
          *)
          fun max (x, y) = if cmp(x, y) = GREATER then x else y

          (* min : 'a * 'a -> 'a
             min (x, y) = x és y közül cmp szerint a kisebb
          *)
          fun min (x, y) = if cmp(x, y) = LESS then x else y

          (* maxSelect : 'a * 'a list * 'a list -> 'a * 'a list
             maxSelect (x, ys, zs) = pár, amelynek első tagja az
                (x::ys) cmp szerinti legnagyobb eleme, második
                tagja az x::ys többi eleméből és a zs
                elemeiből álló lista                              *)
          fun maxSelect (x, [], zs) = (x, zs)
            | maxSelect (x, y::ys, zs) =
                          maxSelect(max(x, y), ys, min(x,y)::zs)
```

# Kiválasztó rendezés (folyt.)

```
        (* sSort : 'a list * 'a list -> 'a list
           sSort (xs, ws) = az xs elemei cmp szerint növekvő
                            sorrendben a ws elé fűzve          *)
        fun sSort ([], ws) = ws
          | sSort (x::xs, ws) =
              let val (z, zs) = maxSelect(x, xs, [])
              in
                 sSort (zs, z::ws)
              end
    in
        sSort (xs, [])
    end

app load ["Int","Char","Real"];

selsort Int.compare [1,2,3,4,5,6,7,8,9];
selsort Int.compare [9,8,7,6,5,4,3,2,1];
selsort Real.compare [4.5,6.7,3.6,4.3,1.2,0.9,8.9,9.8,2.0];
selsort Char.compare (explode "Ej mi a ko tyukanyo");
```

# Gyorsrendezés akkumulátor nélkül

```
(* quicksort1 cmp xs = az xs elemeinek cmp szerint rendezett listája
   quicksort1 : ('a * 'a -> order) -> 'a list -> 'a list
*)
fun quicksort1 cmp xs =
      let (* qs : 'a list -> 'a list
             qs ys = ys elemeinek cmp szerint rendezett listája
          *)
          fun qs (m::ys) =
                let (* partition : 'a list * 'a list * 'a list -> 'a list
                       partition (xs, ls, rs) = olyan pár, amelynek első tagja
                         az xs m-nél kisebb elemeinek a listája ls elé fűzve,
                         második tagja pedig az xs többi eleme rs elé fűzve *)
                    fun partition (x::xs, ls, rs) =
                          if cmp(x, m) = LESS then partition(xs, x::ls, rs)
                                             else partition(xs, ls, x::rs)
                      | partition ([], ls, rs) = qs ls @ (m::qs rs)
                in
                    partition (ys, [], [])
                end
            | qs [] = []
      in
          qs xs
      end;
```

# Gyorsrendezés akkumulátorral

```
(* quicksort2 cmp xs = az xs elemeinek cmp szerint rendezett listája
   quicksort2 : ('a * 'a -> order) -> 'a list -> 'a list
*)
fun quicksort2 cmp xs =
      let (* qs : 'a list -> 'a list -> 'a list
             qs ys zs = ys elemeinek cmp szerint rendezett listája zs elé fűzve
           *)
          fun qs (m::ys) zs =
                let (* partition : 'a list * 'a list * 'a list -> 'a list
                       partition (xs, ls, rs) = olyan pár, amelynek első tagja
                         az xs m-nél kisebb elemeinek a listája ls elé fűzve,
                         második tagja pedig az xs többi eleme rs elé fűzve *)
                    fun partition (x::xs, ls, rs) =
                          if cmp(x, m) = LESS then partition(xs, x::ls, rs)
                                             else partition(xs, ls, x::rs)
                      | partition ([], ls, rs) = qs ls (m :: qs rs zs)
                in
                    partition (ys, [], [])
                end
            | qs [] zs = zs
      in
          qs xs []
      end;
```

# A futási idők mérése, összehasonlítása

```
val t1 = futIdo (inssort2, "inssort2") (op>=, "op>=") (xs2000R, "random");
                                                  (* ~ 2 M összehasonlítás! *)
val t3 = futIdo (quicksort2, "quicksort2")
                (Int.compare, "Int.compare") (xs20000R, "random");
val t4 = futIdo (Listsort.sort, "Listsort.sort")
                (Int.compare, "Int.compare") (xs20000R, "random");
                                                  (* ~ 300 E összehasonlítás *)

Int sort with inssort2, op>=, length = 2000 (random), time = 2.30 sec

Int sort with quicksort1, Int.compare, length = 20000 (random), time = 2.18 sec
Int sort with quicksort2, Int.compare, length = 20000 (random), time = 1.72 sec
Int sort with Listsort.sort, Int.compare, length = 20000 (random), time = 1.76 sec

Int sort with quicksort2, Int.compare, length = 200000 (random), time = 27.13 sec
Int sort with quicksort1, Int.compare, length = 200000 (random), time = 32.59 sec

val t7 = futIdo (Listsort.sort, "Listsort.sort") (Int.compare, "Int.compare")
         (Random.rangelist (1, 100000) (200000, Random.newgen()), "random");
! Uncaught exception:
! Out_of_memory
```

# Összefésülő rendezések

- Az összefésülő rendezéshez kell egy olyan függvény, amely két listát növekvő sorrendben egyesít.

```
(* merge(xs, ys) = xs és ys elemeinek <= szerint
                   egyesített listája
   merge : int list * int list -> int list
*)
fun merge (xxs as x::xs, yys as y::ys)=
      if x <= y
      then x::merge(xs, yys)
      else y::merge(xxs, ys)
  | merge ([], ys) = ys
  | merge (xs, []) = xs;
```

- Korlátot jelent, ha a részeredményeket a veremben tároljuk.
- Akkumulátor használata esetén meg kell fordítani az eredménylistát.

# Fölülről lefelé haladó összefésülő rendezés

- A fölülről lefelé haladó összefésülő rendezés *(top-down merge sort)* akkor hatékony, ha közel azonos hosszúságú az a két lista, amelyekre a rendezendő listát szétszedjük.

```
(* tmsort xs = az xs elemeinek a <= reláció szerint
               rendezett listája
   tmsort : int list -> int list
*)
fun tmsort xs = let val h = length xs
                    val k = h div 2
                in
                   if h > 1
                   then merge(tmsort(List.take(xs, k)),
                              tmsort(List.drop(xs, k)))
                   else xs
                end;
```

- A legrosszabb esetben $O(n \cdot log\, n)$ lépésre van szükség.